Graduaciones elementales sobre el álgebra de Lie de matrices triangulares superiores

Sergio Alejandro Vélez Bermúdez

Universidad Tecnológica de Pereira
Facultad de Ciencias Básicas
Maestría en Matemática
Pereira, Colombia
2023

Graduaciones elementales sobre el álgebra de Lie de matrices triangulares superiores

Sergio Alejandro Vélez Bermúdez

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de:
Magíster en Matemática

Director:
Alejandro Estrada Serna

Línea de Investigación:
Álgebra

Universidad Tecnológica de Pereira
Facultad de Ciencias Básicas
Maestría en Matemática
Pereira, Colombia
2023

“En las matemáticas es donde el espíritu encuentra lo que más desea: la continuidad y la perseverancia ”

A. France

Agradecimientos

A mi familia por todo su apoyo y motivación durante todo este tiempo de formación académica. Así mismo, a la esencia de esas personas que aunque no se encuentran en este plano material siempre fueron un ejemplo a seguir, Doctor Yuri Alexander Poveda, Maria Aurora Gomez.

Además, quiero agradecer al grupo de compañeros de estudio que he tenido desde mis primeros pasos de formación, y de una forma particular agradecer al profesor Alejandro Estrada Serna, todo su apoyo, asesoría, enseñanza, en especial su comprensión y paciencia durante este proceso.

Resumen

Este trabajo se enfoca en el álgebra de Lie $UT_n(K)^{(-)}$, es decir, las matrices triangulares superiores de orden n con el producto de Lie. Se describe la graduación elemental sobre el álgebra de Lie $UT_n(K)^{(-)}$ y se presenta la graduación canónica por el grupo $\mathbb{Z}_n$ sobre el álgebra mencionada, produciendo una base de identidades polinomiales graduadas que satisfacen la graduación.

Palabras claves: Álgebra de Lie, G-graduaciones, identidades polinomiales, matrices triangulares, PI-álgebra.

Abstract

This work is focused on Lie algebra $UT_n(K)^{(-)}$, that is, the upper triangular matrices of order n with the Lie product. We discribe the elementary grading on the Lie algebra $UT_n(K)^{(-)}$ and present the canonical grading through the group $\mathbb{Z}_n$ over that algebra, generating a basis of graded polynomial identities which satisfies the grading.

Keywords: Lie algebra, G-grading, polynomial identities, triangular matrices, PI-algebra.

Introducción

Un álgebra A es un espacio vectorial sobre un cuerpo K dotado de una operación binaria de $A \times A$ en A llamada producto [9]; en ese sentido, definiendo $\boldsymbol{X}$ como un conjunto contable de variables y denotando por $K\langle \boldsymbol{X} \rangle$ el álgebra libre asociativa generada por $\boldsymbol{X}$ cuyos elementos se llaman polinomios, una identidad polinomial para el álgebra A es un elemento de $K\langle \boldsymbol{X} \rangle$ que se anula bajo cualquier sustitución de elementos de A. De esta manera, una PI-álgebra es un álgebra que tiene al menos una identidad polinomial diferente de cero [15]. Dado un grupo G, se dice que un álgebra A es G-graduada si puede escribirse como suma directa de subespacios propios no triviales, esto es, $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$, tal que $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$ para todo $g,\ h \in G$.

Así mismo, siendo $A = M_n(K)$ el álgebra de matrices de tamaño $n \times n$, tomando $(g_1, \ldots, g_n)$ una n–tupla de elementos de G, se dice que A es graduada por una graduación elemental, si se tiene que $A^{(g)} = \text{Span}\{e_{pq} \mid g_p g_q^{-1} = g\}$, donde e_{pq} son matrices unidad [13, Cap. 3]. En 1963, las graduaciones en un álgebra fueron estudiadas por Wall [22], posteriormente Bahturin y Zaicev obtuvieron en [6] la clasificación de las graduaciones del álgebra de matrices (asociativas) de orden n, descripción que después se extendería en el caso de los grupos abelianos, a álgebras simples asociativas con ideal unilateral (sobre un cuerpo álgebraicamente cerrado) como se evidencia en [10]. Hallando así resultados similares para el álgebra de Lie [3]. Alrededor de 1985 Kemer desarrolló la teoría de estructura de T-ideales (ideales de identidades) en las álgebras libres asociativas [10]. Desde entonces, la teoría desarrollada por Kemer ha implicado el estudio detallado del conjunto de identidades polinomiales de algún álgebra, en particular, si este es finitamente generado. Las álgebras graduadas aparecen en un reconocido artículo de Wall [22], donde él describe las álgebras simples graduadas de dimensión finita cuando la graduación proviene del grupo $\mathbb{Z}_2$. En [2], [5] y la reciente monografía [10] se evidencian trabajos que han permitido desarrollar las graduaciones de álgebras. La descripción de todas las posibles G-graduaciones de A ha sido un problema importante principalmente en la teoría estructural de anillos graduados y sus aplicaciones. En particular, la construcción de todas las clasificaciones en el álgebra matricial juega un papel fundamental en la PI teoría (ver, por ejemplo [7] y [19]) y en la teoría de álgebras de Lie (ver [1]). En [20] se describe, por ejemplo, todas las graduaciones abelianas sobre el álgebra de matrices triangulares superiores con entradas en un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Tales álgebras son casos especiales de álgebras de matrices denominadas triangulares por bloques, y estos últimos son objeto excepcional en el estudio de los invariantes numéricos de PI-álgebras, en particular en el estudio de variedades mínimas ([12], [11], [13]).

Como se evidencia, las álgebras graduadas entre las que se encuentra el álgebra de matrices, han sido estudiadas durante décadas, presentando aplicaciones en diversas ramas de las matemáticas y la física teórica [4]. En el contexto de las álgebras asociativas de matrices triangulares superiores de tamaño $n \times n$ sobre un cuerpo K ($UT_n(K)$), se tiene que todas las graduaciones son elementales [21], mientras que en el caso de álgebras de matrices triangulares superiores con el producto (no asociativo) de Lie $UT_n(K)^{(-)}$ aparecen graduaciones no elementales incluso cuando la graduación proviene de un grupo finito y abeliano. Este resultado cautiva la atención, razón por la cual, inspirados en el artículo de Koshlukov y Yukihide [17], a lo largo de este trabajo se procede a construir las graduaciones elementales sobre $UT_n(K)^{(-)}$ y se describe la graduación para el caso canónico, es decir, las graduaciones provenientes de $\mathbb{Z}_n$.

Para llevar a cabo lo planteado, se abordan conceptos, ejemplos y algunos resultados que se deben conocer y que permiten obtener G-graduaciones cuando el álgebra es $UT_n(K)^{(-)}$, en ello se evidencian graduaciones elementales isomorfas sobre el álgebra mencionada, caso que no se cumple para el álgebra asociativa $UT_n(K)$, donde el producto es el usual entre matrices. Así mismo, se muestra la forma en que se puede definir de manera única la graduación para el álgebra no asociativa. Posteriormente, tomando como fundamento las definiciones de buenas y malas secuencias se logra obtener identidades polinomiales G-graduadas para el álgebra $UT_n(K)^{(-)}$ y se estudian propiedades del grupo simétrico de permutaciones actuando en tuplas que definen graduaciones en el álgebra de Lie. El trabajo concluye considerando un caso particular de $\mathbb{Z}_n$-graduación sobre el álgebra no asociativa y una respectiva base para las identidades polinomiales de la misma. Ejecutando las ideas mencionadas, el Capítulo 1 de este trabajo consta de los preliminares que permiten probar algunas afirmaciones como lemas, corolarios y teoremas de los cuales se hacen ilustraciones con el fin de obtener una mayor comprensión de la teoría. En el Capítulo 2 se establece que toda graduación elemental para el álgebra de Lie proviene o se encuentra relacionada con una tupla de valores que facilitan por comodidad asociar una matriz a la G-graduación. Finalmente, el Capítulo 3 se centra en considerar la graduación canónica de $UT_n(K)^{(-)}$, logrando establecer una base para el $T_{\mathbb{Z}_n}$-ideal de identidades de $UT_n(K)$, lo que posteriormente permitirá probar un resultado similar para el caso de Lie, es decir $UT_n(K)^{(-)}$.

TABLA DE CONTENIDO

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1. Preliminares

1.1.1. Álgebras

Definición 1.1.1. Un espacio vectorial A (sobre un cuerpo K) se llama **álgebra** si está equipado con una operación binaria $\cdot$ llamada producto (mapa $\cdot : A \times A \to A$) tal que para todo $a, b, c \in A$ y para cualquier $\alpha \in K$ se satisfacen los siguientes axiomas

A1. $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c.$

A2. $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c.$

A3. $\alpha(a\cdot b) = (\alpha a)\cdot b = a\cdot(\alpha b).$

Definición 1.1.2. Un subespacio vectorial S (en adelante subespacio) de un álgebra A es una **subálgebra** de A si es cerrado respecto al producto de A.

Ejemplo 1.1.3.

1. $M_n(K)$, el conjunto de matrices de tamaño $n\times n$ con las operaciones usuales de suma de matrices y multiplicación por un escalar es un álgebra.

2. El espacio vectorial K sobre el cuerpo K es un álgebra con la suma y el producto definidos en K.

3. Sea $K[x]$ el conjunto de polinomios en la variable x y coeficientes en K. Se tiene que $K[x]$ es un álgebra con las operaciones usuales de suma y multiplicación de polinomios.

   Observe los axiomas de álgebra para $K[x]$: Dados $f,\ g,\ h \in K[x]$ definidos como sigue

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i, \qquad h(x) = \sum_{i=0}^{l} c_i x^i,$$

y sea $t = \text{máx}(n,m)$, se tiene,

$$\textbf{A1.}\quad [f(x)+g(x)]\cdot h(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right)\cdot \sum_{i=0}^{l} c_i x^i = \left(\sum_{i=0}^{t}(a_i+b_i)x^i\right)\cdot \sum_{i=0}^{l} c_i x^i$$
$$= \sum_{i=0}^{t+l}\left(\sum_{j+k=i}(a_j c_k + b_j c_k)\right)x^i = \sum_{i=0}^{t+l}\left(\sum_{j+k=i} a_j c_k\right)x^i + \sum_{i=0}^{t+l}\left(\sum_{j+k=i} b_j c_k\right)x^i$$
$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \sum_{i=0}^{l} c_i x^i \; + \; \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \sum_{i=0}^{l} c_i x^i.$$

La prueba de **A2** es análoga a la de **A1**. Para **A3** se tiene:

$$a\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right) = \left(a\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(a\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right).$$

Con **A1**, **A2** y **A3** se prueba que $K[x]$ es un álgebra.

4. $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, el conjunto de polinomios en las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, forman un álgebra con las operaciones usuales.

5. $UT_n(K)$, el subconjunto de matrices de $M_n(K)$ compuesto por matrices triangulares superiores con multiplicación usual es un álgebra.

   A continuación se verifica. Dadas $A,\ B \in UT_n(K)$ se quiere ver que $A\cdot B \in UT_n(K)$ es decir, que $(A\cdot B)_{ij} = 0$ cuando $i > j$. Si $A = (\alpha_{ij})$ y $B = (\beta_{ij})$ se tiene que $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = 0$ cuando $i > 0$,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1(n-1)} & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2(n-1)} & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3(n-1)} & \alpha_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{4(n-1)} & \alpha_{4n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \quad \& \quad B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \cdots & \beta_{1(n-1)} & \beta_{1n} \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{23} & \cdots & \beta_{2(n-1)} & \beta_{2n} \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \cdots & \beta_{3(n-1)} & \beta_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{4(n-1)} & \beta_{4n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

   La componente ij del producto entre ambas matrices viene dada por

$$(A\cdot B)_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \alpha_{i3}\beta_{3j} + \cdots + \alpha_{ij}\beta_{jj} + \cdots + \alpha_{ii}\beta_{ij} + \cdots + \alpha_{in}\beta_{nj},$$

   y note que si $i > j$, todos los términos de la suma se hacen cero. Por ejemplo, $\alpha_{i1}\beta_{1j} = 0$ pues $\alpha_{i1} = 0$, el mismo razonamiento se usa en cada uno de los sumandos y se tiene que $(A\cdot B)_{ij} = 0$ cuando $i > j$, luego $A\cdot B \in UT_n(K)$ y se prueba que $UT_n(K)$ es subálgebra de $M_n(K)$.

6. $S\ell_n(K)$ **(Special linear Lie algebra)**, el conjunto de matrices de tamaño $n\times n$ con traza cero, es un álgebra si se define la multiplicación así:

$$[A,B] = AB - BA, \qquad \text{para todo } A,B \in S\ell_n(K).$$

Verificando lo anterior, se tiene que: Dadas $A,\ B \in S\ell_n(K)$ se quiere ver que $[A,B] = AB - BA$ pertenece a $S\ell_n(K)$, esto es lo mismo que $\mathrm{Tr}(AB - BA) = 0$. Por propiedades de la traza de una matriz se tiene

$$\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(AB) = 0.$$

De esta manera, $[A,B] \in S\ell_n(K)$ y se concluye que $S\ell_n(K)$ es subálgebra de $M_n(K)$.

7. $S_n(K)$, el conjunto de matrices $n \times n$ simétricas ($A = A^T$) con la multiplicación

$$A * B = AB + BA, \quad \text{para todo } A, B \in S_n(K),$$

es subálgebra de $M_n(K)$.

Verificación: Dadas $A,\ B \in S_n(K)$ se quiere ver que $A * B = AB + BA \in S_n(K)$, equivalente a considerar que $AB + BA = (AB + BA)^T$. Por propiedades de la matriz transpuesta se tiene,

$$(AB + BA)^T = (AB)^T + (BA)^T = B^T A^T + A^T B^T = BA + AB = AB + BA.$$

De esta manera, $A * B \in S_n(K)$ y se concluye que $S_n(K)$ es subálgebra de $M_n(K)$.

8. $O_n(K)$ el conjunto de matrices $n \times n$ antisimétricas ($A = -A^T$), con multiplicación $[A,B]$ es un álgebra. Una matriz antisimétrica es por ejemplo

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{entonces} \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{de donde} \quad A = -A^T.$$

A continuación, dadas $A,\ B \in O_n(K)$ se quiere ver que $[A,B] = AB - BA \in O_n(K)$, en otras palabras, $AB - BA = -(AB + BA)^T$. Por propiedades de la matriz transpuesta se tiene,

$$\begin{aligned} -(AB - BA)^T &= -[(AB)^T - (BA)^T] = -[B^T A^T - A^T B^T] \\ &= -[(-B)(-A) - (-A)(-B)] \\ &= -[BA - AB] \\ &= AB - BA. \end{aligned}$$

De esta manera, $[A,B] \in O_n(K)$ y se concluye que $O_n(K)$ es subálgebra de $M_n(K)$.

Definición 1.1.4. Una subálgebra I de un álgebra A se llama **ideal derecho** si $IA \subseteq I$. Si $AI \subseteq A$, se dice entonces que I es un **ideal izquierdo** de A. Un ideal bilateral ó simplemente **ideal**, es un ideal que es izquierdo y derecho al mismo tiempo. I es un ideal **trivial** de A si $I = \{0\}$, I es **impropio** si $I = A$, en otro caso I se llama propio.

Por ejemplo, en $M_2(K)$ el conjunto

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a,\ b \in K \right\}$$

es un ideal derecho pero no es ideal izquierdo. De hecho, el álgebra $M_n(K)$ no tiene ideales propios no triviales.

1.1.2. Tipos de álgebras.

Definición 1.1.5. Dadas las álgebras A y B (sobre K) entonces un **homomorfismo de álgebras** $\varphi : A \to B$ es una transformación lineal que cumple lo siguiente,

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b), \quad \text{para todo } \ a,\ b \in A.$$

Observación 1.1.6. Un **isomorfismo** es un homomorfismo de álgebras biyectivo. Dada un álgebra A, un **endomorfismo** es un homomorfismo de A en A, el conjunto de todos los endomorfismos de A se denota como $\mathrm{End}(A)$. En el mismo sentido, un **automorfismo** es un isomorfismo de A en A, y se emplea $\mathrm{Aut}(A)$ para denotar el conjunto de todos los automorfismos de A. De acuerdo con esto, se concluye que

$$\mathrm{Aut}(A) \subseteq \mathrm{End}(A).$$

Definición 1.1.7. Dado $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de álgebras, se define el núcleo y la imagen de φ por:

- $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{\ a \in A \mid \varphi(a) = 0\ \}$.
- $\mathrm{Im}(\varphi) = \{\ \varphi(a) \in B \mid a \in A\ \}$.

Definición 1.1.8. Una partición de un conjunto A es una descomposición del conjunto en clases de equivalencia, tales que todo elemento del conjunto está en una y solo una de las clases. Denotando por $a \sim b$ el hecho de que a esta en la misma clase de b, con $a, b \in A$, entonces la relación $a \sim b$ es reflexiva, simétrica y transitiva.

La relación $\sim$ entre los elementos de un conjunto que satisface las propiedades descritas, produce una partición del conjunto, donde:

$$\overline{a} = \{b \in A : b \sim a\},$$

es la clase de $a \in A$.

Observación 1.1.9. Dada un álgebra A y J un ideal de A. El ideal J determina una relación de equivalencia $\equiv$ sobre A definido de la siguiente manera:

$$a \equiv b, \quad \text{si} \quad a - b \in J.$$

La clase lateral de a, se denota por $\overline{a} = \{b \in J : b \equiv a\}$. El conjunto de todas las clases laterales se denota por A/J. Otra manera de escribir la clase lateral $\overline{a}$ es $a + J$, donde

$$a + J = \{a + r \mid r \in J\},$$

luego $A/J = \{a + J \mid a \in A\}$.

Teorema 1.1.10. Dado $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de álgebras (sobre K), entonces

a) $\mathrm{Ker}(\varphi)$ es un ideal bilateral de A.

b) $A/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi)$.

Demostración. Para probar 1, debe verse primero que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ es una subálgebra de A. Dados $x,\ y \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ se tiene que

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Ahora, para ver que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ es ideal a izquierda (y a derecha) de A, sea $ax \in A \cdot \mathrm{Ker}(\varphi)$, con $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ y $a \in A$, observe que

$$\varphi(a \cdot x) = \varphi(a) \cdot \varphi(x) = \varphi(a) \cdot 0 = 0,$$

de esta manera $A \cdot \mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$ y, análogamente $\mathrm{Ker}(\varphi)A \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$. Así, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ es un ideal bilateral de A.

Para probar 2, de acuerdo con el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathrm{Im}(\varphi) \\
 & A/_{\mathrm{Ker}(\varphi)} \arrow[u, dashed, tail, two heads, "h"']
\end{tikzcd}$$

defina h de modo que $h\pi(a) = \varphi(a)$ para todo $a \in A$, siendo π la transformación natural tomar la clase definida por $\pi(a) = \overline{a}$ para todo $a \in A$. Note que h está bien definida y es un homomorfismo biyectivo de álgebras (isomorfismo).

i) ***h* está bien definida:** Se quiere ver que si $\overline{a_1} = \overline{a_2}$ entonces $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$. Observe,

$$\begin{aligned}
\varphi(a_1) - \varphi(a_2) &= \varphi(a_1 - a_2) = h\pi(a_1 - a_2) \\
&= h(\pi(a_1) - \pi(a_2)) = h(\overline{a_1} - \overline{a_2}) \\
&= h(\overline{0}) = h(\pi(0)) = h\pi(0) = \varphi(0) = 0 \\
\iff \quad & \varphi(a_1) = \varphi(a_2).
\end{aligned}$$

ii) ***h* es homomorfismo de álgebras:** Para ver que h es transformación lineal, considere que $\overline{a_1},\ \overline{a_2} \in A/\mathrm{Ker}(\varphi)$ y $\alpha, \beta \in K$

$$\begin{aligned}
h(\alpha\overline{a_1} + \beta\overline{a_2}) &= h(\alpha\pi(a_1) + \beta\pi(a_2)) = h(\pi(\alpha a_1) + \pi(\beta a_2)) \\
&= h\pi(\alpha a_1 + \beta a_2) = \varphi(\alpha a_1 + \beta a_2) = \alpha\varphi(a_1) + \beta\varphi(a_2) \\
&= \alpha h\pi(a_1) + \beta h\pi(a_2) = \alpha h(\pi(a_1)) + \beta h(\pi(a_2)) \\
&= \alpha h(\overline{a_1}) + \beta h(\overline{a_2}),
\end{aligned}$$

h también separa productos, observe

$$\begin{aligned}
h(\overline{a_1} \cdot \overline{a_2}) &= h(\overline{a_1 \cdot a_2}) = h(\pi(a_1 \cdot a_2)) = h\pi(a_1 \cdot a_2) = \varphi(a_1 \cdot a_2) \\
&= \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) = h\pi(a_1) \cdot h\pi(a_2) \\
&= h(\overline{a_1}) \cdot h(\overline{a_2}).
\end{aligned}$$

iii) ***h* es biyectiva:** Para probar que h es sobre, dado $b \in \mathrm{Im}(\varphi)$, se tiene que

$$b = \varphi(a) = h\pi(a) = h(\pi(a)) = h(\overline{a}), \qquad \text{así, existe } a \in A.$$

Luego h es sobre. Para probar que h es inyectiva, sea $\overline{a} \in \mathrm{Ker}(h)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 = h(\overline{a}) &= h(\pi(a)) = h\pi(a) = \varphi(a) \\ &\Longleftrightarrow a \in \mathrm{Ker}(\varphi) \Longleftrightarrow \overline{a} = \mathrm{Ker}(\varphi) = \overline{0}, \end{aligned}$$

de esta manera se concluye que $\mathrm{Ker}(h) = \{\overline{0}\}$ y, en consecuencia, h es inyectiva.

Por los items *i*) *ii*) y *iii*) se tiene que h es un isomorfismo de álgebras y se comprueba que $A/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathrm{Im}(\varphi)$. ■

Definición 1.1.11. Dada A un álgebra, para todo $a,\ b,\ c \in A$ se define:

- A es **asociativa** si $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- A es **conmutativa** si $a \cdot b = b \cdot a$.
- A es **unitaria** si A tiene una unidad 1 tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

Ejemplo 1.1.12.

1 $M_n(K)$ es asociativa y unitaria, pero no es conmutativa.

2 K es asociativa, conmutativa y unitaria.

3 $S\ell_n(K)$ es no conmutativa, no asociativa y no unitaria.

4 $S_n(K)$ con el producto $A * B = AB + BA$ para todo $A,\ B \in S_n(K)$, tiene la particularidad de ser una álgebra conmutativa pero no asociativa.

Definición 1.1.13. Se denomina **característica de un anillo** R y se denota por $\mathrm{Char}(R)$ al menor entero positivo n tal que

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ veces}} = 0.$$

Si no existe tal entero n, se dice que R es de característica cero.

Ejemplo 1.1.14. En $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ se tiene que $\underbrace{1+1+1+1+1}_{5 \text{ veces}} = 0$, desde luego $\mathrm{Char}(\mathbb{Z}_5) = 5$.

Por otra parte, $\mathrm{Char}(\mathbb{Z}) = 0$.

Proposición 1.1.15. Sea A un álgebra sin unidad, considerando el espacio vectorial

$$R = K \oplus A,$$

equipado con la siguiente multiplicación

$$(\alpha + a) \cdot (\beta + b) = \alpha\beta + (\alpha b + \beta a + a \cdot b) \qquad \alpha,\ \beta \in K,\ \ a,\ b \in A,$$

entonces R es un álgebra unitaria.

Demostración. Note que R es álgebra. Dados $r_1 = (\alpha + a),\ r_2 = (\beta + b),\ r_3 = (\gamma + c) \in R$, se tiene:

- **Distributiva (A1):**

$$\begin{aligned} r_1 \cdot (r_2 + r_3) &= (\alpha + a)[(\beta + b) + (\gamma + c)] \\ &= (\alpha + a)[(\beta + \gamma) + (b + c)] \\ &= \alpha(\beta + \gamma) + \alpha(b + c) + (\beta + \gamma)a + a \cdot (b + c) \\ &= \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha b + \alpha c + \beta a + \gamma a + a \cdot b + a \cdot c \\ &= \alpha\beta + (\alpha b + \beta a + a \cdot b) + \alpha\gamma + (\alpha c + \gamma a + a \cdot c) \\ &= (\alpha + a) \cdot (\beta + b) + (\alpha + a) \cdot (\gamma + c) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3. \end{aligned}$$

  Análogamente para **A2**.

- **Producto por escalar (A3):**

$$\begin{aligned} \gamma(r_1 \cdot r_2) = \gamma[(\alpha + a) \cdot (\beta + b)] &= \gamma[\alpha\beta + (\alpha b + \beta a + a \cdot b)] \\ &= (\alpha\gamma)\beta + [(\alpha\gamma)b + \beta(\gamma a) + (\gamma a) \cdot b] = (\alpha\gamma + \gamma a) \cdot (\beta + b) = (\gamma r_1) \cdot r_2 \\ &= \alpha(\beta\gamma) + [\alpha(\gamma b) + (\beta\gamma)a + a \cdot (\gamma b)] = (\alpha + a) \cdot (\beta\gamma + b\gamma) = r_1 \cdot (\gamma r_2). \end{aligned}$$

Además, si A es conmutativa y asociativa, entonces R también lo es.

- **Conmutativa:** Dados $r_1, r_2 \in R$, entonces

$$\begin{aligned} r_1 \cdot r_2 = (\alpha + a)(\beta + b) &= \alpha\beta + (\alpha b + \beta a + a \cdot b) \\ &= \beta\alpha + (\beta a + \alpha b + b \cdot a) \\ &= (\beta + b) \cdot (\alpha + a) \\ &= r_2 \cdot r_1. \end{aligned}$$

- **Asociativa:** Dados $r_1,\ r_2,\ r_3 \in R$ entonces

$$\begin{aligned} (r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 &= [(\alpha + a) \cdot (\beta + b)] \cdot (\gamma + c) = [\alpha\beta + (\alpha b + \beta a + a \cdot b)] \cdot (\gamma + c) \\ &= (\alpha\beta)\gamma + [\alpha\beta c + \gamma(\alpha b + \beta a + a \cdot b) + (\alpha b + \beta a + a \cdot b) \cdot c] \\ &= \alpha\beta\gamma + [\alpha\beta c + \alpha\gamma b + \beta\gamma a + \gamma a \cdot b + \alpha b \cdot c + \beta a \cdot c + (a \cdot b) \cdot c] \\ &= \alpha(\beta\gamma) + [\alpha(\beta c) + \alpha(\gamma b) + \alpha b \cdot c + \beta\gamma a + a \cdot (\beta c) + a \cdot (\gamma b) + a \cdot (b \cdot c)] \\ &= \alpha(\beta\gamma) + [\alpha(\beta c + \gamma b + b \cdot c) + \beta\gamma a + a \cdot (\beta c + \gamma b + b \cdot c)] \\ &= (\alpha + a) \cdot [\beta\gamma + (\beta c + \gamma b + b \cdot c)] \\ &= (\alpha + a) \cdot [(\beta + b) \cdot (\gamma + c)] = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3). \end{aligned}$$

Por último, note que R es un álgebra unitaria, donde la unidad es la unidad del cuerpo $1_R = 1_K + 0_A$. Dado $r = \alpha + a \in R$ entonces,

- $1_R \cdot r = (1 + 0) \cdot (\alpha + a) = \alpha + (a + 0 + 0) = \alpha + a = r.$
- $r \cdot 1_R = (\alpha + a) \cdot (1 + 0) = \alpha + (0 + a + 0) = \alpha + a = r.$

■

1.1.3. Álgebras libres.

Definición 1.1.16. Dado el conjunto de variables $\boldsymbol{X} = \{x_1, x_2, \cdots\}$. **El álgebra libre** F, generada por $\boldsymbol{X}$ cumple que para cualquier álgebra A y cualquier función $f: \mathrm{X} \rightarrow A$ existe un único homomorfismo de álgebras $\phi: F \rightarrow A$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "\phi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

donde $\boldsymbol{i}$ es la función inclusión.

Proposición 1.1.17. El álgebra $K\{\boldsymbol{X}\}$ cuya base son los monomios no asociativos ni conmutativos $x_{i_1}\ x_{i_2} \ldots x_{i_n}$ y el producto

$$(x_{i_1}\ \cdots x_{i_n})(x_{j_1}\ \cdots x_{j_n}),$$

es el álgebra libre.

Demostración. Dada A un álgebra y $f: \mathrm{X} \rightarrow A$, se define $\phi(x_i) = f(x_i)$ para todo i. Luego se extiende linealmente a ϕ es decir,

$$\phi(\alpha x_{i_1} x_{j_1} + \beta x_{i_2} x_{j_2}) = \alpha\phi(x_{i_1})\phi(x_{j_1}) + \beta\phi(x_{i_2})\phi(x_{j_2}).$$

Ahora note que ϕ es único. Suponga que existe otro homomorfismo de álgebras ψ tal que $\psi(x_i) = f(x_i)$ para todo i, y dado $y = \alpha_{i_1 j_1} x_{i_1} x_{j_1} + \beta x_{i_2} x_{j_2} \in K\{\boldsymbol{X}\}$ entonces

$$\begin{aligned}\psi(y) &= \psi(\alpha x_{i_1} x_{j_1} + \beta x_{i_2} x_{j_2}) = \alpha\psi(x_{i_1})\psi(x_{j_1}) + \beta\psi(x_{i_2})\psi(x_{j_2}) \\ &= \alpha\psi(x_{i_1})\psi(x_{j_1}) + \beta\psi(x_{i_2})\psi(x_{j_2}) = \alpha f(x_{i_1}) f(x_{j_1}) + \beta f(x_{i_2}) f(x_{j_2}) \\ &= \alpha\phi(x_{i_1})\phi(x_{j_1}) + \beta\phi(x_{i_2})\phi(x_{j_2}) = \phi(\alpha x_{i_1} x_{j_1} + \beta x_{i_2} x_{j_2}) \\ &= \phi(y), \qquad\qquad \text{para todo } \ y \in K\{\boldsymbol{X}\},\end{aligned}$$

luego $\psi = \phi$ y se tiene que ϕ es único. ■

Ejemplo 1.1.18. Si $\boldsymbol{X} = \{x, y\}$ entonces una base para $K\{\boldsymbol{X}\}$ es

$$\{1,\ x,\ y,\ xx,\ yy,\ xy,\ yx,\ (xy)y,\ x(yy),\ (yy)x,\ y(yx),$$
$$(xx)y,\ x(xy),\ (xy)x,\ x(yx),\ (yx)x,\ y(xx),\ (yx)y,\ y(xy),\ xxx,\ yyy, \cdots\}.$$

Definición 1.1.19. Dado el conjunto de variables $\boldsymbol{X} = \{x_1, x_2, \cdots\}$. **El álgebra libre asociativa** sobre $\boldsymbol{X}$ es el álgebra asociativa F que cumple la propiedad de que para cualquier álgebra asociativa A y cualquier función f: $\boldsymbol{X} \rightarrow A$ existe un único homomorfismo de álgebras asociativas $\phi: F \rightarrow A$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "\phi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Proposición 1.1.20. El álgebra de polinomios asociativos $K\langle \boldsymbol{X} \rangle$ es el álgebra asociativa libre sobre $\boldsymbol{X}$.

Demostración. La demostración es similar a la de la Proposición 1.1.17. ■

Ejemplo 1.1.21. Sea $\boldsymbol{X}=\{x,y\}$ y sea $I=\langle (xy)z-x(yz)\rangle$ un ideal de $K\{\boldsymbol{X}\}$ con $x,\ y,\ z\in K\{\boldsymbol{X}\}$ generado por la relación de asociatividad, en ese sentido tenga presente que $(xy)z=x(yz)$. Las clases en el conjunto $K\{\boldsymbol{X}\}\big/I$ quedan definidas por la relación de asociatividad, por ejemplo

$$x(xy)=(xx)y=x^2y.$$

Así, muchos de los elementos de la base de $K\{\boldsymbol{X}\}$ se definen por un único representante en $K\{\boldsymbol{X}\}\big/I$. De esta manera, $K\{\boldsymbol{X}\}\big/I\cong K\langle \boldsymbol{X}\rangle$ y, una base para $K\langle \boldsymbol{X}\rangle$ es

$$\{1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ yx,\ y^2,\ xy^2,\ yxy,\ y^2x,\ x^2y,\ xyx,\ yx^2,\ x^3,\ y^3,\cdots\}.$$

Definición 1.1.22. Dado el conjunto de variables $\boldsymbol{X}=\{x_1,x_2,\cdots\}$. **El álgebra libre asociativa y conmutativa** sobre $\boldsymbol{X}$ es el álgebra asociativa y conmutativa F que cumple la propiedad de que para cualquier álgebra asociativa y conmutativa A y cualquier función $f\colon \boldsymbol{X}\to A$ existe un único homomorfismo de álgebras asociativas y conmutativas $\phi: F\to A$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "\phi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Proposición 1.1.23. El álgebra de polinomios asociativos y conmutativos $K[\boldsymbol{X}]$ es el álgebra asociativa y conmutativa libre sobre $\boldsymbol{X}$

Demostración. La demostración es análoga a la de la Proposición 1.1.17. ■

Ejemplo 1.1.24. Sea $\boldsymbol{X}=\{x,y\}$ y sea $I=\langle (xy)z-x(yz), xy-yx\rangle$ un ideal de $K\{\boldsymbol{X}\}$ con $x,\ y,\ z\in K\{\boldsymbol{X}\}$ generado por la relación de asociatividad y conmutatividad, teniendo en cuenta entonces que $(xy)z=x(yz)$ y $xy=yx$, las clases en el conjunto $K\{\boldsymbol{X}\}\big/I$ quedan definidas por la relación de asociatividad y conmutatividad. Por ejemplo

$$x(xy)=(xx)y=x^2y=yx^2.$$

Así, muchos de los elementos de la base de $K\{\boldsymbol{X}\}$ se definen por un único representante en $K\{\boldsymbol{X}\}\big/I$. De esta manera, $K\{\boldsymbol{X}\}\big/I\cong K[\boldsymbol{X}]$ y, una base para $K[\boldsymbol{X}]$ es

$$\{1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ xy^2,\ x^2y,\ x^3,\ y^3,\cdots\}$$

los polinomios de grado 2 son una subálgebra de $K[\boldsymbol{X}]$.

Definición 1.1.25.

a) Un **álgebra de Weyl** es el álgebra asociativa ${}^{K\langle\{x,y\}\rangle}\Big/_{\langle xy-yx-1\rangle}$. Una base para esta álgebra es

$$\{x^i y^j \mid i, j \in \mathbb{N}\},$$

esto dado a que por ejemplo el elemento xyx se puede expresar como

$$xyx = x(yx) = x(xy-1) = x^2y - x,$$

una combinación de elementos de la base.

b) El álgebra q−Weyl es el álgebra asociativa generada por x, x^{-1}, y, y^{-1} con las relaciones $yx = qxy$, $xx^{-1} = yy^{-1} = x^{-1}x = y^{-1}y = 1$. Una base para esta álgebra es

$$\{x^i y^j \mid i, j \in \mathbb{Z}\},$$

por ejemplo, el elemento $x^{-3}y^2x^5y^{-6}$ se ecribe como

$$\begin{aligned}
x^{-3}y^2x^5y^{-6} &= x^{-3}y(yx)x^4y^{-6} = qx^{-3}y(xy)x^4y^{-6} = q^2x^{-2}yyx^4y^{-6}\\
&= q^3x^{-2}yxyx^3y^{-6} = q^4x^{-1}yyx^3y^{-6} = q^6x^0yyx^2y^{-6} = q^6yyx^2y^{-6}\\
&= q^{10}x^2y^{-4}
\end{aligned}$$

que es una combinación lineal de elementos de la base.

c) Dado V un espacio vectorial y una base numerable $\{v_i \mid i \in I\}$ para V, el **álgebra de Grassmann** (o exterior) es el álgebra $E(V)$ asociativa generada por los $\{v_i \mid i \in I\}$ y con la relación

$$v_iv_j + v_jv_i = 0, \quad i,\ j \in I,$$

es decir, $E(V)$ es isomorfa al cociente ${}^{K\langle \mathbf{X}\rangle}\Big/_{\langle x_ix_j+x_jx_i\rangle}$ con $\mathbf{X} = \{x_i \mid i \in I\}$.

Note que la base de $E(V)$ es de la forma

$$\{v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_n} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_n,\ \ i_1, i_2, \cdots, i_n \in I\},$$

permita que $x = v_{i_1}$, $y = v_{i_2}$, $z = v_{i_3}$ por comodidad para las primeras tres variables. Una base para un álgebra asociativa sobre V es la siguiente

$$\begin{aligned}
&\{1,\ x,\ y,\ z,\ xy,\ yx,\ xz,\ zx,\ yz,\ zy,\ x^2,\ y^2,\ z^2,\ x^2y,\ yx^2,\ xyx,\ xy^2,\ y^2x,\ yxy,\\
&x^2z,\ zx^2,\ xzx,\ xz^2,\ z^2x,\ zxz,\ y^2z,\ zy^2,\ yzy,\ yz^2,\ z^2y,\ zyz,\ xyz,\ xzy,\ yxz,\ yzx,\\
&zxy,\ zyx,\ x^3,\ y^3,\ z^3, \cdots\},
\end{aligned}$$

de acuerdo con la relación $xy+yx = 0$, se establece la base $B = \{x,\ y,\ z,\ xy,\ xz,\ yz,\ xyz\cdots\}$ para $E(V)$.

Generalizando, un elemento cualquiera de la forma $v_{i_s}\cdots v_{i_n}\cdots v_{i_1}\cdots v_{i_t}$ donde s y t son enteros positivos entre 1 y n, puede ordenarse de la forma

$$(-1)^p v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_n}; \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_n,\ \ i_1, i_2, \cdots, i_n \in I,$$

donde p es un entero positivo que representa la cantidad de transposiciones necesarias para hacer tal cambio. Dichas transposiciones se deben por supuesto a la relación

$$v_i v_j + v_j v_i = 0, \quad i,\ j \in I.$$

Así, la base B de $E(V)$ es de la forma

$$B = \{v_{i_1} v_{i_2} \cdots v_{i_n} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_n,\ \ i_1, i_2, \cdots, i_n \in I\}.$$

d) Si V está dotada de una forma bilineal simétrica $\langle\ ,\ \rangle$ el **álgebra de Clifford** de V es generada por la base de V y la siguiente relación

$$v_i v_j + v_j v_i = \langle v_i,\ v_j \rangle, \quad i,\ j \in I.$$

1.1.4. Álgebras de Lie.

Definición 1.1.26. Un **álgebra de Lie** A, es un álgebra tal que para todo $a,\ b,\ c \in A$ cumple los siguientes axiomas:

L1. $a \cdot a = 0$ **(anticonmutatividad),**

L2. $a \cdot b \cdot c\ +\ b \cdot c \cdot a\ +\ c \cdot a \cdot b = 0$ **(identidad de Jacobi).**

Definición 1.1.27. Un subespacio S de un álgebra de Lie A es una **subálgebra** de A, si se cumple que $a \cdot b \in S$, donde $a, b \in S$

Ejemplo 1.1.28.

1. $S\ell_n(K)$ con multiplicación $[x,y] =\ xy\ -\ yx$, donde xy es el producto usual de matrices, es un álgebra de Lie.
2. $O_n(K)$ con multiplicación $[x,y] =\ xy\ -\ yx$, donde xy es el producto usual de matrices, es un álgebra de Lie.
3. Sea el álgebra cuyo espacio vectorial subyacente es $V = \mathrm{Span}_K\{A, B\}$ y con multiplicación

$\cdot$	A	B
A	0	A
B	$-A$	0

es un álgebra de Lie.

A continuación se verifica **L1** y **L2**. Tome $u,\ v,\ w \in V$ tal que:

$$u = a_1 A + b_1 B,\ \ v = a_2 A + b_2 B,\ \ w = a_2 A + b_2 B, \quad \text{con} \quad a_i, b_i \in K, \quad i = 1, 2.$$

Observe que se cumple **L1**,

$$\begin{aligned} u \cdot u &= (a_1 A + b_1 B)(a_1 A + b_1 B) = a_1^2 \cancelto{0}{A \cdot A} + a_1 b_1 A \cdot B + a_1 b_1 B \cdot A + b_1^2 \cancelto{0}{B \cdot B} \\ &= a_1 b_1 A - a_1 b_1 A = 0. \end{aligned}$$

Para **L2** se tiene,

$$
\begin{aligned}
u\cdot v &= (a_1A+b_1B)(a_2A+b_2B) = a_1a_2\cancelto{0}{A\cdot A}+a_1b_2A\cdot B+a_2b_1B\cdot A+b_1b_2\cancelto{0}{B\cdot B}\\
&= a_1b_2A-a_2b_1A=(a_1b_2-a_2b_1)A.\\
v\cdot w &= (a_2A+b_2B)(a_3A+b_3B) = a_2a_3\cancelto{0}{A\cdot A}+a_2b_3A\cdot B+a_3b_2B\cdot A+b_2b_3\cancelto{0}{B\cdot B}\\
&= a_2b_3A-a_3b_2A=(a_2b_3-a_3b_2)A.\\
w\cdot u &= (a_3A+b_3B)(a_1A+b_1B) = a_1a_3\cancelto{0}{A\cdot A}+a_3b_1A\cdot B+a_1b_3B\cdot A+b_1b_3\cancelto{0}{B\cdot B}\\
&= a_3b_1A-a_1b_3A=(a_3b_1-a_1b_3)A.
\end{aligned}
$$

haciendo los demás productos se obtiene,

$$
\begin{aligned}
(u\cdot v)\cdot w &= (a_1b_2-a_2b_1)A\cdot(a_3A+b_3B)\\
&= (a_1a_3b_2-a_2a_3b_1)\cancelto{0}{A\cdot A}+\ (a_1b_2b_3-a_2b_1b_3)A\cdot B\\
&= (a_1b_2b_3-a_2b_1b_3)A.\\
(v\cdot w)\cdot u &= (a_2b_3-a_3b_2)A\cdot(a_1A+b_1B)\\
&= (a_1a_2b_3-a_1a_3b_2)\cancelto{0}{A\cdot A}+\ (a_2b_1b_3-a_3b_1b_2)A\cdot B\\
&= (a_2b_1b_3-a_3b_1b_2)A.\\
(w\cdot u)\cdot v &= (a_3b_1-a_1b_3)A\cdot(a_2A+b_2B)\\
&= (a_2a_3b_1-a_1a_2b_3)\cancelto{0}{A\cdot A}+\ (a_3b_1b_2-a_1b_2b_3)A\cdot B\\
&= (a_3b_1b_2-a_1b_2b_3)A.
\end{aligned}
$$

Por último, $(u\cdot v)\cdot w+(v\cdot w)\cdot u+(w\cdot u)\cdot v=0$. ■

4. Dada A un álgebra asociativa, si se define la operación $[x,y]=xy-yx$ para todo $x,\ y$ en A conocida como el **corchete de Lie**, entonces esta álgebra dotada de dicho producto es un álgebra de Lie y se denota por $A^{(-)}$.

   Observación 1.1.29. A continuación se verifica que si sobre A se define la operación $[x,y]=xy-yx$ para todo $x,\ y$ en A, entonces A cumple **L1** y **L2**. Oberve que dados $x,\ y,\ z\ \in A$, luego:

   $[\ x\ ,\ x\ ]=xx\ -\ xx=0.$

   Ahora observe que:

   - $[\ [\ x\ ,\ y\ ]\ ,\ z\ ]=[\ xy-yx\ ,\ z\ ]=(xy-yx)z-z(xy-yx)=(xy)z-(yx)z-z(xy)+z(yx).$
   - $[\ [\ y\ ,\ z\ ]\ ,\ x\ ]=[\ yz-zy\ ,\ x\ ]=(yz-zy)x-x(yz-zy)=(yz)x-(zy)x-x(yz)+x(zy).$
   - $[\ [\ z\ ,\ x\ ]\ ,\ y\ ]=[\ zx-xz\ ,\ y\ ]=(zx-xz)y-y(zx-xz)=(zx)y-(xz)y-y(zx)+y(xz).$

   De lo anterior se tiene :

   $[\ [\ x\ ,\ y\ ]\ ,\ z\ ]+[\ [\ y\ ,\ z\ ]\ ,\ x\ ]+[\ [\ z\ ,\ x\ ]\ ,\ y\ ]$
   $=(xy)z-(yx)z-z(xy)+z(yx)+(yz)x-(zy)x-x(yz)+x(zy)+(zx)y-(xz)y-y(zx)+y(xz)$
   $=0.$

5. El espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con suma usual y producto cruz

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

es una álgebra de Lie.

A continuación se verifican **L1** y **L2**. Note para **L1**:

$$\vec{a}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=(a_2a_3-a_3a_2)\hat{i}+(a_3a_1-a_1a_3)\hat{j}+(a_1a_2-a_2a_1)\hat{k}=0$$

Para **L2**, observe lo siguiente:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}$$

$$\vec{b}\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}=(b_2c_3-b_3c_2)\hat{i}+(b_3c_1-b_1c_3)\hat{j}+(b_1c_2-b_2c_1)\hat{k}$$

$$\vec{c}\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ c_1 & c_2 & c_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=(a_3c_2-a_2c_3)\hat{i}+(a_1c_3-a_3c_1)\hat{j}+(a_2c_1-a_1c_2)\hat{k}$$

Después se tiene:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ (a_2b_3-a_3b_2) & (a_3b_1-a_1b_3) & (a_1b_2-a_2b_1)\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=[a_3b_1c_3-a_1b_3c_3-a_1b_2c_2+a_2b_1c_2]\,\hat{i}+[a_1b_2c_1-a_2b_1c_1-a_2b_3c_3+a_3b_3c_3]\,\hat{j}\\ &\quad+[a_2b_3c_2-a_3b_2c_2-a_3b_1c_1+a_1b_3c_1]\,\hat{k}\end{aligned}$$

$$(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ (b_2c_3-b_3c_2) & (b_3c_1-b_1c_3) & (b_1c_2-b_2c_1)\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=[a_3b_3c_1-a_3b_1c_3-a_2b_1c_2+a_2b_2c_1]\,\hat{i}+[a_1b_1c_2-a_1b_2c_1-a_3b_2c_3+a_3b_3c_2]\,\hat{j}\\ &\quad+[a_2b_2c_3-a_2b_3c_2-a_1b_3c_1+a_1b_1c_3]\,\hat{k}\end{aligned}$$

$$(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ (a_3c_2-a_2c_3) & (a_1c_3-a_3c_1) & (a_2c_1-a_1c_2)\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}&=[a_1b_3c_3-a_3b_3c_1-a_2b_2c_1+a_1b_2c_2]\,\hat{i}+[a_2b_1c_1-a_1b_1c_2-a_3b_3c_2+a_2b_3c_3]\,\hat{j}\\ &\quad+[a_3b_2c_2-a_2b_2c_3-a_1b_1c_3+a_3b_1c_1]\,\hat{k}.\end{aligned}$$

Así se observa que $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}\,+\,(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}\,+\,(\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}=0.$ ■

6. En el Ejemplo 1.1.3, se pudo evidenciar que $UT_n(K)$ es álgebra. En ese sentido, teniendo en cuenta la Observación 1.1.29, se puede afirmar que $UT_n(K)^{(-)}$ con multiplicación $[A,B]=AB-BA$ para todo A,B en $UT_n(K)^{(-)}$, es álgebra de Lie.

Proposición 1.1.30. Dada A un álgebra de Lie, para todo $a,\ b\in A$ se satisface:

i) $a\cdot a=0$ implica que $a\cdot b=-b\cdot a$.

ii) $a\cdot b=-b\cdot a$ implica que $a\cdot a=0$, si $\mathrm{Char}(K)\neq 2$.

Demostración.

i) $$\begin{aligned}0=(a+b)\cdot(a+b)&=\cancelto{0}{a\cdot a}+a\cdot b+b\cdot a+\cancelto{0}{b\cdot b}\\ &=a\cdot b+b\cdot a\end{aligned}$$

de donde, $\quad a\cdot b=-b\cdot a.$

ii) Si $a \cdot b = -b \cdot a$ en particular si $b = a$ se tiene que:

$$\begin{aligned} a \cdot a = -a \cdot a \qquad \text{esto es} \qquad a \cdot a + a \cdot a &= 0 \\ 2a \cdot a &= 0 \qquad\qquad (\mathrm{Char}(K) \neq 2) \\ \text{entonces,} \quad a \cdot a &= 0. \end{aligned}$$

■

Proposición 1.1.31. Dada A un álgebra de Lie, luego $[0,b] = 0$ para todo $b \in A$.

Demostración. $[0,b] = [\,(a-a)\,,\ b]$. Por la Definición 1.1.1, $[\,(a-a)\,,\ b] = [a,b]-[a,b] = 0$. ■

Definición 1.1.32. Dado un subespacio I de un álgebra de Lie A, I es llamado **ideal** de A si cumple que $a \in I$, $b \in A$ entonces $[a,b] \in I$.

Observación 1.1.33. En la definición anterior no es necesario hablar de ideal por izquierda o derecha puesto que en álgebras de Lie se tiene que $[a,b] = (ab - ba) = -(ba - ab) = -[b,a]$, como I es subespacio entonces $[b,a] \in I$. Esto implica que $[a,b] \in I$ se pueda escribir como $[b,a] \in I$.

Definición 1.1.34. Sean A y B álgebras de Lie. Una transformación lineal $\varphi : A \to B$ es llamada **homomorfismo de álgebras de Lie** si $\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$ para todo $a, b \in A$. Si $\mathrm{Ker}(\varphi) = 0$ se dice que φ es inyectivo. Si $\mathrm{Im}(\varphi) = B$ entonces φ es sobreyectivo. Se llama isomorfismo si φ es inyectivo y sobreyectivo a la vez.

Proposición 1.1.35. Si $\varphi : A \to B$ es homomorfismo de álgebras de Lie, entonces $\mathrm{Ker}(\varphi)$ es ideal de A e $\mathrm{Im}(\varphi)$ es subalgebra de B.

Demostración. Si $a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, $b \in A$ se quiere ver que $[a,b] \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

$$\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)] = [0, \varphi(b)] = 0.$$

Por lo tanto $\varphi([a,b]) = 0$, es decir $[a,b] \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Ahora, observe que $\mathrm{Im}(\varphi)$ es subálgebra de B.
Dados $k \in K$, $a, b \in A$:

$$\varphi([a,b]) = [\varphi(a), \varphi(b)] \in \mathrm{Im}(\varphi)$$

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b) \in \mathrm{Im}(\varphi)$$

$$\varphi(ka) = k\varphi(a) \in \mathrm{Im}.$$

En conclusión $\mathrm{Im}(\varphi)$ es subálgebra de B. ■

Definición 1.1.36. Similar a la Observación 1.1.9, dada A un álgebra de Lie y un ideal $I \subseteq A$. El ideal I determina una relación de equivalencia sobre A. El conjunto de todas las clases de equivalencia se denota por A/I. $\pi : A \longrightarrow A/I$ es la función canónica sobreyectiva tal que:

$$\begin{array}{rccc} \pi : & A & \longrightarrow & A/I \\ & a & \longrightarrow & \overline{a}. \end{array}$$

Proposición 1.1.37. Dados $k \in K$, a, c en el cociente A/I, las siguientes operaciones se encuentran bien definidas.

- $\overline{a} + \overline{c} = \overline{a + c}$.
- $[\overline{a}, \overline{c}] = \overline{[a, c]}$.
- $k\overline{a} = \overline{ka}$.

Demostración.

- Sea $a' \equiv a$ y $c' \equiv c$, entonces $\overline{a'} \equiv \overline{a}$ y $\overline{c'} \equiv \overline{c}$. Se quiere ver que $a' + c' = a + c$, es decir que $\overline{a' + c'} = \overline{a + c}$.

  Como $a' \equiv a$ y $c' \equiv c$, entonces $a' - a \in I$ y $c' - c \in I$. Ahora considere la siguiente suma en I:

  $(a' - a) + (c' - c) \in I$, luego $a' + c' - (a + c) \in I$, lo que implica que $a' + c' \equiv a + c$, es decir $\overline{a' + c'} = \overline{a + c}$.
- Sea $\overline{a} = \overline{a'}$ y $\overline{c} = \overline{c'}$, luego se puede escribir $a' = a + b$ con $b \in I$ y $c' = c + d$ con $d \in I$. Ahora note que: $[a', c'] = [a+b, c+d] = [a, c] + [b, c] + [a, d] + [b, d]$. Dado que $[b, c] + [a, d] + [b, d] \in I$ entonces $[a', c'] = [a, c] + \alpha$ con $\alpha \in I$, lo que permite concluir que $\overline{[a', c']} = \overline{[a, c]}$.
- Sea $a' \equiv a$, esto significa que $a' - a \in I$, se quiere ver que $\overline{ka'} = \overline{ka}$.

  Note que $ka' - ka \in I$, así pues $ka' \equiv ka$. Esto es $\overline{ka'} = \overline{ka}$.

$\blacksquare$

Proposición 1.1.38. Sea φ un homomorfismo de álgebras de Lie tal que $\varphi : A \to B$ y sea W un ideal de A con $W \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi)$, entonces existe un único homomorfismo de álgebras de Lie $\overline{\varphi} : A/W \longrightarrow B$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & B \\ & A/W \arrow[u, dashed, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. Defina $\overline{\varphi} : A/W \longrightarrow B$ tal que $\overline{\varphi}(\overline{a}) = \varphi(a)$ para todo $x \in A$. Observe que:

- $\overline{\varphi}$ está bien definida: Dado $a' \in \overline{a}$ entonces $a' \equiv a \bmod W$, esto es $a' - a \in W$, lo que implica que $\varphi(a' - a) = \varphi(a') - \varphi(a) = 0$, por lo tanto $\varphi(a') = \varphi(a)$. En conclusión, $\overline{\varphi}(\overline{a'}) = \overline{\varphi}(a)$.

- $\overline{\varphi}$ es homomorfismo: Dados $\overline{a}$ y $\overline{c} \in A/W$ y $k_1, k_2 \in K$. Note que:
  $\overline{\varphi}(k_1\overline{a} + k_2\overline{c}) = \overline{\varphi}(\overline{k_1 a + k_2 c}) = \varphi(k_1 a + k_2 c) = \varphi(k_1 a) + \varphi(k_2 c) = k_1\varphi(a) + k_2\varphi(c) = k_1\overline{\varphi}(\overline{a}) + k_2\overline{\varphi}(\overline{c})$.

  Observe que $\overline{\varphi}$ separa productos:
  $\overline{\varphi}([\overline{a},\overline{c}]) = \overline{\varphi}(\overline{[a,c]}) = \varphi([a,c]) = [\varphi(a),\varphi(c)] = [\overline{\varphi}(\overline{a}),\overline{\varphi}(\overline{c})]$.
- Diagrama conmuta:
  $\varphi(a) = \overline{\varphi}\pi(a) = \overline{\varphi}(\pi(a)) = \overline{\varphi}(\overline{a}) = \varphi(a)$ para todo $a \in A$. Por lo tanto, $\varphi = \overline{\varphi}\pi$.
- $\overline{\varphi}$ es único: Suponga que $\psi : A/W \longrightarrow B$ tal que $\psi\pi = \varphi$. Se quiere ver que $\psi = \overline{\varphi}$, es decir, $\psi(\overline{a}) = \overline{\varphi}(\overline{a})$, para todo $a \in A$.
  Se sabe que $\overline{\varphi}(\overline{a}) = \overline{\varphi}(\pi(a)) = \varphi(a) = \psi\pi(a) = \psi(\overline{a})$.

■

Teorema 1.1.39 (Primer Teorema de Isomorfismo). Suponga que φ es un homomorfismo tal que $\varphi : A \to B$. Entonces $\mathrm{Im}(\varphi) \cong A/\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Demostración. Por proposición 1.1.38, existe un único homomorfismo

$$\overline{\varphi} : A/\mathrm{Ker}(\varphi) \to \mathrm{Im}(\varphi)$$

tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathrm{Im}(\varphi) \\ & A/\mathrm{Ker}(\varphi) \arrow[u, dashed, tail, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

se quiere ver que $\overline{\varphi}$ es inyectivo y sobreyectivo.

- $\overline{\varphi}$ es inyectivo: Dado $\overline{a} \in \mathrm{Ker}(\overline{\varphi})$, se tiene que:
  $0 = \overline{\varphi}(\overline{a}) = \overline{\varphi}(\pi(a)) = \varphi(a)$, entonces $a \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, pero $\mathrm{Ker}(\varphi) = \overline{0}$, osea que $a \in \overline{0}$, es decir que $\overline{a} = \overline{0}$.
- $\overline{\varphi}$ es sobreyectivo: Dado $b \in \mathrm{Im}(\varphi)$, por definición existe $a \in A$ tal que $\varphi(a) = b$, pero se sabe que $\varphi(a) = (\overline{\varphi}\pi)(a) = \overline{\varphi}(\pi(a))$, entonces existe $c = \pi(a) \in A/\mathrm{Ker}(\varphi)$ tal que $\overline{\varphi}(\overline{c}) = a$.

■

Corolario 1.1.40. Suponga φ un homomorfismo tal que $\varphi : A \to B$. Entonces existe un único homomorfismo inyectivo $\overline{\varphi} : A/\mathrm{Ker}(\varphi) \to B$.

Demostración. La prueba de este corolario es inmediata por el Teorema 1.1.39. ■

Lema 1.1.41. Sean I, J ideales de A, tal que $I \subseteq J$. Sea $\pi : A \to A/I$, entonces $\pi(J)$ es ideal de A/I.

Prueba. Dados $\overline{a} \in \pi(J)$ y $\overline{c} \in A/I$, se quiere ver que $[\overline{a}, \overline{c}] \in \pi(J)$.

Puesto que $\overline{a} \in \pi(J)$ y $\overline{c} \in A/I$, luego existe $c \in A$ tal que $\pi(c) = \overline{c}$. Como $\overline{a} \in \pi(J)$ entonces existe $a \in J$ tal que $\pi(a) = \overline{a}$. Dado que J es ideal de A entonces $[a, c] \in J$, lo que implica que $\pi([a, c]) \in \pi(J)$ pero $\pi([a, c]) = [\pi(a), \pi(c)] = [\overline{a}, \overline{c}]$, osea que $[\overline{a}, \overline{c}] \in \pi(J)$. ■

Observación 1.1.42. Note que $\pi(J) \cong J/I$.

De acuerdo con el Teorema 1.1.39, tome $\mathrm{Im}(\pi) = \pi(J)$ y $\mathrm{Ker}(\pi) = I \subseteq J$. Entonces se tiene que:

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[dr, "h"'] & \pi(J) \\ & J/I \arrow[u, dashed, hook, two heads, "\overline{\pi}"'] \end{tikzcd}$$

donde $h : J \to J/I$, es función canónica sobreyectiva.

Teorema 1.1.43 (**Segundo Teorema de Isomorfismo**)**.** Suponga $I \subseteq J$ son ideales de A, luego J/I es ideal de A/I y $A/I \big/ J/I \cong A/J$.

Prueba. Dados $\overline{b} \in J/I$, $\overline{a} \in A/I$, luego $b \in J$ y $a \in A$. Puesto que J es ideal de A entonces $ba \in J$, por lo tanto $\overline{ba} \in J/I$.

A continuación, se prueba que $J/I \cong A/J$. Para ello, se define el homomorfismo canónico $\pi : A \to A/I$. Por la Observación 1.1.42, se tiene el homomorfismo $\pi' : A/I \to A/I \big/ \pi(J)$. Sea $\varphi = \pi\pi'$. Observe que φ esta bien definida porque π' y π se encuentran bien definidas, dado que π y π' son sobreyectivas, entonces φ también es sobreyectiva, lo que implica que $\mathrm{Im}\varphi = A/I \big/ \pi(J)$.

Por último, note que $\mathrm{Ker}(\varphi) = J$.

$\supseteq$) Dado $b \in J$, se quiere ver que $b \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Es decir $\varphi(b) = 0$. Si $b \in J$ entonces $\pi(b) \in \pi(J)$, osea que $\overline{\pi(b)} = \overline{0}$, por lo anterior se tiene que: $\varphi(b) = \pi'\pi(b) = \pi'(\pi(b)) = \overline{\pi(b)}$, pero $\overline{\pi(b)} = \overline{0}$ entonces $b \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. Es decir, $J \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$.

$\subseteq$) Sea $b \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, se quiere ver que $b \in J$. Si $b \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ entonces

$$0 = \varphi(b) = \pi'\pi(b) = \pi'(\pi(b)),$$

luego $\pi(b) \in \mathrm{Ker}(\pi')$ pero $\mathrm{Ker}(\pi') = \pi(J)$. Así pues, existe $a \in J$ tal que $\pi(a) = \pi(b)$ pero π es homomorfismo, entonces $\pi(a) - \pi(b) = \overline{0}$. De donde, $\pi(a - b) = \overline{0}$, es decir $a - b \in \mathrm{Ker}(\pi) = I \subseteq J$, como $a \in J$ entonces $b \in J$, pues $a - b \in I$, así mismo $b - a \in I$, además si se suma a entonces $b - a + a = b \in J$. Por lo anterior, $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq J$. En ese sentido, se puede concluir entonces que $\mathrm{Ker}(\varphi) = J$.

De acuerdo con el Teorema 1.1.39, el siguiente diagrama donde $h : A \to A/J$ y $\overline{\varphi}$ es isomorfismo único, conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[dr, "h"'] & A/I\big/J/I \\ & A/J \arrow[u, dashed, two heads, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

así, $A/I\big/J/I \cong A/J$. ∎

Teorema 1.1.44 (**Tercer Teorema de Isomorfismo**)**.** Si I, J son ideales de A. $(I+J)\big/J \cong I\big/(I\cap J)$.

Prueba. Dados i, π tal que $i : I \to I+J \quad$ y $\quad \pi : I+J \to (I+J)\big/J$. Tome $\varphi = \pi i$, se quiere ver que $\operatorname{Im}(\varphi) = (I+J)\big/J$ y que $\operatorname{Ker}(\varphi) = I \cap J$.

Acontinuación, observe que $\operatorname{Ker}(\varphi) = I \cap J$:

$\supseteq$) Sea $a \in I \cap J$ entonces $a \in J = \operatorname{Ker}(\varphi)$, luego $\varphi(a) = \pi i(a) = \pi(i(a)) = \pi(a)$ puesto que $a \in \operatorname{Ker}(\pi)$ entonces $\pi(a) = \overline{0}$. Por lo tanto, $a \in \operatorname{Ker}(\varphi)$. Es decir, $I \cap J \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi)$.
$\subseteq$) Sea $a \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, directamente $\operatorname{Ker}(\varphi) \subseteq I$. Ahora observe que $\operatorname{Ker}(\varphi) \subseteq J$. Dado $a \in \operatorname{Ker}(\varphi)$ entonces $0 = \varphi(a) = \pi(i(a)) = \pi(a)$. Por lo tanto, $a \in \operatorname{Ker}(\pi) = J$. Así $a \in J$, en conclusión $\operatorname{Ker}(\varphi) \subseteq I \cap J$. Puesto que se tiene la doble contenencia entonces $\operatorname{Ker}(\varphi) = I \cap J$.

Por último se quiere mostrar que $\operatorname{Im}(\varphi) = (I+J)\big/J$, es decir que φ es sobreyectiva.

Sea $c \in (I+J)\big/J$, como π es sobreyectiva, existen $a \in J$ y $b \in I$ tal que $c = (a+b)+J$. Pero $a+J = J$ (pues $a \in J$) entonces $c = b+J$. En particular: $\varphi(b) = \pi i(b) = \pi(i(b)) = \pi(b) = b+J = c$, esto es φ es sobreyectiva.

En ese sentido, por el Teorema 1.1.39 el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[dr, "h"'] & (I+J)/J \\ & I/(I\cap J) \arrow[u, dashed, two heads, "\overline{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

y se tiene que $(I+J)\big/J \cong I\big/(I\cap J)$. ∎

1.2. PI-álgebras

1.2.1. Identidades polinomiales.

Dados $\boldsymbol{X} = \{x_1,\ x_2, \cdots\}$ un conjunto de variable y $K\langle \boldsymbol{X}\rangle$ el álgebra libre asociativa sobre $\boldsymbol{X}$.

Definición 1.2.1. Sea $f = f(x_1, \cdots, x_n) \in K\langle X\rangle$ un polinomio y sea A un álgebra asociativa. Se dice que $f \equiv 0$ es una **identidad polinomial** para A si:

$$f(a_1, \cdots, a_n) = 0, \quad \text{para todo} \quad a_1, \cdots, a_n \in A.$$

Definición 1.2.2. Si un álgebra A satisface alguna identidad polinomial no trivial (es decir, $f \neq 0$) entonces A es una **PI-álgebra**.

Ejemplo 1.2.3.

1. Sea A un álgebra conmutativa. Entonces A es una PI-álgebra porque satisface la identidad polinomial
$$f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1 = [x_1, x_2],$$
pues $f(a_1, a_2) = a_1a_2 - a_2a_1 = a_1a_2 - a_1a_2 = 0$.

2. Si A es un álgebra de dimensión $\dim(A) < n$ entonces A satisface la **identidad estándar de grado** n
$$s_n(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in s_n} (\text{sgn } \sigma)\ x_{\sigma(1)}\ x_{\sigma(2)} \cdots\ x_{\sigma(n)},$$

Caso $n = 2$: $\Longrightarrow s_2 = \{e,\ (1\ 2)\}$
$$\begin{aligned} s_2(x_1, x_2) &= \sum_{\sigma \in s_2} (\text{sgn } \sigma)\ x_{\sigma(1)}\ x_{\sigma(2)} \\ &= x_1x_2 - x_2x_1, \end{aligned}$$
note que $\dim(A) = 1 \implies a_1 = ka_2$ para todo $a_1,\ a_2 \in A$, luego
$$\begin{aligned} s_2(a_1, a_2) = a_1a_2 - a_2a_1 &= a_1(ka_1) - (ka_1)a_1 \\ &= ka_1^2 - ka_1^2 = 0. \end{aligned}$$

Caso $n = 3$: $\Longrightarrow s_3 = \{e,\ (1\ 2),\ (1\ 3),\ (2\ 3),\ (1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2)\}$
$$s_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 - x_2x_1x_3 - x_3x_2x_1 - x_1x_3x_2 + x_3x_1x_2 + x_2x_3x_1.$$
Dado que $\dim(A) = 2$, sea $\{e_1,\ e_2\}$ una base de A, luego
$$\begin{aligned} s_3(e_1, e_2, \alpha e_1 + \beta e_2) &= e_1e_2(\alpha e_1 + \beta e_2) - e_2e_1(\alpha e_1 + \beta e_2) - (\alpha e_1 + \beta e_2)e_2e_1 \\ &\quad - e_1(\alpha e_1 + \beta e_2)e_2 + (\alpha e_1 + \beta e_2)e_1e_2 + e_2(\alpha e_1 + \beta e_2)e_1 \\ &= \alpha e_1e_2e_1 + \beta e_1e_2^2 - \alpha e_2e_1^2 - \beta e_2e_1e_2 - \alpha e_1e_2e_1 - \beta e_2^2e_1 \\ &\quad - \alpha e_1^2e_2 - \beta e_1e_2^2 + \alpha e_1^2e_2 + \beta e_2e_1e_2 + \alpha e_2e_1^2 + \beta e_2^2e_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$
Note además que:
$s_3(e_1, e_2, \alpha e_1 + \beta e_2) = \alpha s_3(e_1, e_2, e_1) + \beta s_3(e_1, e_2, e_2) = 0 + 0 = 0.$

Este resultado se puede extender para cualesquiera tres elementos de A. En general,

$$\begin{aligned} s_n(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n) &= s_n\left(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \; s_n(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De hecho, A también satisface **la identidad de Capelli**, esto es:

$$d_n(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n) = \sum_{\sigma \in s_n} (\operatorname{sgn} \sigma) \; y_1 x_{\sigma(1)} \; y_2 x_{\sigma(2)} \cdots y_n x_{\sigma(n)},$$

Observe que:

$$d_n(a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n, b_1, \cdots, b_n) = d_n\left(a_1, \cdots, a_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i a_i, \; b_1, \cdots, b_n\right) = 0.$$

3. El álgebra de Grassmann $E(V)$ satisface la identidad polinomial

$$[x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3] \equiv 0.$$

A continuación, se quiere ver que $[r_1, r_2, r_3] = 0$ para todo $r_1, r_2, r_3 \in E(V)$.

$$\begin{aligned} [r_1, r_2] &= [v_{i_1} \cdots v_{i_m}, \; v_{j_1} \cdots v_{j_n}] \\ &= v_{i_1} \cdots v_{i_m} v_{j_1} \cdots v_{j_n} \; - \; v_{j_1} \cdots v_{j_n} v_{i_1} \cdots v_{i_m} \\ &= v_{i_1} \cdots v_{i_m} v_{j_1} \cdots v_{j_n} \; - \; (-1)^{nm} v_{i_1} \cdots v_{i_m} v_{j_1} \cdots v_{j_n} \\ &= (1 - (-1)^{nm}) v_{i_1} \cdots v_{i_m} v_{j_1} \cdots v_{j_n} \qquad\qquad n, \; m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Note que si nm es par, entonces $[r_1, r_2, r_3] = 0$. Si nm es impar, entonces tanto n y m son impares, por lo que

$$[r_1, r_2] = 2 \underbrace{v_{i_1} \cdots v_{i_m} v_{j_1} \cdots v_{j_n}}_{\text{tiene longitud par}},$$

luego $[r_1, r_2, r_3] = [[r_1, r_2], r_3] = (1 - (-1)^{(n+m)l}) v_{i_1} \cdots v_{i_m} v_{j_1} \cdots v_{j_n} v_{k_1} \cdots v_{k_l} = 0.$ ■

4. $M_2(K)$ cumple la **Identidad de Hall**

$$[[x_1, x_2]^2, x_3] \equiv 0.$$

Sea $A \in M_2$, el polinomio característico de A es

$$p(x) = \; x^2 \; - \; \operatorname{tr}(A) \; x \; + \; \det(A),$$

por teorema de Cayley-Hamilton $p(A)$=0. Esto es

$$A^2 \; - \; \mathrm{tr}(A)\, A \; + \; \det(A)\, I = 0.$$

Sean $A_1, A_2 \in M_2(K) \implies [A_1, A_2] = A_1A_2 - A_2A_1$ y,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}([A_1, A_2]) &= \mathrm{tr}(A_1A_2 - A_2A_1) = \mathrm{tr}(A_1A_2) - \mathrm{tr}(A_2A_1) \\ &= \mathrm{tr}(A_1A_2) - \mathrm{tr}(A_1A_2) = 0. \end{aligned}$$

Sea $A = [A_1, A_2] \implies \mathrm{tr}(A) = 0$ se tiene entonces que

$$A^2 = -\det(A)\, I = k\, I \quad \implies \quad A^2 \text{ es una matriz escalar,}$$

el corchete de Lie cuando una de las matrices es escalar es el siguiente:

$$[A^2,\; A_3] = [k\, I,\; A_3] = k\, I \cdot A_3 - A_3 \cdot k\, I = k(A_3 - A_3) = 0.$$

5. El álgebra $M_n(K)$ satisface la **identidad de la algebricidad**:

$$d_{n+1}(1, x, x^2, \cdots, x^n, 1, y_1, \cdots, y_n, 1) = \sum_{\sigma \in s_{n+1}} (\mathrm{sgn}\ \sigma)\, x^{\sigma(0)} y_1\, x^{\sigma(1)} y_2 \cdots y_n x^{\sigma(n)} \equiv 0,$$

donde $\sigma \in s_{n+1}$ actúa en el conjunto $\{0,\ 1, \cdots,\ n\}$.
Sugerencia: Usando el teorema de Cayley-Hamilton se puede mostrar que $1,\ x,\ x^2, \ldots,\ x^n$ forman un conjunto linealmente dependiente.

6. El álgebra de Lie $UT_n(K)^{(-)}$ cumple la siguiente identidad:

$$[[x_1, x_2], \cdots, [x_{2n-1}, x_{2n}]] \equiv 0.$$

Observe para $n = 2$, es decir matrices 2x2. Si $n = 2$ entonces $2n - 1 = 2(2) - 1 = 3$ y $2n = 4$. Teniendo en cuenta lo anterior, considere las siguientes matrices:

$$x_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix} \qquad x_4 = \begin{pmatrix} a_4 & b_4 \\ 0 & c_4 \end{pmatrix}$$

se quiere ver que: $[[\ x_1, x_2\ ],\ [\ x_3, x_4\ ]] = 0$.

$[\ x_1\ ,\ x_2\ ] = x_1x_2 - x_2x_1$ esto es:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1c_2 \\ 0 & c_1c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2a_1 & a_2b_1 + b_2c_1 \\ 0 & c_1c_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a_1b_2 + b_1c_2 - a_2b_1 - b_2c_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

así mismo : $[\ x_3\ ,\ x_4\ ] = x_3x_4 - x_4x_3$,

$$\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_4 & b_4 \\ 0 & c_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_4 & b_4 \\ 0 & c_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3 & b_3 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3a_4 & a_3b_4 + b_3c_4 \\ 0 & c_3c_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_4a_3 & a_4b_3 + b_4c_3 \\ 0 & c_4c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_3b_4 + b_3c_4 - a_4b_3 - b_4c_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

por último se quiere ver que:
$[[\ x_1\ ,\ x_2\ ]\ ,\ [\ x_3\ ,\ x_4\ ]] = [\ x_1x_2 - x_2x_1\ ,\ x_3x_4 - x_4x_3\ ] = 0$

$$[\ x_1x_2 - x_2x_1\ ,\ x_3x_4 - x_4x_3\ ] = \begin{pmatrix} 0 & a_1b_2 + b_1c_2 - a_2b_1 - b_2c_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a_3b_4 + b_3c_4 - a_4b_3 - b_4c_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} 0 & a_3b_4 + b_3c_4 - a_4b_3 - b_4c_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a_1b_2 + b_1c_2 - a_2b_1 - b_2c_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verificando para $n = 3$, matrices $3x3$. Si $n = 3$ entonces $2n - 1 = 5$ y $2n = 6$. Teniendo en cuenta las matrices:

$$x_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & d_1 & e_1 \\ 0 & 0 & f_1 \end{pmatrix} \qquad x_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & f_2 \end{pmatrix} \qquad x_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & f_3 \end{pmatrix}$$

$$x_4 = \begin{pmatrix} a_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & d_4 & e_4 \\ 0 & 0 & f_4 \end{pmatrix} \qquad x_5 = \begin{pmatrix} a_5 & b_5 & c_5 \\ 0 & d_5 & e_5 \\ 0 & 0 & f_5 \end{pmatrix} \qquad x_6 = \begin{pmatrix} a_6 & b_6 & c_6 \\ 0 & d_6 & e_6 \\ 0 & 0 & f_6 \end{pmatrix}$$

se quiere ver que: $[[\ x_1, x_2\ ]\ ,\ [\ x_3, x_4\ ]\ ,\ [\ x_5, x_6\ ]] = 0$. Note que:

$$[\ x_1\ , x_2\ ] = x_1x_2 - x_2x_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & d_1 & e_1 \\ 0 & 0 & f_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & f_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & d_2 & e_2 \\ 0 & 0 & f_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & d_1 & e_1 \\ 0 & 0 & f_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1d_2 & a_1c_2 + b_1e_2 + c_1f_2 \\ 0 & d_1d_2 & d_1e_2 + e_1f_2 \\ 0 & 0 & f_1f_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2a_1 & a_2b_1 + b_2d_1 & a_2c_1 + b_2e_1 + c_2f_1 \\ 0 & d_2d_1 & d_2e_1 + e_2f_1 \\ 0 & 0 & f_2f_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

$$[\ x_3\ , x_4\ ] = x_3x_4 - x_4x_3 = \begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & f_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & d_4 & e_4 \\ 0 & 0 & f_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & d_4 & e_4 \\ 0 & 0 & f_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & d_3 & e_3 \\ 0 & 0 & f_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_3a_4 & a_3b_4+b_3d_4 & a_3c_4+b_3e_4+c_3f_4 \\ 0 & d_3d_4 & d_3e_4+e_3f_4 \\ 0 & 0 & f_3f_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_4a_3 & a_4b_3+b_4d_3 & a_4c_3+b_4e_3+c_4f_3 \\ 0 & d_4d_3 & d_4e_3+e_4f_3 \\ 0 & 0 & f_4f_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B.$$

$$[\ x_5\ , x_6\ ] = x_5x_6 - x_6x_5\ = \begin{pmatrix} a_5 & b_5 & c_5 \\ 0 & d_5 & e_5 \\ 0 & 0 & f_5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_6 & b_6 & c_6 \\ 0 & d_6 & e_6 \\ 0 & 0 & f_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_6 & b_6 & c_6 \\ 0 & d_6 & e_6 \\ 0 & 0 & f_6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_5 & b_5 & c_5 \\ 0 & d_5 & e_5 \\ 0 & 0 & f_5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_5a_6 & a_5b_6+b_5d_6 & a_5c_6+b_5e_6+c_5f_6 \\ 0 & d_5d_6 & d_5e_6+e_5f_6 \\ 0 & 0 & f_5f_6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_6a_5 & a_6b_5+b_6d_5 & a_6c_5+b_6e_5+c_6f_5 \\ 0 & d_6d_5 & d_6e_5+e_6f_5 \\ 0 & 0 & f_6f_5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C.$$

En ese sentido:

$$[[\ x_1, x_2\ ]\ ,\ [\ x_3, x_4\ ]\ ,\ [\ x_5, x_6\ ]] = [\ A\ ,\ B\ ,\ C\ ] = [\ [\ A\ ,\ B\ ]\ ,\ C\ ] = [\ A\ ,\ B\ ]\cdot C - C\cdot [\ A\ ,\ B\ ]$$

observe que:

$$[\ A\ ,\ B\ ] = AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{12}b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_{12}a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{12}b_{23} - b_{12}a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

así pues:

$$[A, B, C] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{12}b_{23} - b_{12}a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{12}b_{23} - b_{12}a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

observe que en $[\ [\ x_1\ ,\ x_2\ ]\ ,\ [\ x_3\ ,\ x_4\ ], \cdots, [\ x_{2n-1}\ ,\ x_{2n}\ ]]$, al operar $[\ x_i\ ,\ x_{i+1}\ ] = x_j$ con $1 \leq i \leq 2n-1$ (i número impar) y $1 \leq j \leq n$. Todo x_j posee ceros también en la diagonal principal. Posteriormente, se tiene $[\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3\ , \cdots, x_j\ , \cdots, x_n\ ]$ de tal forma que al aplicar el corchete de Lie de izquierda a derecha, es decir, $[\ [\cdots[\cdots[\ [\ x_1\ , x_2\ ]\ , x_3] \cdots x_j], \cdots x_{n-1}]\ ,\ x_n]$, en $[\ x_1\ , x_2\ ]$ se obtiene una matriz con ceros en la superdiagonal (por encima de la principal), de hecho, por cada operación del corchete de Lie de izquierda a derecha, se obtiene una matriz con ceros hasta la diagonal inmediatamente superior a la diagonal compuesta por ceros de la matriz obtenida en la operación anterior. Esto indica que al operar hasta la matriz x_{n-1}, se obtiene la matriz:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de tal forma que operando con x_n, se tiene: $[\ A'\ ,\ x_n\ ] = A'x_n - x_nA'$. Note que el resultado es cero:

$$A'x_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1(n-1)} & x_{1n} \\ 0 & 0 & x_{23} & \cdots & x_{2(n-1)} & x_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{3(n-1)} & x_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{4(n-1)} & x_{4n} \\ \vdots & & & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_nA' = \begin{pmatrix} 0 & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1(n-1)} & x_{1n} \\ 0 & 0 & x_{23} & \cdots & x_{2(n-1)} & x_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{3(n-1)} & x_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{4(n-1)} & x_{4n} \\ \vdots & & & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A'x_n - x_nA' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■

7. $UT_n(K)$, el conjunto de matrices triangulares superiores cumple la identidad polinomial

$$[x_1, x_2][x_3, x_4]\cdots[x_{2n-1}, x_{2n}] \equiv 0.$$

   Sugerencia: Para verificar lo anterior, se hace de forma similar al ejemplo donde se abordó la identidad polinomial para $UT_n(K)^{(-)}$.

8. $K\langle \boldsymbol{X} \rangle$, el álgebra libre no es PI-álgebra puesto que no satisface ninguna identidad polinomial.

9. Un álgebra A es **nil** de índice n si $a^n = 0$ para todo $a \in A$. Las álgebras nil son PI-álgebras, pues satisfacen la identidad $x^n \equiv 0$.

10. Un álgebra A es **nilpotente** de índice n si $a_1a_2\cdots a_n = 0$ para todo $a_1,\cdots,a_n \in A$. Las álgebras nilpotentes son PI- álgebras, pues satisfacen

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = x_1x_2\cdots x_n \equiv 0.$$

11. El álgebra de Lie generada por $\{a,\ b\}$ con producto $[a,\ b] = a$. Observe que

$$[[x_1,x_2],[x_3,x_4]] \equiv 0. \qquad \textbf{Identidad metabeliana}.$$

Para comprobar esto, se debe considerar cuando la característica del cuerpo es dos y cuando es diferente de dos.

- La característica del cuerpo es igual a dos ($\mathrm{Char}(K) = 2$).
Bajo esta consideración, el álgebra generada por $\{a,\ b\}$ es

$$A = \langle\{a,\ b\}\rangle = \{0,\ a,\ b,\ a+b\}$$

definiendo $[b,\ a] = a$ se tiene la siguiente tabla de multiplicación,

$[\ ,\ ]$	a	b
a	0	a
b	a	0

de esta manera, para cualquier combinación de elementos de A, se satisface la identidad metabeliana. Por ejemplo,

$$[[a+b,\ a],[b,\ a+b]] = [a,\ a] = 0.$$

- La característica del cuerpo es distinta a dos ($\mathrm{Char}(K) \neq 2$). De esta manera, se tiene

$$[a,\ a] = 0 \quad [a,\ b] = -[b,\ a]$$

obteniendo así la siguiente tabla de multiplicación,

$[\ ,\ ]$	a	b
a	0	a
b	$-a$	0

Sean $c_1 = \alpha_1a+\beta_1b,\ c_2 = \alpha_2a+\beta_2b,\ c_3 = \alpha_3a+\beta_3b,\ c_4 = \alpha_4a+\beta_4b$ elementos de $A = \langle\{a,\ b\}\rangle$, entonces

$$\begin{aligned}[[c_1,\ c_2],[c_3,\ c_4]] &= [[\alpha_1a+\beta_1b,\ \alpha_2a+\beta_2b],[\alpha_3a+\beta_3b,\ \alpha_4a+\beta_4b]]\\ &= [\alpha_1\beta_2[a,\ b]+\alpha_2\beta_1[b,\ a]\ \ ,\ \ \alpha_3\beta_4[a,\ b]+\alpha_4\beta_3[b,\ a]]\\ &= [\alpha_1\beta_2a-\alpha_2\beta_1a\ \ ,\ \ \alpha_3\beta_4a-\alpha_4\beta_3a]\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo anterior, la identidad se satisface en cualquier caso. ∎

Proposición 1.2.4. $f \in K\langle \boldsymbol{X}\rangle$ es una identidad polinomial para un álgebra A si y solo si f está en el kernel de todos los homomorfismos de $K\langle \boldsymbol{X}\rangle \to A$ ($\mathrm{Hom}(K\langle \boldsymbol{X}\rangle,\ A)$).

Demostración. $\Longrightarrow$) Si $f \in K\langle \boldsymbol{X} \rangle$ es una identidad polinomial para A, entonces se quiere ver que $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ con φ homomorfismo de $K\langle \boldsymbol{X} \rangle \to A$.

Sea $\Phi = \{\varphi_i \mid i \in I\}$ el conjunto de todos los homomorfismos de $K\langle \boldsymbol{X} \rangle \to A$ tal que

$$\varphi_i(x_j) = a_{ij}, \ \text{con } i \in I, \quad j = 1,\ 2 \cdots,$$

para cada $x_j \in \boldsymbol{X}$. Sea

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{l_1, \cdots, l_n} \alpha_{l_1 \cdots l_n} x_{l_1} \cdots x_{l_n},$$

note que $\varphi_i(f) = 0$ para todo $i \in I$.

$$\begin{aligned}
\varphi_i(f(x_1, \cdots, x_n)) = \varphi_i\left[\sum_{l_1, \cdots, l_n} \alpha_{l_1 \cdots l_n} x_{l_1} \cdots x_{l_n}\right] &= \sum_{l_1, \cdots, l_n} \alpha_{l_1 \cdots l_n} \varphi_i(x_{l_1}) \cdots \varphi_i(x_{l_n}) \\
&= f(\varphi_i(x_1), \cdots, \varphi_i(x_n)) \\
&= f(a_{i1}, \cdots, a_{in}) \\
&= 0. \qquad \text{Pues } f \text{ es identidad polinomial.}
\end{aligned}$$

De esta manera $f \in \bigcap_{\varphi \in \Phi} \mathrm{Ker}(\varphi)$.

$\Longleftarrow$) Si $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ para todo $\varphi \in \mathrm{Hom}(K\langle \boldsymbol{X} \rangle, A)$ se quiere ver que f es una identidad polinomial para A. Dado que por hipótesis $\varphi(f) = 0$ para todo $\varphi \in \Phi$, se tiene que:

$$0 = \varphi_i(f(x_1, \cdots, x_n)) = f(\varphi_i(x_1), \cdots, \varphi_i(x_n)),$$

y dado un subconjunto $\{a_1, \cdots, a_n\}$ de A, existe $\varphi \in \Phi$ tal que $\varphi(x_1) = a_1, \cdots, \varphi(x_n) = a_n$, luego

$$f(a_1, \cdots, a_n) = f(\varphi(x_1), \cdots, \varphi(x_n)) = 0,$$

se tiene entonces que $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$ para cualquier combinación de n elementos de A. Así, f es identidad polinomial para A. ■

1.2.2. T-ideales.

Definición 1.2.5. Un ideal I de $K\langle \boldsymbol{X} \rangle$ es **T-ideal** si $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo φ.

Definición 1.2.6. Sea A un álgebra. Se denota por

$$\mathrm{Id}(A) = \{f \in K\langle \boldsymbol{X} \rangle \mid \mathrm{f} \equiv 0 \ \text{ en } \ A\},$$

al **conjunto de identidades polinomiales** de A.

Proposición 1.2.7. $\mathrm{Id}(A)$ es un T-ideal de $K\langle \boldsymbol{X} \rangle$.

Demostración. Note primero que $\mathrm{Id}(A)$ es una subálgebra de $K\langle \boldsymbol{X}\rangle$.
Dados $f,\ g \in \mathrm{Id}(A)$ se tiene

$$\begin{aligned}(\alpha f+\beta g)(a_1,\cdots,a_2) &= (\alpha f)(a_1,\cdots,a_2)+(\beta g)(a_1,\cdots,a_2)\\ &= \alpha f(a_1,\cdots,a_2)+\beta g(a_1,\cdots,a_2)\\ &= 0+0=0.\end{aligned}$$

Observe también que $\mathrm{Id}(A)$ es un ideal bilateral de $K\langle \boldsymbol{X}\rangle$, para esto debe ser que

$$\mathrm{Id}(A)K\langle \boldsymbol{X}\rangle \subseteq \mathrm{Id}(A) \qquad \text{y} \qquad K\langle \boldsymbol{X}\rangle\mathrm{Id}(A)\subseteq \mathrm{Id}(A)$$

Dados $f\in \mathrm{Id}(A)$ y $h\in K\langle \boldsymbol{X}\rangle$, se desea ver que $fh\in \mathrm{Id}(A)$. Esto es,

$$(fh)(a_1,\cdots,a_n)=f(a_1,\cdots,a_n)\ h(a_1,\cdots,a_n)=0\ h(a_1,\cdots,a_n)=0,$$

entonces $fh\in\mathrm{Id}(A)$ y se tiene que $\mathrm{Id}(A)K\langle \boldsymbol{X}\rangle\subseteq \mathrm{Id}(A)$. Comprobar que $K\langle \boldsymbol{X}\rangle\mathrm{Id}(A)\subseteq\mathrm{Id}(A)$ se hace de manera análoga. Para ver que $\mathrm{Id}(A)$ es T-ideal de $K\langle \boldsymbol{X}\rangle$ se quiere ver que

$$\varphi(\mathrm{Id}(A))\subseteq \mathrm{Id}(A) \quad \text{para todo endomorfismo sobre } K\langle \boldsymbol{X}\rangle.$$

Sea $f\in\mathrm{Id}(A)$, para un endomorfismo φ sobre $K\langle \boldsymbol{X}\rangle$ se tiene,

$$\begin{aligned}\varphi(f)(a_1,\cdots,a_n) &= f(\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_n))(a_1,\cdots,a_n)\\ &= f(g_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,g_n(x_1,\cdots,x_n))(a_1,\cdots,a_n)\\ &= f(g_1(a_1,\cdots,a_n),\cdots,g_n(a_1,\cdots,a_n))\\ &= f(b_1,\cdots,b_n)=0.\end{aligned}$$

Por lo anterior se concluye que $\mathrm{Id}(A)$ es un T-ideal de $K\langle \boldsymbol{X}\rangle$. ∎

Proposición 1.2.8. Cada T-ideal de $K\langle \boldsymbol{X}\rangle$ es el conjunto de identidades de alguna álgebra.

Demostración. Dado I un T-ideal de $K\langle \boldsymbol{X}\rangle$, note que $I=\mathrm{Id}\left(K\langle \boldsymbol{X}\rangle/I\right)$.

$\Longrightarrow$) Sea $f=f(x_1,\cdots,x_n)\in I$ se quiere mostrar que $f\in\mathrm{Id}\left(K\langle \boldsymbol{X}\rangle/I\right)$, es decir, $f(\overline{g_1},\cdots,\overline{g_n})=0$ para todo $\overline{g_1},\cdots,\overline{g_n}\in K\langle \boldsymbol{X}\rangle/I$.
Sea $\varphi\in\mathrm{End}(K\langle \boldsymbol{X}\rangle)$ tal que $\varphi(x_1)=g_1,\cdots,\varphi(x_n)=g_n$, entonces

$$\begin{aligned}\varphi(f(x_1,\cdots,x_n)) &= f(\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_n))\\ &= f(g_1,\cdots,g_n)\in I, \quad \text{para todo} \quad g_1,\cdots,g_n\in K\langle \boldsymbol{X}\rangle,\end{aligned}$$

luego se tiene que

$$f(\overline{g_1},\cdots,\overline{g_n})=\overline{f(g_1,\cdots,g_n)}=I$$

es decir, $f(\overline{g_1},\cdots,\overline{g_n})$ es la clase del cero $(\overline{0})$ para cualquier subconjunto de n elementos de $K\langle \boldsymbol{X}\rangle/I$, en consecuencia $f\in\mathrm{Id}\left(K\langle \boldsymbol{X}\rangle/I\right)$.

$\Longleftarrow$) Dada $f\in\mathrm{Id}\left(K\langle \boldsymbol{X}\rangle/I\right)$ se quiere ver que $f\in I$, es decir, $\overline{f}=I$. Observe,

$$\overline{f(x_1,\cdots,x_n)}=f(\overline{x_1},\cdots,\overline{x_n})=I, \quad \text{pues} \quad f\in\mathrm{Id}\left(K\langle \boldsymbol{X}\rangle/I\right)$$

de esta manera, $f\in I$ y se concluye que $I=\mathrm{Id}\left(K\langle \boldsymbol{X}\rangle/I\right)$. ∎

Definición 1.2.9. Sea S un conjunto de polinomios en $K\langle \mathbf{X}\rangle$ y $f \in K\langle \mathbf{X}\rangle$. Se dice que f es una **consecuencia** de S si $f \in \langle S\rangle_{\mathrm{T}}$, donde $\langle S\rangle_{\mathrm{T}}$ denota el **T-ideal generado** por S.

Observación 1.2.10.

$$\langle S\rangle = \bigcap_{I \supseteq S} I, \ \ (I \text{ es ideal}) \qquad \text{y} \qquad \langle S\rangle_{\mathrm{T}} = \bigcap_{I \supseteq S} I, \ \ (I \text{ es T-ideal})$$

Proposición 1.2.11. $\langle S\rangle$ generado como ideal se escribe como

$$\langle S\rangle = \left\{ \sum g_{i_1}\ f_i\ g_{i_2} \ \middle|\ f_i \in S,\ \ g_{i_j} \in K\langle \mathbf{X}\rangle \right\}.$$

Demostración. Si $S = \emptyset$ (el conjunto vacío), entonces $\langle S\rangle = \bigcap_{I \supseteq \emptyset} I$, incluyendo por supuesto al ideal $I = \{0\}$, de esta manera, cero es el único elemento que pertenece a $\langle S\rangle$ y se concluye que $\langle S\rangle = \{0\}$. Ahora sea $S \neq \emptyset$ y sea

$$G = \left\{ \sum g_{i_1}\ f_i\ g_{i_2} \ \middle|\ f_i \in S,\ \ g_{i_j} \in K\langle \mathbf{X}\rangle \right\}.$$

Note primero que $\langle S\rangle \subseteq G$ es decir, que G es un ideal de $K\langle \mathbf{X}\rangle$ que contiene a S.

- Dado $f \in S$, entonces $f = 1f1$, luego $S \subseteq G$.
- Para probar que G es una subálgebra de $K\langle \mathbf{X}\rangle$, debe verse antes que G es un subespacio de $K\langle \mathbf{X}\rangle$. Sean $p,\ q \in G$ tal que,

  $$p = \sum g_{i_1}\ f_i\ g_{i_2} \qquad \text{y} \qquad q = \sum g'_{i_1}\ f'_i\ g'_{i_2}$$

  ahora, $p+q$ se escribe como

  $$p+q = \sum_{i=1}^{n} g_{i_1}\ f_i\ g_{i_2} + \sum_{i=n+1}^{m} g'_{i_1}\ f'_i\ g'_{i_2} = \sum_{j=1}^{m} g^*_{i_1} f^*_i g^*_{i_2},$$

  donde $g^*_{i_j} = \begin{cases} g_{i_j} & \text{si} \quad 1 \leq j \leq n \\ g'_{i_j} & \text{si} \quad n+1 \leq j \leq m \end{cases}$ y también $f^*_i = \begin{cases} f_i & \text{si} \quad 1 \leq j \leq n \\ f'_i & \text{si} \quad n+1 \leq j \leq m \end{cases}$

  es decir, se organizan los sumandos de manera que, hasta cierto punto se encuentran los de p y después los de q. Ahora se prueba que G es subálgebra. Se quiere ver que $pq \in G$ observe,

  $$\begin{aligned} pq &= \sum g_{i_1}\ f_i\ g_{i_2} \cdot \sum g'_{i_1}\ f'_i\ g'_{i_2} \\ &= (g_{1_1} f_1 g_{1_2} + \cdots + g_{n_1} f_n g_{n_2})(g'_{1_1} f'_1 g'_{1_2} + \cdots + g'_{m_1} f'_m g'_{m_2}) \\ &= (g_{1_1} f_1 g_{1_2})(g'_{1_1} f'_1 g'_{1_2}) + \cdots + (g_{n_1} f_n g_{n_2})(g'_{m_1} f'_m g'_{m_2}) \\ &= (g_{1_1} f_1 g_{1_2} g'_{1_1}) f'_1 g'_{1_2} + \cdots + (g_{n_1} f_n g_{n_2} g_{m_1}) f'_m g'_{m_2} \\ &= g^*_{1_1} f'_1 g'_{1_2} + \cdots + g^*_{n_m} f'_m g'_{m_2}, \end{aligned}$$

puesto que $g_{1_1}^*, \cdots, g_{n_m}^* \in K\langle \boldsymbol{X}\rangle$ se tiene que $pq \in G$, luego G es subálgebra de $K\langle \boldsymbol{X}\rangle$. Para ver que G es ideal, sea $g \in K\langle \boldsymbol{X}\rangle$ entonces,

$$g \cdot \sum g_{i_1}\ f_i\ g_{i_2} = \sum g g_{i_1}\ f_i\ g_{i_2} = \sum g_{i_1}'\ f_i\ g_{i_2} \in G.$$

Análogamente para cuando g se opera por derecha. De esta manera, se puede concluir que G es un ideal de $K\langle \boldsymbol{X}\rangle$ que contiene a S, luego $\langle S\rangle \subseteq G$.

Ahora note la contenencia recíproca. Dado I un ideal que contiene a S se quiere ver que $G \subseteq I$. Dado $z = \sum g_{i_1}\ f_i\ g_{i_2} \in G$, como I contiene a S entonces $f_i \in I$ y dado que I es ideal, $z \in I$, en consecuencia $z \in \bigcap_{I \supseteq S} I$. Se tiene entonces que $G \subseteq \langle S\rangle$ y se concluye que $\langle S\rangle = G$. ∎

Proposición 1.2.12. $\langle S\rangle_{\mathrm{T}}$ generado como T-ideal se escribe como

$$\langle S\rangle_{\mathrm{T}} = \left\{ \sum p_i\ f_i(h_{i_1}, \cdots, h_{i_n})\ q_i \ \middle|\ f_i \in S,\ \ p_i,\ h_{i_j},\ q_i \in K\langle \boldsymbol{X}\rangle \right\},$$

Demostración. Sea $G_{\mathrm{T}} = \left\{ \sum p_i\ f_i(h_{i_1}, \cdots, h_{i_n})\ q_i \ \middle|\ f_i \in S,\ \ p_i,\ h_{i_j},\ q_i \in K\langle \boldsymbol{X}\rangle \right\}$. La prueba de esta proposición es similar a la vista en en la prueba de la Proposición 1.2.11. Para verificar que $\langle S\rangle_{\mathrm{T}} \subseteq G_{\mathrm{T}}$ se debe ver, de manera adicional, que G_{T} es T-ideal de $K\langle \boldsymbol{X}\rangle$. Dado $z \in G_{\mathrm{T}}$ se quiere ver que $\varphi(z) \in G_{\mathrm{T}}$ para todo $\varphi \in \mathrm{End}(K\langle \boldsymbol{X}\rangle)$ observe,

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \varphi\Big(\sum p_i\ f_i(h_{i_1}, \cdots, h_{i_n})\ q_i\Big) \\
&= \sum \varphi(p_i)\ \varphi[f_i(h_{i_1}, \cdots, h_{i_n})]\ \varphi(q_i) \\
&= \sum \varphi(p_i)\ f_i[\varphi(h_{i_1}), \cdots, \varphi(h_{i_n})]\ \varphi(q_i).
\end{aligned}$$

Sean $r_i = \varphi(p_i)$, $s_i = \varphi(q_i)$ y $t_{i_j} = \varphi(h_{i_j})$ polinomios en $K\langle \boldsymbol{X}\rangle$, se tiene entonces que

$$\varphi(z) = \sum r_i\ f_i(t_{i_1}, \cdots, t_{i_n})\ s_i \in G_{\mathrm{T}}$$

de modo que G_{T} es un T-ideal que contiene a S, luego $\langle S\rangle_{\mathrm{T}} \subseteq G_{\mathrm{T}}$. La contenencia recíproca es igual a lo visto en la Proposición 1.2.11, de esta manera $\langle S\rangle_{\mathrm{T}} = G_{\mathrm{T}}$. ∎

1.3. Álgebras graduadas

Definición 1.3.1. Sea V un espacio vectorial. V es **graduado** si se puede escribir como una suma directa de subespacios $V^{(n)} \subseteq V$, tal que

$$V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{(n)},$$

donde al subespacio $V^{(n)}$ se le llama **componente homogénea** de grado n.

Ejemplo 1.3.2.

1. $V = K[x]$ espacio vectorial de polinomios en la variable x.
   El subespacio $V^{(n)} = \text{Span}\{x^n\}$.

$$V^{(0)} = K, \quad V^{(1)} = Kx, \quad V^{(2)} = Kx^2, \quad \cdots \quad V^{(n)} = Kx^n.$$

2. $V = K[x, y]$ el espacio vectorial de polinomios en las variables conmutativas x, y y la graduación está dada por $V^{(n)}$, subespacio de polinomios de grado n.

$$\begin{gathered} V^{(0)} = K, \quad V^{(1)} = \text{Span}\{x,\ y\}, \quad V^{(2)} = \text{Span}\{x^2,\ xy,\ y^2\}, \\ V^{(3)} = \text{Span}\{x^3,\ x^2y,\ xy^2,\ y^3\}, \quad V^{(n)} = \text{Span}\{x^n,\ x^{n-1}y, \cdots, xy^{n-1},\ y^n\} \\ \Longrightarrow V = K \oplus \text{Span}\{x,\ y\} \oplus \text{Span}\{x^2,\ xy,\ y^2\} \oplus \text{Span}\{x^3,\ x^2y,\ xy^2,\ y^3\} \oplus \cdots \\ \cdots \oplus \text{Span}\{x^n,\ x^{n-1}y, \cdots, xy^{n-1},\ y^n\}. \end{gathered}$$

Definición 1.3.3. Un álgebra A es **graduada** si $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A^{(n)}$ donde esta descomposición es una descomposición de espacios vectoriales.

Ejemplo 1.3.4. Sea $A = K[x]$ entonces $A^{(n)} = \text{Span}\{x^n\}$.

1.3.1. G-graduaciones

Definición 1.3.5. Sea G un grupo y A un álgebra; se dice que A es G-**graduada** si se puede escribir A como una suma directa de subespacios

$$A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$$

tal que $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$ para todo $g,\ h \in G$. Los subespacios $A^{(g)}$ se llaman **componentes homogéneas** de A. Un elemento $a \in A$ se llama **homogéneo de grado** g, si $a \in A^{(g)}$. El grado de a se denota como grad(a).

Dado $a \in A$, podemos escribirlo como

$$a = \sum_{g\in G} a^{(g)}$$

de manera única, donde $a^{(g)} \in A^{(g)}$ para todo $g \in G$. Si $e \in G$ es la identidad de G, entonces $A^{(e)}$ es subálgebra de A.

Ejemplo 1.3.6. Sea $A = M_2(K)$ el álgebra de matrices de tamaño 2×2 y sea $G = \mathbb{Z}_2 = \{\ \overline{0},\ \overline{1}\ \}$ el grupo de orden 2.

Observe que graduando A con el grupo $\mathbb{Z}_2$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & A = A^{(\bar{0})} \oplus A^{(\bar{1})} \\ \text{donde} \quad & A^{(\bar{0})} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \,\middle|\, a,\ d \in K \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ & A^{(\bar{1})} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, b,\ c \in K \right\} = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

es una $\mathbb{Z}_2$-graduación en $A = M_2(K)$.

A continuación, se verifica la $\mathbb{Z}_2$-graduación en A. Es fácil ver que $A^{(\bar{0})}$ y $A^{(\bar{1})}$ son subespacios. También, $A^{(\bar{0})} \cap A^{(\bar{1})} = \{0\}$. Observe que $M_2(K) = A^{(\bar{0})} \oplus A^{(\bar{1})}$.

Dado $x \in M_2(K)$ entonces $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in A^{(\bar{0})} \oplus A^{(\bar{1})}$.

La contenencia recíproca es trivial, entonces $M_2(K) = A^{(\bar{0})} \oplus A^{(\bar{1})}$. Ahora se debe probar que $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$ para todo $g,\ h \in G$. Luego $x \in A^{(g)},\ y \in A^{(h)}$implica $xy \in A^{(gh)}$.

- $x \in A^{(\bar{0})},\ y \in A^{(\bar{0})} \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$
$$\begin{aligned} &\Longrightarrow xy = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & 0 \\ 0 & x_2 y_2 \end{pmatrix} \in A^{(\bar{0})} \\ &\Longrightarrow A^{(\bar{0})}A^{(\bar{0})} \subseteq A^{(\bar{0})}. \end{aligned}$$
- $x \in A^{(\bar{0})},\ y \in A^{(\bar{1})} \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 0 & y_1 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix}$
$$\begin{aligned} &\Longrightarrow xy = \begin{pmatrix} 0 & x_1 y_1 \\ x_2 y_2 & 0 \end{pmatrix} \in A^{(\bar{1})} \\ &\Longrightarrow A^{(\bar{0})}A^{(\bar{1})} \subseteq A^{(\bar{1})}. \end{aligned}$$
- $x \in A^{(\bar{1})},\ y \in A^{(\bar{1})} \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$
$$\begin{aligned} &\Longrightarrow xy = \begin{pmatrix} x_1 y_2 & 0 \\ 0 & x_2 y_2 \end{pmatrix} \in A^{(\bar{1})} \\ &\Longrightarrow A^{(\bar{1})}A^{(\bar{1})} \subseteq A^{(\bar{0})}. \end{aligned}$$

Entonces $M_2(K) = A^{(\bar{0})} \oplus A^{(\bar{1})}$ es una $\mathbb{Z}_2$-graduación.

Note que en el ejemplo anterior $A^{(\bar{0})}$ es una subálgebra de $M_2(k)$, mientras que $A^{(\bar{1})}$ no lo es.

Ejemplo 1.3.7. Un álgebra A puede ser graduada por un grupo G haciendo $A^{(e)} = A$ (donde e es el elemento neutro de G) y $A^{(g)} = \{0\}$ para todo $g \neq e$. Esta se conoce como la **graduación trivial**.

Ejemplo 1.3.8. Sea $A = M_2(K)$ y $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1)\}$ (Grupo de Klein).

$$A^{(0,0)} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_1\right\} \qquad A^{(1,0)} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = e_2\right\}$$
$$A^{(0,1)} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_3\right\} \qquad A^{(1,1)} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = e_4\right\}.$$

A continuación se comprueba que $M_2(K)$ se encuentra $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$-graduada.

Dado $x \in A^{(0,0)} \oplus A^{(1,0)} \oplus A^{(0,1)} \oplus A^{(1,1)}$ trivialmente $x \in M_2(K)$. Para la otra contenencia, sea $x \in M_2(K)$, entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a+d}{2}e_1 + \frac{a-d}{2}e_2 + \frac{c+b}{2}e_3 + \frac{c-b}{2}e_4,$$
$$\text{luego} \quad x \in A^{(0,0)} \oplus A^{(1,0)} \oplus A^{(0,1)} \oplus A^{(1,1)}$$

de modo que $\quad M_2(K) = \bigoplus_{g \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2} A^{(g)}.$

Ejemplo 1.3.9. Sea $A = K\langle x_1, \cdots, x_m \rangle$. Se puede graduar A con el grupo $\mathbb{Z}^m = \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{m \text{ veces}}$.

$A^{(n_1,\cdots,n_m)} = \{f \in K\langle x_1, \cdots, x_m \rangle \mid \text{grado}_{x_i} f = n_i,\ \ i = 1, \cdots, m\}$. Donde $\text{grado}_{x_i} f$ significa que el grado relativo de f respecto x_i es n_i. En ese sentido, A es $\mathbb{Z}^m$-graduada.

Teniendo en cuenta este ejemplo, se puede afirmar que $x_1^2 x_2^3 x_3 \in A^{(2,3,1)}$.

Definición 1.3.10. Dadas A y B álgebras G–graduadas de modo que

$$A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)} \qquad \text{y} \qquad B = \bigoplus_{g \in G} B^{(g)},$$

se dice que $\varphi : A \to B$ es un **homomorfismo de álgebras** G**–graduadas** si es homomorfismo de álgebras y además

$$\varphi(A^{(g)}) \subseteq B^{(g)},$$

para todo $g \in G$.

Definición 1.3.11. Dado $A = M_n(K)$ el álgebra de matrices $n \times n$ y G un grupo, A es G-graduada por una **graduación elemental** si existe $(g_1, \cdots, g_n)$ una n–tupla de elementos de G, tal que $A^{(g)} = \text{span}\{e_{pq} \mid g_p g_q^{-1} = g\}$ donde e_{pq} son matrices unidad (esto es, matrices con ceros en todas partes excepto en la entrada (p,q)).

$$A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}.$$

Ejemplo 1.3.12. Sean $A = M_3(K)$, $G = (\mathbb{Z}_3\ ,\ \cdot\ )$, donde $\cdot$ denota la suma usual de $\mathbb{Z}_3$ y $(g_1, g_2, g_3) = (\overline{2}, \overline{1}, \overline{2}) \in \mathbb{Z}_3$. Observe una $\mathbb{Z}_3$-graduación para $M_3(K)$.

$$
\begin{aligned}
&\bullet\ g_p g_q^{-1} = \overline{0} \implies \overline{2}\cdot\overline{2^{-1}} = \overline{0};\ \ 1\cdot 1^{-1} = \overline{0}\\
&\implies A^{(\overline{0})} = \operatorname{Span}\{e_{pq} \mid g_p g_q^{-1} = \overline{0}\} = \operatorname{Span}\{e_{11},\ e_{13},\ e_{31},\ e_{33},\ e_{22}\};\\
&\bullet\ g_p g_q^{-1} = \overline{1} \implies \overline{2}\cdot\overline{1^{-1}} = \overline{1}\\
&\implies A^{(\overline{1})} = \operatorname{Span}\{e_{pq} \mid g_p g_q^{-1} = \overline{1}\} = \operatorname{Span}\{e_{12},\ e_{32}\};\\
&\bullet\ g_p g_q^{-1} = \overline{2} \implies \overline{1}\cdot\overline{2^{-1}} = \overline{2}\\
&\implies A^{(\overline{2})} = \operatorname{Span}\{e_{pq} \mid g_p g_q^{-1} = \overline{2}\} = \operatorname{Span}\{e_{21},\ e_{23}\};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{luego}\ \ M_3(K) &= \operatorname{Span}\{e_{11},\ e_{13},\ e_{31},\ e_{33},\ e_{22}\} \oplus \operatorname{Span}\{e_{12},\ e_{32}\} \oplus \operatorname{Span}\{e_{21},\ e_{23}\}\\
&= A^{(\overline{0})} \oplus A^{(\overline{1})} \oplus A^{(\overline{2})}.
\end{aligned}
$$

Definición 1.3.13. Dada una G-graduación sobre un álgebra de matrices A, se dice que M_{grad} es la **matriz asociada a la graduación**, donde la componente en la posición ij de M_{grad} esta definida por el grado (grad) del subespacio $A^{(g)}$ al cual pertenezca la matriz unidad e_{ij}.

Ejemplo 1.3.14. De acuerdo con el Ejemplo 1.3.12, la matriz asociada a dicha graduación es:

$$
\mathrm{M}_{\text{grad}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ \overline{2} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix}
$$

Observación 1.3.15.

- El Ejemplo 1.3.6 es una graduación elemental si se toma la tupla $(0,1) \in \mathbb{Z}_2^2$.
- La graduación trivial (Ejemplo 1.3.7) es una graduación elemental tomando la tupla $(g, g, \cdots, g) \in G^n$ con $g \in G$.
- El Ejemplo 1.3.8 no es graduación elemental puesto que no existe una tupla $(g_1, g_2) \in (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)^2$.

Definición 1.3.16. Un ideal I de un álgebra G-graduada A se llama **ideal G-graduado** si $I = \bigoplus_{g\in G} I^{(g)}$, donde $I^{(g)} = I \cap A^{(g)}$.

1.3.2. Polinomios multilineales

Definición 1.3.17. Dado $X = \bigcup_{g\in G} X^{(g)}$ donde $X^{(g)} = \{x_1^{(g)},\ x_2^{(g)},\ x_3^{(g)}, \cdots\}$. Las variables de $X^{(g)}$ para algún $g \in G$ se conocen como homogéneas de grado g. Denote por $K\langle X\rangle^{\text{gr}}$ el álgebra de todas las palabras construidas con el abecedario $X = \bigcup_{g\in G} X^{(g)}$. $K\langle X\rangle^{\text{gr}}$ es el **álgebra libre asociativa G-graduada**.

Un polinomio $f \in K\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ es

$$f = f\left(x_1^{(g_1)},\ x_2^{(g_2)},\ x_1^{(g_2)},\ x_3^{(g_2)}\right) = x_1^{(g_1)}x_2^{(g_2)}x_1^{(g_2)}x_3^{(g_2)}x_1^{(g_2)}x_1^{(g_2)}x_3^{(g_2)}x_1^{(g_1)}.$$

Dado un monomio $x_{i_1}^{(g_1)}x_{i_2}^{(g_2)}\cdots x_{i_n}^{(g_n)} \in K\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ entonces el **grado homogéneo** de ese monomio es

$$g_1g_2\cdots g_n \in G$$

y el grado total es n.

Denotando por $K\langle X\rangle^{(g)}$ el subespacio de $K\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ generado por todos los monomios de grado homogeneo g. Note que $K\langle X\rangle^{(g)}K\langle X\rangle^{(h)} \subseteq K\langle X\rangle^{(gh)}$. También,

$$K\langle X\rangle^{\mathrm{gr}} = \bigoplus_{g\in G} K\langle X\rangle^{(g)}$$

de tal manera que $K\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ es G-graduado.

Definición 1.3.18. Dado G un grupo y dada A una álgebra G-graduada, se dice que un polinomio $f \in K\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ es una **identidad polinomial graduada** de A si evaluando el polinomio

$$f = f(x_{i_1}^{(g_1)}, x_{i_2}^{(g_2)}, \cdots, x_{i_t}^{(g_t)})$$

en $(a_1^{(g_1)}, a_2^{(g_2)}, \cdots, a_t^{(g_t)})$ se obtiene cero, es decir

$$f(a_1^{(g_1)}, a_2^{(g_2)}, \cdots, a_t^{(g_t)}) = 0$$

para todo $a_1^{(g_1)} \in A^{(g_1)}, a_2^{(g_2)} \in A^{(g_2)}, \cdots, a_t^{(g_t)} \in A^{(g_t)}$. Si A satisface una identidad no trivial entonces A es **PI-álgebra G-graduada**.

Ejemplo 1.3.19. Sean $A = UT_2(K)$ y $G = \mathbb{Z}_2 = \{\overline{0},\ \overline{1}\}$ entonces:

$$A^{(\overline{0})} = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\right\} \qquad \text{y} \qquad A^{(\overline{1})} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad \text{luego}$$

$$A = A^{(\overline{0})} \oplus A^{(\overline{1})}.$$

$$A^{(\overline{g})}A^{(\overline{h})} \subseteq A^{(\overline{gh})}, \qquad \text{observe:} \qquad \begin{aligned} A^{(\overline{0})}A^{(\overline{0})} &\subseteq A^{(\overline{0})} \\ A^{(\overline{0})}A^{(\overline{1})} &\subseteq A^{(\overline{1})} \\ A^{(\overline{1})}A^{(\overline{0})} &\subseteq A^{(\overline{1})} \\ A^{(\overline{1})}A^{(\overline{1})} &\subseteq A^{(\overline{0})}. \end{aligned}$$

Ahora, observe que $UT_2(K)$ satisface la identidad

$$f(x_1^{\overline{1}}, x_2^{\overline{1}}) = x_1^{\overline{1}} x_2^{\overline{1}}. \quad \text{Siendo} \quad a_1 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$f(a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Note que el polinomio $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ no es identidad de $UT_2(K)$, en general se puede afirmar que:

$$\mathrm{Id}(A) \subseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A).$$

Otras identidades polinomiales graduadas para este ejemplo pueden ser

- $f(x_1, x_2) = x_1^{\overline{1}} x_1^{\overline{0}} x_2^{\overline{1}} \equiv 0.$
- $f(x_1, x_2) = [x_1^{\overline{0}}, x_2^{\overline{0}}] = x_1^{\overline{0}} x_2^{\overline{0}} - x_2^{\overline{0}} x_1^{\overline{0}}$. Esto es:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & 0 \\ 0 & by \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} xa & 0 \\ 0 & yb \end{pmatrix} = 0.$$

El conjunto de todas las identidades graduadas de A, se denota

$$\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A) = \{f \in K\langle X\rangle^{\mathrm{gr}} \mid f \equiv 0 \ \text{ en } \ A\}.$$

Definición 1.3.20. Un polinomio $f(x_1, \cdots, x_n) \in K\langle X\rangle$ es multilineal de grado n si cada variable $x_1, \cdots, x_n$ aparece de grado 1 en cada monomio de f. Se denota por P_n el subespacio de $K\langle X\rangle$ de todos los **polinomios multilineales** de $K\langle X\rangle$ de grado igual a n.

Ejemplo 1.3.21.

$$\begin{array}{rl} xyz - xz & \text{no es multilineal.} \\ x^2 & \text{no es multilineal.} \\ 3yx - 6xy & \text{es multilineal.} \\ xyz - yxz & \text{es multilineal.} \end{array}$$

De acuerdo con la definición, $P_3 = \mathrm{span}_K\{xyz,\ xzy,\ yzx,\ yxz,\ zxy,\ zyx\}$. En general,

$$P_n = \{x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in s_n\}$$

y claramente $\dim P_n = n!$.

Proposición 1.3.22. Sea A un álgebra y

$$f(x_1,\cdots,x_m)=\sum_{i=0}^{n} f_i \ \in K\langle X\rangle,$$

donde los f_i son las componentes homogéneas de grado i en la variable x_1. Si el cuerpo K contiene más de n elementos (por ejemplo K infinito) entonces si $f\equiv 0$ es una identidad polinomial de A, cada componente homogénea f_i con $i=0,\ 1,\cdots,n$ es también una identidad polinomial de A.

Demostración. Elija $n+1$ elementos $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in K$ distintos. Como $\mathrm{Id}(A)$ es T-ideal, para $j=0,\cdots,n$

$$f(\alpha_j x_1,x_2,\cdots,x_m)\in \mathrm{Id}(A)$$

y por lo tanto, para cada $j=0,\cdots,n$

$$\begin{aligned} f(\alpha_j x_1,x_2,\cdots,x_m) &= \sum_{i=0}^{n} f_i(\alpha_j x_1,x_2,\cdots,x_m)\\ &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i\ f_i(x_1,x_2,\cdots,x_m)\ \in \mathrm{Id}(A) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Considere la matriz de Vandermonde

$$\Delta=\begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \cdots & \alpha_0^n\\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^n\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}_{n+1}$$

Es sabido que en dicha matriz se cumple que $\det(\Delta)=\prod_{i<j}(\alpha_j-\alpha_i)$. Para cada $a_1,\cdots,a_m\in A$, escriba $\hat{f}_i=f_i(a_1,\cdots,a_n)\in A$, esto para cada $i=0,\cdots,n$. De la Ecuación (1.1)

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_j^i f_i(a_1,\cdots,a_n)=0, \quad \text{equivalente a decir}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_j^i \hat{f}_i=0, \quad \text{lo que indica que}$$

$$\Delta\begin{pmatrix}\hat{f}_0\\ \vdots\\ \hat{f}_n\end{pmatrix}=0.$$

Como el $\det(\Delta)=\prod_{i<j}(\alpha_j-\alpha_i)\neq 0$ (porque la elección fue distinta), entonces $\hat{f}_i=0$ para todo $i=0,\cdots,n$. En ese sentido, $f_i(a_1,\cdots,a_n)=0$ para todo i y para todo $a_1,\cdots,a_m\in A$. Entonces $f_i\in \mathrm{Id}(A)$ para todo $i=0,\cdots,n$. ■

Teorema 1.3.23. Si el cuerpo es de característica cero entonces $f = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ (identidad polinomial) es equivalente a un conjunto de identidades multilineales.

Demostración. Asuma que $f = f(x_1, ..., x_n)$ es homogéneo en cada variable. Sea el grado de x_1 de f igual a $d > 1$. Considere

$$f(y_1 + y_2, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=0}^{d} g_i(y_1, y_2, x_2, ..., x_n)$$

donde $\text{grado}_{y_1} g_i = i$, $\text{grado}_{y_2} g_i = d - i$.

Como $\text{grado}_{y_1} g_i < d$ para todo $i = 1, ..., d-1, j = 1, 2$. Por inducción el grado de x_1, el teorema es cierto para todos los g_i con $i = 1, ..., d-1$. Por lo tanto ellos son consecuencias de polinomios multilineales. Para mostrar que esas identidades multilineales son consecuencias de f, note que

$$g_i(y_1, y_1, x_2...., x_n) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, .., x_n),$$

como el cuerpo es de característica cero $\binom{d}{i} \neq 0$ para todo i, entonces f es consecuencia de alguna g_i con $i = 1, ..., d-1$, lo que completa la prueba. ■

CAPÍTULO 2

GRADUACIONES SOBRE MATRICES TRIANGULARES SUPERIORES

Con base en los preliminares de graduaciones elementales, en este capítulo se estudian dichas graduaciones inicialmente en el álgebra de matrices triangulares superiores con el producto usual entre matrices y posteriormente sobre el álgebra $UT_n(K)^{(-)}$ donde la operación es el producto de Lie. En el proceso se alcanzan resultados que muestran cómo la tupla conformada por la superdiagonal de la matriz graduación define de manera única la graduación en $UT_n(K)^{(-)}$. En el mismo sentido, abordando las definiciones de buenas y malas secuencias se obtiene que una identidad polinomial f_μ correspondiente a la secuencia $\mu \in G^m$ es identidad G-graduada para $UT_n(K)^{(-)}$ graduada con la tupla η, solo si μ es η-mala secuencia. Por último, se abordan propiedades del grupo simétrico de permutaciones actuando en tuplas que definen graduaciones en el álgebra de Lie.

2.1. Graduaciones elementales

Definición 2.1.1. Sea G un grupo. De acuerdo con la Definición 1.3.11, una G-**graduación** sobre $UT_n(K)^{(-)}$ es **elemental** si existe una secuencia $\eta = (g_1, g_2, \ldots, g_n) \in G^n$ tal que cada matriz unidad $e_{ij} \in UT_n(K)^{(-)}$ es homogénea y grad $e_{ij} = g_i g_j^{-1}$.

Observación 2.1.2. En adelante, se empleará $\mathbb{Z}_n$ para denotar $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$, donde $\cdot$ es la suma usual en $\mathbb{Z}_n$.

Ejemplo 2.1.3. Dados $G = \mathbb{Z}_3$, $\eta = (\overline{2}, \overline{0}, \overline{1}) \in \mathbb{Z}_3^3$. Una G-graduación para $M_3(K)$ se encuentra determinada por:

$M_3(K)^{(\overline{0})} = \text{span}\,\{e_{ij} \in M_3(K) : g_i g_j^{-1} = \overline{0}\} = \text{span}\,\{e_{11},\ e_{22},\ e_{33}\}$.

$M_3(K)^{(\overline{1})} = \text{span}\,\{e_{ij} \in M_3(K) : g_i g_j^{-1} = \overline{1}\} = \text{span}\,\{e_{13},\ e_{21},\ e_{32}\}$.

$M_3(K)^{(\overline{2})} = \text{span}\,\{e_{ij} \in M_3(K) : g_i g_j^{-1} = \overline{2}\} = \text{span}\,\{e_{12},\ e_{23},\ e_{31}\}.$

A continuación, se verifica que los espacios anteriormente descritos generan una graduación en $M_3(K)$; esto es, $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$:

$\overline{0}+\overline{0}=\overline{0}$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}.$$

$\overline{0}+\overline{1}=\overline{1}$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ e & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overline{0}+\overline{2}=\overline{2}$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overline{1}+\overline{1}=\overline{2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ e & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overline{1}+\overline{2}=\overline{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & e \\ f & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}$$

$\overline{1}+\overline{0}=\overline{1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overline{2}+\overline{2}=\overline{1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & e \\ f & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ b_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overline{2}+\overline{1}=\overline{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & d \\ e & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}$$

$\overline{2}+\overline{0}=\overline{2}$

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 \\ c_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la graduación descrita sobre $M_3(K)$ puede resumirse en la matriz graduación:

$$\mathrm{M}_{\mathrm{grad}}=\begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{2} & \overline{1} & \overline{0} \end{pmatrix},$$

lo que permite inferir una graduación sobre $UT_3(K)^{(-)}$ definida por los espacios:

$UT_3(K)^{(-)^{(\overline{0})}}=\text{span}\,\{e_{11},\ e_{22},\ e_{33}\}.$

$UT_3(K)^{(-)^{(\overline{1})}}=\text{span}\,\{e_{13}\}.$

$UT_3(K)^{(-)^{(\overline{2})}}=\text{span}\,\{e_{12},\ e_{23}\}.$

Lo anterior se puede verificar como graduación empleando el corchete de Lie:
$[x,y]=xy-yx$ para todo $x,y\in UT_3(K)^{(-)}$ y además, la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se denomina homogénea de grado $\overline{2}$ debido a que puede ser generada por el subespacio $UT_3(K)^{(-)^{(\overline{2})}}$.

Definición 2.1.4. Dada la secuencia $\eta=(g_1,g_2,g_3,\dots,g_m)\in\ G^m$, se define la **secuencia reversa** como $\operatorname{rev}\eta=(g_m,g_{m-1},\dots,g_2,g_1)$.

Proposición 2.1.5. Se define una relación de equivalencia sobre el conjunto G^{n-1} como sigue.
Si $\eta = (g_1, g_2, ..., g_{n-1})$, $\mu \in G^{n-1}$ luego $\eta \sim \mu$ cuando $\eta = \mu \quad$ o $\quad \mu = (g_{n-1}, g_{n-2}, ..., g_2, g_1)$. Esta última expresión es $\operatorname{rev}\eta$.

Demostración. Dados $\gamma, \beta, \alpha \in G^{n-1}$. Entonces:

- $\alpha \sim \alpha$ por definición.(Reflexiva).
- $\alpha \sim \beta \Longrightarrow \beta \sim \alpha$ (Simétrica).
  Observe que si $\alpha \sim \beta$ se tiene que $\alpha = \beta$ ó $\alpha = \operatorname{rev}\beta$; si $\alpha = \beta$ entonces $\beta = \alpha$, lo que implica que $\beta \sim \alpha$, en otro caso si $\alpha = \operatorname{rev}\beta$ se tiene que $\beta = \operatorname{rev}\alpha$, así $\beta \sim \alpha$.
- Si $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \gamma$ entonces $\alpha \sim \gamma$. (Transitiva).
  Note que si $\alpha \sim \beta$ se tiene que $\alpha = \beta$ ó $\alpha = \operatorname{rev}\beta$. Suponga que $\alpha = \beta$, dado que $\beta \sim \gamma$ entonces $\beta = \gamma$ ó $\beta = \operatorname{rev}\gamma$ en cualquiera de los dos casos $\alpha \sim \gamma$, por la igualdad $\alpha = \beta$. Ahora suponga que $\alpha = \operatorname{rev}\beta$, lo que implica que $\operatorname{rev}\alpha = \beta$, así $\operatorname{rev}\alpha = \gamma$ ó $\operatorname{rev}\alpha = \operatorname{rev}\gamma$ (por $\beta \sim \gamma$) de donde $\alpha = \operatorname{rev}\gamma$ ó $\alpha = \gamma$. Esto es $\alpha \sim \gamma$.

∎

Lema 2.1.6. Sea $UT_n(K)^{(-)}$ un álgebra de Lie G-graduada con una graduación elemental, entonces $\operatorname{grad}(e_{ii}) = \operatorname{id}$.

Demostración. Por definición de graduación elemental $\operatorname{grad}(e_{ij}) = g_i {g_j}^{-1}$, lo que implica que $\operatorname{grad}(e_{ii}) = g_i {g_i}^{-1} = \operatorname{id} \in G$.

∎

Lema 2.1.7. Cada G-graduación sobre $UT_n(K)^{(-)}$ esta únicamente determinada por los grados de las matrices unidad, e_{1i} donde $i = 1, ..., n$.

Demostración. Sea $UT_n(K)^{(-)} = \bigoplus_{g \in G} A^g$ y sea $e_{1r} \in A^{g_r}$. Suponga que $e_{ij} \in A^g$ para algún $g \in G$ con $i < j$. Note que $e_{1i}e_{ij} = e_{1i}e_{ij} - e_{ij}e_{1i} = e_{1i}e_{ij} - 0 = e_{1i}e_{ij} = e_{1j}$. Lo anterior permite obtener $g_i g = g_j$ de donde $g = g_i^{-1} g_j$, lo que indica que el grado de cualquier e_{ij} ($\operatorname{grad} e_{ij}$) se determina mediante $g_i^{-1} g_j$, donde $(g_i)^{-1}$=$(\operatorname{grad}\, e_{1i})^{-1}$ y $g_j = \operatorname{grad}\, (e_{1j})$. Así:

$$\operatorname{grad}(e_{ij}) = (\operatorname{grad} e_{1i})^{-1} \cdot \operatorname{grad}(e_{1j}).$$

∎

Lema 2.1.8. Sea $UT_n(K)^{(-)}$ un álgebra de Lie G-graduada con una graduación elemental, entonces $\operatorname{grad}(e_{12})\operatorname{grad}(e_{23})\operatorname{grad}(e_{34})\ldots\operatorname{grad}(e_{n-1,n})$, determina la graduación de manera única.

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}(e_{ij}) &= \operatorname{grad}(e_{1i})^{-1}\operatorname{grad}(e_{1j}), \text{ pero}\\
\operatorname{grad}(e_{1i})^{-1} &= [\operatorname{grad}(e_{12})\operatorname{grad}(e_{23})\ldots\operatorname{grad}(e_{i-1,i})]^{-1}, \text{ y}\\
\operatorname{grad}(e_{1j}) &= \operatorname{grad}(e_{12})\operatorname{grad}(e_{23})\ldots\operatorname{grad}(e_{j-1,j}),
\end{aligned}
$$

entonces:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}(e_{ij}) &= [\operatorname{grad}(e_{12})\operatorname{grad}(e_{23})\ldots\operatorname{grad}(e_{i-1,i})]^{-1}[\operatorname{grad}(e_{12})\operatorname{grad}(e_{23})\ldots\operatorname{grad}(e_{j-1,j})]\\
&= \cancel{(\operatorname{grad}(e_{i-1,i}))^{-1}}\cancel{(\operatorname{grad}(e_{i-2,i-1}))^{-1}}\ldots\cancel{(\operatorname{grad}(e_{12}))^{-1}}\ldots\cancel{\operatorname{grad}(e_{12})}\cancel{\operatorname{grad}(e_{23})}\ldots\operatorname{grad}(e_{j-1,j})\\
&= \operatorname{grad}(e_{i,i+1})\operatorname{grad}(e_{i+1,i+2})\ldots\operatorname{grad}(e_{j-1,j})
\end{aligned}
$$

esta última expresión determina de manera única la graduación para $UT_n(K)^{(-)}$.

■

Ejemplo 2.1.9. Dado $e_{15} \in UT_n(K)^{(-)}$, observe que $e_{15} = e_{12}e_{23}e_{34}e_{45}$ con las operaciones en $UT_n(K)^{(-)}$.

$$
\begin{aligned}
e_{15} &= e_{12}e_{23}e_{34}e_{45} = (e_{12}e_{23} - e_{23}e_{12})e_{34}e_{45} = (e_{12}e_{23} - 0)e_{34}e_{45} = e_{13}e_{34}e_{45}\\
&= (e_{13}e_{34} - e_{34}e_{13})e_{45} = (e_{14} - 0)e_{45} = e_{14}e_{45} = e_{14}e_{45} - e_{45}e_{14} = e_{14}e_{45-0} = e_{15}.
\end{aligned}
$$

Corolario 2.1.10. Teniendo en cuenta la Proposición 2.1.5, existe una correspondencia $1-1$ entre las G-graduaciones sobre $UT_n(K)^{(-)}$ y $G^{n-1}/\sim$.

Definición 2.1.11. Se conoce como **superdiagonal** a la diagonal que se encuentra por encima de la diagonal principal de una matriz.

Ejemplo 2.1.12. En la siguiente matriz, se puede observar la diagonal principal compuesta de ceros y la superdiagonal con entradas en K.

$$
\begin{pmatrix}
0 & 2 & & & & & \\
 & 0 & 1 & & & & \\
 & & 0 & 4 & & & \\
 & & & 0 & 3 & & \\
 & & & & 0 & 5 & \\
 & & & & & 0 & 7\\
 & & & & & & 0
\end{pmatrix}.
$$

Lema 2.1.13. Sea $UT_n(K)^{(-)}$ un álgebra de Lie G-graduada, los elementos de la superdiagonal generan un subgrupo abeliano que contiene el soporte de la graduación.

Lo anterior puede ser visto como:

Dada $UT_n(K)^{(-)}$ un álgebra de Lie G-graduada y sea $[A^{g_1},\cdots,A^{g_m}] \neq 0$ para algunos $g_1, g_2, ..., g_m$ en G. Luego $g_1, g_2, ..., g_m$ conmutan en G

Demostración. Este Lema fue probado por Pagon, Repovs y Zaicev en [18] para álgebras de Lie graduadas simples y de manera más general por Kochetov y Yasumura en [16].

■

Observación 2.1.14. A continuación se verifica el Lema para el caso $m = 2$. Por definición de graduación $[A^g, A^h] \subseteq A^{gh}$. Ahora note que

$$[A^g, A^h] = A^g A^h - A^h A^g = -(-A^g A^h + A^h A^g) = -(A^h A^g - A^g A^h) = -[A^h, A^g] = [A^h, A^g] \subseteq A^{hg}.$$

En ese sentido:

$$A^{gh} \bigcap A^{hg} = \begin{cases} \{0\} & \text{si} \quad gh \neq hg \\ A^{hg} = A^{gh} & \text{si} \quad gh = hg, \end{cases}$$

así entonces se tiene que $[A^g, A^h] \neq 0$ implica que $gh = hg$.

Observación 2.1.15. Las G-graduaciones elementales sobre $UT_n(K)$ se encuentran en correspondencia 1-1 con el conjunto G^{n-1}, en el caso $UT_n(K)^{(-)}$ la secuencia reversa $(g_{n-1}, \ldots, g_2, g_1)$ produce la misma graduación que la secuencia $(g_1, g_2, \ldots, g_{n-1})$.

Ejemplo 2.1.16. Sea $G = \mathbb{Z}_3$, suponga que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{0} \\ & \overline{0} & \overline{2} \\ & & \overline{0} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} \\ & \overline{0} & \overline{1} \\ & & \overline{0} \end{pmatrix},$$

son las respectivas matrices graduación inducidas por $(\overline{1}, \overline{2})$ y $(\overline{2}, \overline{1})$ en $UT_3(K)$. Se construye φ como sigue:

$$\begin{aligned} \varphi : \ & A \longrightarrow B \\ & e_{ij} \longmapsto -e_{n-j+1, n-i+1} \end{aligned}$$

en ese sentido:

$$\begin{aligned} \varphi : \ & A \longrightarrow B \\ & e_{11} \longmapsto -e_{33} \\ & e_{22} \longmapsto -e_{22} \\ & e_{33} \longmapsto -e_{11} \\ & e_{12} \longmapsto -e_{23} \\ & e_{13} \longmapsto -e_{13} \\ & e_{23} \longmapsto -e_{12} \end{aligned}$$

Note que: $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ y $\varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x)$ se cumple puesto que φ es transformación lineal.

Ahora, observe que:

$$\varphi(x\cdot y)\neq\varphi(x)\cdot\varphi(y)$$

esto es:

$$\varphi(e_{12}e_{23})=\varphi(e_{13})=-e_{13}$$

de otro lado, $\varphi(e_{12})\varphi(e_{23})=(-e_{23})(-e_{12})=0$. Por lo enterior se concluye que φ no es homomorfismo en $UT_3(K)$.

Por el contrario, observe que en $UT_3(K)^{(-)}$ definiendo a φ de la misma manera existe un homomorfismo entre la graduación inducida por $(\overline{1},\overline{2})$ y la graduación inducida por $(\overline{2},\overline{1})$.

Ya que φ es transformación lineal se tiene $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$ y $\varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x)$.

Para mostrar $\varphi([x,y])=[\varphi(x),\varphi(y)]$ primero se define el producto de matrices unidad e_{ij} en $UT_n(K)$ de manera general:

$$e_{ij}e_{kr}=\begin{cases} e_{ir} & \text{si } k=j \\ 0 & \text{si } k\neq j.\end{cases}$$

Además en $UT_n(K)^{(-)}$ tenga en cuenta que $e_{ij}e_{kr}=e_{ij}e_{kr}-e_{kr}e_{ij}$, así entonces:

- Si $j=k$, $i=r$ entonces $e_{ij}e_{kr}=e_{ir}-e_{kj}$.
- Si $j=k$, $i\neq r$ entonces $e_{ij}e_{kr}=e_{ir}-0=e_{ir}$.
- Si $j\neq k$, $i=r$ entonces $e_{ij}e_{kr}=0-e_{kj}=-e_{kj}$.
- Si $j\neq k$, $i\neq r$ entonces $e_{ij}e_{kr}=0-0=0$.

Empleando lo anterior para $UT_3(K)^{(-)}$, se sigue:

$$\begin{cases} \varphi([e_{ii},e_{ii}])=\varphi(e_{ii}e_{ii}-e_{ii}e_{ii})=\varphi(0)=0 \\ \\ [\varphi(e_{ii}),\varphi(e_{ii})]=\begin{cases} (-e_{33})(-e_{33})-(-e_{33})(-e_{33})=0 & \text{si } i=1 \\ (-e_{22})(-e_{22})-(-e_{22})(-e_{22})=0 & \text{si } i=2 \\ (-e_{11})(-e_{11})-(-e_{11})(-e_{11})=0 & \text{si } i=3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi([e_{ii}, e_{13}]) = \begin{cases} \varphi(e_{13} - 0) = \varphi(e_{13}) = -e_{13} & \text{si } i = 1 \\ \varphi(0 - e_{13}) = \varphi(-e_{13}) = -\varphi(e_{13}) = e_{13} & \text{si } i = 3 \\ \varphi(0) = 0 & \text{si } i = 2 \end{cases} \\ \\ [\varphi(e_{ii}), \varphi(e_{13})] = \begin{cases} 0 - (-e_{13})(-e_{33}) = -e_{13} & \text{si } i = 1 \\ (-e_{11})(-e_{13}) - 0 = e_{13} & \text{si } i = 3 \\ 0 - 0 = 0 & \text{si } i = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi([e_{ii}, e_{12}]) = \begin{cases} \varphi(e_{12} - 0) = \varphi(e_{12}) = -e_{23} & \text{si } i = 1 \\ \varphi(0 - e_{12}) = \varphi(-e_{12}) = -(-e_{23}) = e_{23} & \text{si } i = 2 \\ \varphi(0) = 0 & \text{si } i = 3 \end{cases} \\ \\ [\varphi(e_{ii}), \varphi(e_{12})] = \begin{cases} 0 - (-e_{23})(-e_{33}) = -e_{23} & \text{si } i = 1 \\ (-e_{22})(-e_{23}) - 0 = e_{23} & \text{si } i = 2 \\ 0 - 0 = 0 & \text{si } i = 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi([e_{ii}, e_{23}]) = \begin{cases} \varphi(0) = 0 & \text{si } i = 1 \\ \varphi(e_{23} - 0) = \varphi(e_{23}) = -e_{12} & \text{si } i = 2 \\ \varphi(0 - e_{23}) = \varphi(-e_{23}) = -(-e_{12}) = e_{12} & \text{si } i = 3 \end{cases} \\ \\ [\varphi(e_{ii}), \varphi(e_{23})] = \begin{cases} 0 - 0 = 0 & \text{si } i = 1 \\ 0 - (-e_{12})(-e_{22}) = -e_{12} & \text{si } i = 2 \\ (-e_{11})(-e_{12}) - 0 = e_{12} & \text{si } i = 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi([e_{12}, e_{11}]) = \varphi(0 - e_{12}) = \varphi(-e_{12}) = -(-e_{23}) = e_{23} \\ [\varphi(e_{12}), \varphi(e_{11})] = (-e_{23})(-e_{33}) - 0 = e_{23}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi([e_{12}, e_{22}]) = \varphi(e_{12} - 0) = -e_{23} \\ [\varphi(e_{12}), \varphi(e_{22})] = 0 - (-e_{23})(-e_{22}) = -e_{23}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi([e_{12}, e_{33}]) = \varphi(0 - 0) = \varphi(0) = 0 \\ [\varphi(e_{12}), \varphi(e_{33})] = (-e_{23})(-e_{11}) - (-e_{11})(-e_{23}) = 0 - 0 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi([e_{12}, e_{12}]) = \varphi(0 - 0) = \varphi(0) = 0 \\ [\varphi(e_{12}), \varphi(e_{12})] = (-e_{23})(-e_{23}) - (-e_{23})(-e_{23}) = 0 - 0 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi([e_{12},e_{13}])=\varphi(0-0)=\varphi(0)=0\\ [\varphi(e_{12}),\varphi(e_{13})]=(-e_{23})(-e_{13})-(-e_{13})(-e_{23})=0-0=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi([e_{12},e_{23}])=\varphi(e_{13}-0)=\varphi(e_{13})=-e_{13}\\ [\varphi(e_{12}),\varphi(e_{23})]=(-e_{23})(-e_{12})-(-e_{12})(-e_{23})=0-e_{13}=-e_{13}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi([e_{13},e_{11}])=\varphi(0-e_{13})=\varphi(-e_{13})=-(-e_{13})=e_{13}\\ [\varphi(e_{13}),\varphi(e_{11})]=(-e_{13})(-e_{33})-0=e_{13}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi([e_{13},e_{22}])=\varphi(0-0)=\varphi(0)=0\\ [\varphi(e_{13}),\varphi(e_{22})]=(-e_{13})(-e_{22})-(-e_{22})(-e_{13})=0-0=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi([e_{13},e_{33}])=\varphi(e_{13}-0)=\varphi(e_{13})=-e_{13}\\ [\varphi(e_{13}),\varphi(e_{33})]=(-e_{13})(-e_{11})-(-e_{11})(-e_{13})=0-e_{13}=-e_{13}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi([e_{13},e_{12}])=\varphi(0-0)=\varphi(0)=0\\ [\varphi(e_{13}),\varphi(e_{12})]=(-e_{13})(-e_{23})-(-e_{23})(-e_{13})=0-0=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi([e_{13},e_{13}])=\varphi(0-0)=\varphi(0)=0\\ [\varphi(e_{13}),\varphi(e_{13})]=(-e_{13})(-e_{13})-(-e_{13})(-e_{13})=0-0=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi([e_{13},e_{23}])=\varphi(0-0)=\varphi(0)=0\\ [\varphi(e_{13}),\varphi(e_{23})]=(-e_{13})(-e_{12})-(-e_{12})(-e_{13})=0-0=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi([e_{23},e_{11}])=\varphi(0-0)=\varphi(0)=0\\ [\varphi(e_{23}),\varphi(e_{11})]=(-e_{12})(-e_{33})-(-e_{33})(-e_{12})=0-0=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi([e_{23},e_{22}])=\varphi(0-e_{23})=\varphi(-e_{23})=-(-e_{12})=e_{12}\\ [\varphi(e_{23}),\varphi(e_{22})]=(-e_{12})(-e_{22})-(-e_{22})(-e_{12})=e_{12}-0=e_{12}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi([e_{23},e_{33}])=\varphi(e_{23}-0)=\varphi(e_{23})=-e_{12}\\ [\varphi(e_{23}),\varphi(e_{33})]=(-e_{12})(-e_{11})-(-e_{11})(-e_{12})=0-e_{12}=-e_{12}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi([e_{23},e_{12}])=\varphi(0-e_{13})=\varphi(-e_{13})=-(-e_{13})=e_{13}\\ [\varphi(e_{23}),\varphi(e_{12})]=(-e_{12})(-e_{23})-(-e_{23})(-e_{12})=e_{13}-0=e_{13}.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\varphi([e_{23},e_{23}])=\varphi(0-0)=\varphi(0)=0\\ [\varphi(e_{23}),\varphi(e_{23})]=(-e_{12})(-e_{12})-(-e_{12})(-e_{12})=0-0=0.\end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi([e_{23}, e_{13}]) = \varphi(0-0) = \varphi(0) = 0 \\ [\varphi(e_{23}), \varphi(e_{13})] = (-e_{12})(-e_{13}) - (-e_{13})(-e_{12}) = 0 - 0 = 0. \end{cases}$$

Concluyendo así que existe un homomorfismo entre la graduación inducida por $(\overline{1}, \overline{2})$ y la graduación inducida por $(\overline{2}, \overline{1})$.

Observación 2.1.17. Si $\eta = (g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}) \in G^{n-1}$, se obtiene una graduación elemental sobre $UT_n(K)^{(-)}$ poniendo $\mathrm{grad}(e_{i,i+1}) = g_i$ para todo $1 \leq i \leq n-1$.

Se denota por $(UT_n(K)^{(-)}, \eta)$ al álgebra de Lie $UT_n(K)^{(-)}$ dotada con la graduación proveniente de η.

Lema 2.1.18. Si $\eta \in G^{n-1}$, luego entre $(UT_n(K)^{(-)}, \eta)$ y $(UT_n(K)^{(-)}, \mathrm{rev}\,\eta)$ hay un isomorfismo de álgebras G-graduadas.

Demostración. Defina ψ así:

$$\begin{aligned} \psi : (UT_n(K)^{(-)}, \eta) &\longrightarrow (UT_n(K)^{(-)}, \mathrm{rev}\,\eta) \\ e_{ij} &\longmapsto -e_{n-j+1,n-i+1} \end{aligned}$$

Puesto que ψ se encuentra definido en la base, entonces ψ es transformación lineal. Además, se debe probar que $\psi([A,B]) = \psi(A)\psi(B) - \psi(B)\psi(A) = [\psi(A), \psi(B)]$ para todo $A, B \in (UT_n(K)^{(-)}, \eta)$. Para mostrar lo anterior, se toman elementos de la base, esto permite que se cumpla para todo elemento en $(UT_n(K)^{(-)}, \eta)$.

Dados e_{ij}, e_{km} en $(UT_n(K)^{(-)}, \eta)$, se quiere ver que $\psi([e_{ij}, e_{km}]) = [\psi(e_{ij}), \psi(e_{km})]$. Note que $\psi([e_{ij}, e_{km}]) = \psi(e_{ij}e_{km} - e_{km}e_{ij})$, de donde se pueden considerar los siguientes casos con respecto a $e_{ij}e_{km} - e_{km}e_{ij}$:

- Caso 1: Si $j \neq k$ y $m \neq i$, entonces $e_{ij}e_{km} - e_{km}e_{ij} = 0$, en ese sentido, puesto que ψ es transformación lineal

$$\psi([e_{ij}, e_{km}]) = \psi(e_{ij}e_{km} - e_{km}e_{ij}) = \psi(0) = 0,$$

pero

$$\begin{aligned} 0 = 0 - 0 &= (-e_{n-j+1,n-i+1})(-e_{n-m+1,n-k+1}) - (-e_{n-m+1,n-k+1})(-e_{n-j+1,n-i+1}) \\ &= [-e_{n-j+1,n-i+1}, -e_{n-m+1,n-k+1}] = [\psi(e_{ij}), \psi(e_{km})]. \end{aligned}$$

- Caso 2: Si $j = k$ y $m = i$, entonces

$$\begin{aligned} \psi([e_{ij}, e_{km}]) &= \psi(e_{ij}e_{km} - e_{km}e_{ij}) = \psi(e_{im} - e_{kj}) \\ &= \psi(e_{im}) - \psi(e_{kj}) = -e_{n-m+1,n-i+1} + e_{n-j+1,n-k+1} \\ &= e_{n-j+1,n-k+1} - e_{n-m+1,n-i+1}, \text{ (puesto que } j = k \text{ y } m = i,) \\ &= (-e_{n-j+1,n-i+1})(-e_{n-m+1,n-k+1}) - (-e_{n-m+1,n-k+1})(-e_{n-j+1,n-i+1}) \\ &= \psi(e_{ij})\psi(e_{km}) - \psi(e_{km})\psi(e_{ij}) \\ &= [\psi(e_{ij}), \psi(e_{km})]. \end{aligned}$$

- Caso 3: Si $j = k$ y $m \neq i$, entonces $e_{ij}e_{km} - e_{km}e_{ij} = e_{ij}e_{km} = e_{im}$. En ese sentido

$$\begin{aligned}
\psi([e_{ij}, e_{km}]) &= \psi(e_{ij}e_{km} - e_{km}e_{ij}) \\
&= \psi(e_{ij}e_{km} + 0) \\
&= \psi(e_{im}) + \psi(0) \\
&= 0 - e_{n-m+1,n-i+1} \\
&= (-e_{n-j+1,n-i+1})(-e_{n-m+1,n-k+1}) - (-e_{n-m+1,n-k+1})(-e_{n-j+1,n-i+1}) \\
&= \psi(e_{ij})\psi(e_{km}) - \psi(e_{km})\psi(e_{ij}) \\
&= [\psi(e_{ij}), \psi(e_{km})].
\end{aligned}$$

Análogamente para el caso $m = i$ y $j \neq k$. De lo anterior se concluye que

$$\psi([A,B]) = \psi(A)\psi(B) - \psi(B)\psi(A) = [\psi(A), \psi(B)]\ .$$

Lo que hace que ψ sea homomorfismo; biyectivo por construcción, es decir, isomorfismo.

Por último observe que ψ respeta la graduación. Esto es: $\psi(A^g) \subseteq B^g$ para todo $g \in G$ con $A^g \in (UT_n(K)^{(-)}\ ,\ \eta)$ y $B^g \in (UT_n(K)^{(-)}\ ,\ \operatorname{rev}\eta)$ lo que significa que si $a \in A^g$ entonces $\psi(a) \in B^g$.

Suponga que al graduar con η, $e_{ij} \in UT_n(K)^{(-)^g}$, de donde $\operatorname{grad}(e_{ij}) = g$ se obtiene mediante $\operatorname{grad}(e_{ij}) = \operatorname{grad}(e_{i,i+1})\operatorname{grad}(e_{i+1,i+2})\operatorname{grad}(e_{i+2,i+3}) \dots \operatorname{grad}(e_{j-1,j})$. Así mismo, la secuencia $\operatorname{rev}\eta$ corresponde:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad}(e_{ij}) \\
&= \operatorname{grad}(e_{n-i,n-i+1})\operatorname{grad}(e_{n-i-1,n-i})\operatorname{grad}(e_{n-i-2,n-i-1})\operatorname{grad}(e_{n-i-3,n-i-2})\dots\operatorname{grad}(e_{n-j+1,n-j+2}).
\end{aligned}$$

Así entonces:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{grad}(e_{n-j+1,n-i+1}) \\
&= \operatorname{grad}(e_{\cancel{n}-(\cancel{n}-j+1),\cancel{n}-(\cancel{n}-j+\cancel{1})+\cancel{1}})\operatorname{grad}(e_{\cancel{n}-(\cancel{n}-j+1)-1,\cancel{n}-(\cancel{n}-j+1)})\operatorname{grad}(e_{\cancel{n}-(\cancel{n}-j+1)-2,\cancel{n}-(\cancel{n}-j+1)-1})\cdots \\
&\operatorname{grad}(e_{\cancel{n}-(\cancel{n}-i+1)+1,\cancel{n}-(\cancel{n}-i+1)+2}),
\end{aligned}$$

es decir :

$$\operatorname{grad}(e_{n-j+1,n-i+1}) = \operatorname{grad}(e_{j-1,j})\operatorname{grad}(e_{j-2,j-1})\operatorname{grad}(e_{j-3,j-2}) \quad \dots \quad \operatorname{grad}(e_{i,i+1}). \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 2.1.19. Dada $\eta = (\operatorname{grad} e_{12}, \operatorname{grad} e_{23}, \operatorname{grad} e_{34}, \operatorname{grad} e_{45}) = (\overline{3}, \overline{4}, \overline{2}, \overline{5})$, con $e_{ij} \in UT_5(K)^{(-)}$ y $\operatorname{grad} e_{ij} \in (\mathbb{Z}_6, +)$. Entonces:

$\operatorname{grad}(e_{13}) = \operatorname{grad}(e_{12}) + \operatorname{grad}(e_{23}) = \overline{3} + \overline{4} = \overline{1}.$

$\operatorname{grad}(e_{14}) = \operatorname{grad}(e_{12}) + \operatorname{grad}(e_{23}) + \operatorname{grad}(e_{34}) = \overline{3} + \overline{4} + \overline{2} = \overline{3}.$

$\operatorname{grad}(e_{15}) = \operatorname{grad}(e_{12}) + \operatorname{grad}(e_{23}) + \operatorname{grad}(e_{34}) + \operatorname{grad}(e_{45}) = \overline{3} + \overline{4} + \overline{2} + \overline{5} = \overline{2}.$

$\operatorname{grad}(e_{24}) = \operatorname{grad}(e_{23}) + \operatorname{grad}(e_{34}) = \overline{4} + \overline{2} = \overline{0}.$

$\operatorname{grad}(e_{25}) = \operatorname{grad}(e_{23}) + \operatorname{grad}(e_{34}) + \operatorname{grad}(e_{45}) = \overline{4} + \overline{2} + \overline{5} = \overline{5}.$

$\operatorname{grad}(e_{35}) = \operatorname{grad}(e_{34}) + \operatorname{grad}(e_{45}) + \operatorname{grad}(e_{56}) = \overline{2} + \overline{5} = \overline{1}.$

$\operatorname{grad}(e_{11}) = \operatorname{grad}(e_{22}) = \operatorname{grad}(e_{33}) = \operatorname{grad}(e_{44}) = \operatorname{grad}(e_{55}) = \operatorname{grad}(e_{66}) = \overline{0}.$

Ahora observe la graduación con la rev η, es decir con rev $\eta = (\overline{5}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{3})$. Así se obtiene que :

$\operatorname{grad}(e_{13}) = \operatorname{grad}(e_{12}) + \operatorname{grad}(e_{23}) = \overline{5} + \overline{2} = \overline{1}.$

$\operatorname{grad}(e_{14}) = \operatorname{grad}(e_{12}) + \operatorname{grad}(e_{23}) + \operatorname{grad}(e_{34}) = \overline{5} + \overline{2} + \overline{4} = \overline{5}.$

$\operatorname{grad}(e_{15}) = \operatorname{grad}(e_{12}) + \operatorname{grad}(e_{23}) + \operatorname{grad}(e_{34}) + \operatorname{grad}(e_{45}) = \overline{5} + \overline{2} + \overline{4} + \overline{3} = \overline{2}.$

$\operatorname{grad}(e_{24}) = \operatorname{grad}(e_{23}) + \operatorname{grad}(e_{34}) = \overline{2} + \overline{4} = \overline{0}.$

$\operatorname{grad}(e_{25}) = \operatorname{grad}(e_{23}) + \operatorname{grad}(e_{34}) + \operatorname{grad}(e_{45}) = \overline{2} + \overline{4} + \overline{3} = \overline{3}.$

$\operatorname{grad}(e_{35}) = \operatorname{grad}(e_{34}) + \operatorname{grad}(e_{45}) + \operatorname{grad}(e_{56}) = \overline{4} + \overline{3} = \overline{1}.$

$\operatorname{grad}(e_{11}) = \operatorname{grad}(e_{22}) = \operatorname{grad}(e_{33}) = \operatorname{grad}(e_{44}) = \operatorname{grad}(e_{55}) = \operatorname{grad}(e_{66}) = \overline{0}.$

De acuerdo con lo anterior, las siguientes son las matrices graduación de $(UT_5(K)^{(-)}\ ,\ \eta)$ y $(UT_5(K)^{(-)}\ ,\ \operatorname{rev}\eta)$ respectivamente

$$
\mathrm{M}_{\mathrm{grad}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{3} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{2} \\ & \overline{0} & \overline{4} & \overline{0} & \overline{5} \\ & & \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \\ & & & \overline{0} & \overline{5} \\ & & & & \overline{0} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{M}_{\mathrm{grad}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{5} & \overline{1} & \overline{5} & \overline{2} \\ & \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{3} \\ & & \overline{0} & \overline{4} & \overline{1} \\ & & & \overline{0} & \overline{3} \\ & & & & \overline{0} \end{pmatrix}
$$

Por último note que la primera fila de la matriz graduación de $(UT_5(K)^{(-)}, \eta)$ termina siendo de forma reversa la última columna de la matriz graduación de $(UT_5(K)^{(-)}, \operatorname{rev}\eta)$, la segunda fila de la matriz graduación de $(UT_5(K)^{(-)}, \eta)$ termina siendo de forma reversa la penúltima columna de la matriz graduación de $(UT_5(K)^{(-)}, \operatorname{rev}\eta)$, y así sucesivamente, es decir, puesto que las matrices son cuadradas, la i-ésima fila de la matriz graduación de $(UT_5(K)^{(-)}, \eta)$ termina siendo de forma reversa la $n-i+1$–ésima columna de la matriz graduación $(UT_5(K)^{(-)}, \operatorname{rev}\eta)$.

2.2. Secuencias

Definición 2.2.1.

a) La secuencia $\mu = (g_1, g_2, ..., g_m) \in G^m$ es **buena secuencia** con respecto a la graduación elemental definida por la secuencia η si existen matrices unidad estrictamente triangulares superiores $r_1, r_2, r_3, ..., r_m \in UT_n(K)^{(-)}$ tal que $\operatorname{grad} r_i = g_i$ con $i = 1, 2, 3, ..., m$ y además $[r_1, r_2, ..., r_m] \neq 0$. Si μ no es η-buena secuencia, entonces se llama η-**mala secuencia**.

Ejemplo 2.2.2.

- Dado $\eta = (\overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{1}) \in \mathbb{Z}_5^4$, de acuerdo con el Lema 2.1.8 se obtiene la siguiente matriz graduación sobre $UT_5(K)^{(-)}$:

$$\mathrm{M_{grad}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{2} & \overline{0} & \overline{4} & \overline{0} \\ & \overline{0} & \overline{3} & \overline{2} & \overline{3} \\ & & \overline{0} & \overline{4} & \overline{0} \\ & & & \overline{0} & \overline{1} \\ & & & & \overline{0} \end{pmatrix}$$

ahora note que si $\mu = (\overline{1}, \overline{4}, \overline{3})$, entonces :

$$\begin{array}{lll} \operatorname{grad}(r_1) \;,\; g_1 = \overline{1} & \text{osea que} & r_1 = e_{45}. \\ \operatorname{grad}(r_2) \;,\; g_2 = \overline{4} & \text{osea que} & r_2 = e_{14} \quad \text{o} \quad e_{34}. \\ \operatorname{grad}(r_3) \;,\; g_3 = \overline{3} & \text{osea que} & r_3 = e_{23} \quad \text{o} \quad e_{25}. \end{array}$$

en ese sentido, observe que:

$$[e_{45}, e_{34}, e_{25}] = [e_{45}e_{34} - e_{34}e_{45}, e_{25}] = [-e_{35}, e_{25}] = 0 - 0 = 0,$$

$$[e_{45}, e_{14}, e_{25}] = [e_{45}e_{14} - e_{14}e_{45}, e_{25}] = [-e_{15}, e_{25}] = 0 - 0 = 0,$$

$$[e_{45}, e_{14}, e_{23}] = [e_{45}e_{14} - e_{14}e_{45}, e_{23}] = [-e_{15}, e_{23}] = 0 - 0 = 0,$$

$$[e_{45}, e_{34}, e_{23}] = [e_{45}e_{34} - e_{34}e_{45}, e_{23}] = [0 - e_{35}, e_{23}] = [-e_{35}, e_{23}] = -e_{25} \neq 0,$$

de donde se puede concluir que μ es η-buena secuencia porque $[e_{45}, e_{34}, e_{23}] \neq 0$.

- Si $\mu = (\overline{0})$, entonces μ es η-buena secuencia, puesto que $[e_{13}] = e_{13} \neq 0$.
- Dado $\eta = (\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}) \in \mathbb{Z}_4^3$, se obtiene la siguiente matriz graduación en $UT_4(K)^{(-)}$:

$$\mathrm{M}_{\mathrm{grad}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{3} & \overline{2} \\ & \overline{0} & \overline{2} & \overline{1} \\ & & \overline{0} & \overline{3} \\ & & & \overline{0} \end{pmatrix}$$

note que si $\mu = (\overline{1}, \overline{2})$, entonces $[r_1, r_2] \neq 0$.

$[e_{12}e_{23}] = e_{12}e_{23} - e_{23}e_{12} = e_{13} - 0 = e_{13} \neq 0$, por el resultado obtenido se concluye que μ es η-buena secuencia.

Por último se presenta el caso para el cual una n–tupla como $\mu = (\overline{1}, \overline{2}, \overline{2})$ es η–mala secuencia, es decir, si $\mu = (\overline{1}, \overline{2}, \overline{2})$, se tiene que:

grad(r_1) , $g_1 = \overline{1}$ osea que $r_1 = e_{12}$ o e_{24}.
grad(r_2) , $g_2 = \overline{2}$ osea que $r_2 = e_{23}$ o e_{14}.
grad(r_3) , $g_3 = \overline{2}$ osea que $r_3 = e_{23}$ o e_{14}.

En ese orden de ideas, a continuación se muestra que todas las posibles operaciones entre las matrices unidad que respetan los grados propuestos en $\mu = (\overline{1}, \overline{2}, \overline{2})$, dan como resultado cero, esto es:

$$[e_{12}, e_{23}, e_{14}] = [e_{12}e_{23} - e_{23}e_{12}, e_{14}] = [e_{13} - 0, e_{14}] = e_{13}e_{14} - e_{14}e_{13} = 0 - 0 = 0.$$

$$[e_{12}, e_{23}, e_{23}] = [e_{12}e_{23} - e_{23}e_{12}, e_{23}] = [e_{13}, e_{23}] = e_{13}e_{23} - e_{23}e_{13} = 0 - 0 = 0.$$

$$[e_{12}, e_{14}, e_{14}] = [e_{12}e_{14} - e_{14}e_{12}, e_{14}] = [0 - 0, e_{14}] = 0(e_{14}) - (e_{14})0 = 0 - 0 = 0.$$

$$[e_{12}, e_{14}, e_{23}] = [e_{12}e_{14} - e_{14}e_{12}, e_{23}] = [0 - 0, e_{23}] = 0(e_{23}) - (e_{23})0 = 0 - 0 = 0.$$

$$[e_{24}, e_{23}, e_{14}] = [e_{24}e_{23} - e_{23}e_{24}, e_{14}] = [0 - 0, e_{14}] = 0(e_{14}) - (e_{14})0 = 0 - 0 = 0.$$

$$[e_{24}, e_{23}, e_{23}] = [e_{24}e_{23} - e_{23}e_{24}, e_{23}] = [0 - 0, e_{23}] = 0(e_{23}) - (e_{23})0 = 0 - 0 = 0.$$

$$[e_{24}, e_{14}, e_{14}] = [e_{24}e_{14} - e_{14}e_{24}, e_{14}] = [0 - 0, e_{14}] = 0(e_{14}) - (e_{14})0 = 0 - 0 = 0.$$

$$[e_{24}, e_{14}, e_{23}] = [e_{24}e_{14} - e_{14}e_{24}, e_{23}] = [0 - 0, e_{23}] = 0(e_{23}) - (e_{23})0 = 0 - 0 = 0.$$

Así se concluye que μ es η–mala secuencia.

b) Dado $g \in G$ y $m \in \mathbf{N}$, tenga en cuenta el siguiente polinomio:

$$f_m^{(g)} = \begin{cases} x_m^{(g)} & \text{si} \quad g \neq \mathrm{id}_G \\ [x_{2m-1}^{(0)}, x_{2m}^{(0)}] & \text{si} \quad g = \mathrm{id}_G \end{cases}$$

c) Dado $\mu = (g_1, g_2, g_3, \ldots, g_m)$ se define una identidad polinomial como sigue:

$$f_\mu = [f_1^{(g_1)}, f_2^{(g_2)}, \ldots, f_m^{(g_m)}].$$

Ejemplo 2.2.3. Dado $\eta = (\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}) \in \mathbb{Z}_4^3$ en el Ejemplo 2.2.2 se obtuvo que $\mu = (\overline{1}, \overline{2}, \overline{2})$ es η-mala secuencia.
Observe los polinomios $f_m^{(g)}$:

$$f_1^{(\overline{1})} = x_1^{(\overline{1})}, \qquad f_2^{(\overline{2})} = x_2^{(\overline{2})}, \qquad f_3^{(\overline{2})} = x_3^{(\overline{2})}.$$

Así, la identidad polinomial se expresa:

$$f_\mu = [x_1^{(\overline{1})}, x_2^{(\overline{2})}, x_3^{(\overline{2})}] = [x_1^{(\overline{1})} x_2^{(\overline{2})} - x_2^{(\overline{2})} x_1^{(\overline{1})}, x_3^{(\overline{2})}], \text{ es decir,}$$

$$f_\mu = (x_1^{(\overline{1})} x_2^{(\overline{2})} - x_2^{(\overline{2})} x_1^{(\overline{1})}) x_3^{(\overline{2})} - x_3^{(\overline{2})} (x_1^{(\overline{1})} x_2^{(\overline{2})} - x_2^{(\overline{2})} x_1^{(\overline{1})}).$$

A continuación, se verifica la identidad polinomial para un posible caso, es decir, se reemplazan matrices en la identidad polinomial que correspondan al grado con el cual se encuentra marcada la variable en dicha identidad, observe:

$$\begin{aligned} &(e_{12}e_{14} - e_{23}e_{24})e_{14} - e_{23}(e_{24}e_{14} - e_{14}e_{24}) \\ &= (\ 0 \ - \ 0\ )e_{14} \ - \ e_{23}(\ 0 \ - \ 0\ ) \\ &= \quad 0\ (e_{14}) \quad - \quad (e_{23})\ 0 \quad = \quad 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 2.2.4. En este ejemplo observe que si μ es η-buena secuencia, se obtiene una expresión que no es identidad polinomial para la graduación $(UT_5(K)^{(-)}, \eta)$. En ese sentido, dado $\eta = (\overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{1}) \in \mathbb{Z}_5$ en el Ejemplo 2.2.2 se obtuvo que $\mu = (\overline{1}, \overline{4}, \overline{3})$ es η-buena secuencia.
Observe los polinomios $f_m^{(g)}$:

$$f_1^{(\overline{1})} = x_1^{(\overline{1})}, \qquad f_2^{(\overline{4})} = x_2^{(\overline{4})}, \qquad f_3^{(\overline{3})} = x_3^{(\overline{3})}.$$

Se expresa una posible identidad polinomial como sigue:

$$f_\mu = [x_1^{(\overline{1})}, x_2^{(\overline{4})}, x_3^{(\overline{3})}] = [x_1^{(\overline{1})} x_2^{(\overline{4})} - x_2^{(\overline{4})} x_1^{(\overline{1})}, x_3^{(\overline{3})}], \text{ es decir,}$$

$$f_\mu = (x_1^{(\overline{1})} x_2^{(\overline{4})} - x_2^{(\overline{4})} x_1^{(\overline{1})}) x_3^{(\overline{3})} - x_3^{(\overline{3})} (x_1^{(\overline{1})} x_2^{(\overline{4})} - x_2^{(\overline{4})} x_1^{(\overline{1})}).$$

A continuación, se verifica que f_μ no es identidad polinomial, para al menos un reemplazo de matrices identidad que pertenecen a $UT_5(K)^{(-)}$. Observe:

$$\begin{aligned} f_\mu &= (e_{45}e_{34} - e_{14}e_{45})e_{23} \; - \; e_{23}(e_{45}e_{14} - e_{34}e_{45}) \\ &= (\;\;0 \;\; - \;\; e_{14}\;\;)e_{23} \; - \; e_{23}(\;0 \;\; - \;\; e_{35}\;\;) \\ &= \;\; (-e_{14})\;(e_{23}) \qquad - \qquad (e_{23})\;(-e_{35}) \\ &= \qquad 0 \qquad\qquad + \qquad\qquad e_{25} \;\; = \;\; e_{25}. \end{aligned}$$

Lema 2.2.5. El polinomio multilineal f_μ correspondiente a la secuencia $\mu \in G^m$ es una identidad polinomial G-graduada para $(UT_n(K)^{(-)}, \eta)$ si y solo si μ es η-mala secuencia.

Demostración. Note primero que si μ en η-mala secuencia entonces f_μ es identidad polinomial G-graduada.

Suponga que f_μ no es identidad G-graduada para $((UT_n(K)^{(-)}, \eta)$, en ese sentido existen elementos homogéneos $r_1, r_2, r_3, ..., r_t \in UT_n(K)^{(-)}$ tal que $f_\mu(r_1, r_2, r_3, ..., r_t) \neq 0$. Observe que si $g \neq 0$ entonces $f_m^{(g)} = x_m^{(g)}$ y esta evaluación daría un elemento del radical de Jacobson de $UT_n(K)^{(-)}$, de la misma manera si $g = 0$ entonces $f_m^{(g)} = [x_{2m-1}^{(g)}, x_{2m}^{(g)}]$ y alguna evaluación de matrices unidad sobre $f_m^{(g)}$ daría $x_{2m-1}^{(0)}x_{2m}^{(0)} - x_{2m}^{(0)}x_{2m-1}^{(0)}$ que también sería una matriz del radical de Jacobson, lo que implica que μ es η-buena secuencia.

Ahora, observe que si f_μ es identidad polinomial G-graduada entonces μ es η-mala secuencia, para ello suponga que μ es η-buena secuencia, en ese sentido, existe una secuencia de m matrices unidad e_{ij} en el radical de Jacobson de $UT_n(K)^{(-)}$ tal que

$$[e_{ij_1}, e_{ij_2}, e_{ij_3}, ..., e_{ij_m}] \neq 0. \tag{2.1}$$

Note que si el grado de e_{ij} es 0, se puede evaluar el polinomio $f_m^{(g)} = [x_{2m-1}, x_{2m}]$ en e_{ij} y e_{ii}. Si el grado de e_{ij} es diferente de 0, entonces $f_m^{(g_i)} = x_m^{(g_i)}$ y la matriz e_{ij} es elemento homogéneo de $UT_n(K)^{(-)}$, por lo anterior y la Ecuación (2.1), la evaluación en f_μ es diferente de cero, es decir que f_μ no es identidad polinomial. ■

2.3. Permutaciones y condición de orden

Definición 2.3.1. Sea t un entero tal que $1 \leqslant t \leqslant m$. Una permutación $\sigma \in S_m$ satisface la t-**Lie condición de orden** si:

a) $\sigma(t) = 1$.

b) Dados $k_1, k_2 \geq 0$ tal que $k_1 + k_2 < m - 1$ con $t - k_1 \geq 1$ y $t + k_2 \leq m$, si $\{\sigma(t-k_1), \sigma(t-k_1+1), ..., \sigma(t+k_2)\} = \{1, 2, ..., k_1+k_2+1\}$, entonces:
$t-k_1-1 \geq 1$ y $\sigma(t-k_1-1) = k_1+k_2+2$ o $t+k_2+1 \leq m$ y $\sigma(t+k_2+1) = k_1+k_2+2$.

Observación 2.3.2.

- Se denota por S_m al grupo simétrico de permutaciones obtenidas de símbolos $1, 2, 3, ..., m$.
- Si $\sigma \in S_m$, se escribe entonces 2 filas, la primera fila se compone de los enteros i tal que $1 \leqslant i \leqslant m$. La segunda fila consta de los respectivos $\sigma(i)$ debajo de cada i.
- Se escribe $J_m^t = \{ \ \sigma \in S_m \ \ | \ \ \sigma$ satisface la t-Lie condición de orden $\}$ y $J_m = \bigcup_{t=1}^{m} \ J_m^t$.

Ejemplo 2.3.3. Considere la siguiente permutación:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

observe que $\sigma \in S_6$ satisface la t-Lie condición de orden, es decir cumple la Definición 2.3.1 .

a) Note que $\sigma(2) = 1$, por lo tanto $t = 2$.

b) $k_1, k_2 \geq 0$ tal que $t - k_1 \geq 1$ y $t + k_2 \leqslant m$, de donde $k_1 \leqslant 1$ y $k_2 \leqslant 4$ pues $t = 2$ y $m = 6$.

De acuerdo con lo anterior, teniendo en cuenta que $k_1 + k_2 < m - 1$, en este caso $k_1 + k_2 < 5$:

- Si $k_1 = 0$ y $k_2 = 0$, entonces

  $\{\sigma(t-k_1), \sigma(t-k_1+1), ..., \sigma(t+k_2)\} = \{1, 2, ..., k_1+k_2+1\}$ corresponde a: $\{\sigma(2)\} = \{1\}$

  luego $t+k_2+1 \leqslant m$ y $\sigma(t+k_2+1) = k_1+k_2+2$, es decir $3 \leqslant 6$ y $\sigma(3) = 2 = k_1+k_2+2$.

- Si $k_1 = 0$ y $k_2 = 1$, se tiene que

  $\{\sigma(t-k_1), \sigma(t-k_1+1), ..., \sigma(t+k_2)\} = \{1, 2, ..., k_1+k_2+1\}$ corresponde a: $\{\sigma(2), \sigma(3)\} = \{1, 2\}$

  luego $t+k_2+1 \leqslant m$ y $\sigma(t+k_2+1) = k_1+k_2+2$, es decir $4 \leqslant 6$ y $\sigma(4) = 3 = k_1+k_2+2$.

- Si $k_1 = 0$ y $k_2 = 2$, entonces

  $\{\sigma(t-k_1), \sigma(t-k_1+1), ..., \sigma(t+k_2)\} = \{1, 2, ..., k_1+k_2+1\}$ corresponde a:

  $$\{\sigma(2), \sigma(3), \sigma(4)\} = \{1, 2, 3\},$$

  luego $t-k_1-1 \geq 1$ y $\sigma(t-k_1-1) = k_1+k_2+2$, es decir $1 \geq 1$ y $\sigma(1) = 4 = k_1+k_2+2$.

- Si $k_1 = 0$ y $k_2 = 3$, entonces

  $\{\sigma(t-k_1), \sigma(t-k_1+1), \dots, \sigma(t+k_2)\} = \{1, 2, \dots, k_1+k_2+1\}$ corresponde a:

  $\{\sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5)\} = \{1, 2, 3, 5\}$. No cumple la hipótesis pues:

  $\{1, 2, \dots, k_1+k_2+1\} \neq \{1, 2, 3, 5\}$.

- Si $k_1 = 0$ y $k_2 = 4$, se tiene que

  $\{\sigma(t-k_1), \sigma(t-k_1+1), \dots, \sigma(t+k_2)\} = \{1, 2, \dots, k_1+k_2+1\}$ lo cual corresponde a:

  $\{\sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5), \sigma(6)\} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$. No cumple la hipótesis pues:

  $\{1, 2, \dots, k_1+k_2+1\} \neq \{1, 2, 3, 5, 6\}$.

- Si $k_1 = 1$ y $k_2 = 0$, se tiene que

  $\{\sigma(t-k_1), \sigma(t-k_1+1), \dots, \sigma(t+k_2)\} = \{1, 2, \dots, k_1+k_2+1\}$, esto corresponde a:

  $\{\sigma(1), \sigma(2)\} = \{4, 1\}$. No cumple la hipótesis pues: $\{1, 2, \dots, k_1+k_2+1\} \neq \{4, 1\}$.

- Si $k_1 = 1$ y $k_2 = 1$, entonces:

  $\{\sigma(t-k_1), \sigma(t-k_1+1), \dots, \sigma(t+k_2)\} = \{1, 2, \dots, k_1+k_2+1\}$, lo cual corresponde a:

  $\{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)\} = \{4, 1, 2\}$. No cumple hipótesis pues: $\{1, 2, \dots, k_1+k_2+1\} \neq \{4, 1, 2\}$.

- Si $k_1 = 1$ y $k_2 = 2$, se tiene que

  $\{\sigma(t-k_1), \sigma(t-k_1+1), \dots, \sigma(t+k_2)\} = \{1, 2, \dots, k_1+k_2+1\}$ corresponde a:

  $$\{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4)\} = \{4, 1, 2, 3\},$$

  luego $t+k_2+1 \leqslant m$ y $\sigma(t+k_2+1) = k_1+k_2+2$, es decir $5 \leqslant 6$ y $\sigma(5) = 5 = k_1+k_2+2$.

- Si $k_1 = 1$ y $k_2 = 3$, se tiene

  $\{\sigma(t-k_1), \sigma(t-k_1+1), \dots, \sigma(t+k_2)\} = \{1, 2, \dots, k_1+k_2+1\}$ lo que corresponde a:

  $$\{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5)\} = \{4, 1, 2, 3, 5\},$$

  luego $t+k_2+1 \leqslant m$ y $\sigma(t+k_2+1) = k_1+k_2+2$, es decir $6 \leqslant 6$ y $\sigma(6) = 6 = k_1+k_2+2$.

- Si $k_1 = 1$ y $k_2 = 4$ no cumple la hipótesis, pues $k_1 + k_2$ no es menor que $m - 1$.

De lo anterior se puede concluir que σ cumple la t-Lie condición de orden. Identificando el valor $t = 2$, para todos los posibles valores de k_1 y k_2 que cumplen la hipótesis de la Definición 2.3.1 se puede verificar que $t - k_1 - 1 \geq 1$ y $\sigma(t - k_1 - 1) = k_1 + k_2 + 2$ ó $t + k_2 + 1 \leq m$ y $\sigma(t + k_2 + 1) = k_1 + k_2 + 2$.

Ejemplo 2.3.4. Dada la siguiente permutación:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

note que $\tau \in S_6$ no satisface la t-Lie condición de orden:

a) Observe que $\sigma(3) = 1$, por lo tanto $t = 3$.

b) $k_1, k_2 \geq 0$ tal que $t - k_1 \geq 1$ y $t + k_2 \leqslant m$, de donde $k_1 \leqslant 2$ y $k_2 \leqslant 3$ pues $t = 3$ y $m = 6$.

Ahora observe que los valores $k_1 = 2$ y $k_2 = 0$ cumplen $k_1 + k_2 < m - 1$ y hacen que τ no cumpla las características de t-Lie condición de orden:

- Si $k_1 = 2$ y $k_2 = 0$, $t = 3$, entonces:

  $\{\tau(t - k_1), \tau(t - k_1 + 1), ..., \tau(t + k_2)\} = \{1, 2, ..., k_1 + k_2 + 1\}$ corresponde a:

  $$\{\tau(1), \tau(2), \tau(3)\} = \{3, 2, 1\},$$

  luego $t - k_1 - 1 \geq 1$ y $\tau(t - k_1 - 1) = k_1 + k_2 + 2$, es decir $0 \geq 1$ (absurdo).

  o $t + k_2 + 1 \leqslant m$ y $\tau(t + k_2 + 1) = k_1 + k_2 + 2$, es decir $4 \leqslant 6$ y $\tau(4) = 6 \neq k_1 + k_2 + 2$ (no cumple), por lo tanto S_6 no satisface la t-Lie condición de orden.

Ejemplo 2.3.5. Dadas las permutaciones

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Note que con base en la Observación 2.3.2 se puede afirmar que $\sigma_1, \sigma_2 \in \jmath_3$ pero $\sigma_2 \circ \sigma_1 \not\in \jmath_3$, es decir:

a) Note que $\sigma_1(2) = 1$, por lo tanto $t = 2$.

b) $k_1, k_2 \geq 0$ tal que $t - k_1 \geq 1$ y $t + k_2 \leqslant m$, de donde $k_1 \leqslant 1$ y $k_2 \leqslant 1$ pues $t = 2$ y $m = 3$.

Con respecto a lo anterior,, teniendo en cuenta que $k_1+k_2 < m-1$, en este caso $k_1+k_2 < 2$:

- Si $k_1 = 0$ y $k_2 = 0$, entonces

  $\{\sigma_1(t-k_1), \sigma_1(t-k_1+1), ..., \sigma_1(t+k_2)\} = \{1, 2, ..., k_1+k_2+1\}$ corresponde a: $\{\sigma_1(2)\} = \{1\}$

  luego $t-k_1-1 \geq 1$ y $\sigma_1(t-k_1-1) = k_1+k_2+2$, es decir $1 \geq 1$ y $\sigma_1(1) = 2 = k_1+k_2+2$.

- Si $k_1 = 0$ y $k_2 = 1$, se tiene

  $\{\sigma_1(t-k_1), \sigma_1(t-k_1+1), ..., \sigma_1(t+k_2)\} = \{1, 2, ..., k_1+k_2+1\}$ lo que corresponde a:

  $\{\sigma_1(2), \sigma_1(3)\} = \{1, 3\}$. No se cumple la hipótesis, pues $\{1, 2, ..., k_1+k_2+1\} \neq \{1, 3\}$.

- Si $k_1 = 1$ y $k_2 = 0$, note que

  $\{\sigma_1(t-k_1), \sigma_1(t-k_1+1), ..., \sigma_1(t+k_2)\} = \{1, 2, ..., k_1+k_2+1\}$ esto es: $\{\sigma_1(1), \sigma_1(2)\} = \{2, 1\}$,

  luego $t+k_2+1 \leqslant m$ y $\sigma_1(t+k_2+1) = k_1+k_2+2$, es decir $3 \leqslant 3$ y $\sigma_1(3) = 3 = k_1+k_2+2$.

- Si $k_1 = 1$ y $k_2 = 1$ no satisface el segundo ítem de la Definición 2.3.1, pues debe cumplirse $k_1 + k_2 < m - 1$. En conclusión σ_1 cumple la t-Lie condición de orden.

Ahora, observe para σ_2 :

a) Note que $\sigma_2(2) = 1$, por lo tanto $t = 2$.

b) $k_1, k_2 \geq 0$ tal que $t - k_1 \geq 1$ y $t + k_2 \leqslant m$, de donde $k_1 \leqslant 1$ y $k_2 \leqslant 1$ pues $t = 2$ y $m = 3$.

Con respecto a lo anterior, teniendo en cuenta que $k_1+k_2 < m-1$, en este caso $k_1+k_2 < 2$:

- Si $k_1 = 0$ y $k_2 = 0$, se tiene que

  $\{\sigma_2(t-k_1), \sigma_2(t-k_1+1), ..., \sigma_2(t+k_2)\} = \{1, 2, ..., k_1+k_2+1\}$ corresponde a: $\{\sigma_2(2)\} = \{1\}$

  luego $t+k_2+1 \leqslant m$ y $\sigma_2(t+k_2+1) = k_1+k_2+2$, es decir $3 \leqslant 3$ y $\sigma_2(3) = 2 = k_1+k_2+2$.

- Si $k_1 = 0$ y $k_2 = 1$, entonces

  $\{\sigma_2(t-k_1), \sigma_2(t-k_1+1), ..., \sigma_2(t+k_2)\} = \{1, 2, ..., k_1+k_2+1\}$ lo que corresponde a:

  $\{\sigma_2(2), \sigma_2(3)\} = \{1, 2\}$.

  luego $t-k_1-1 \geq 1$ y $\sigma_2(t-k_1-1) = k_1+k_2+2$, es decir $1 \geq 1$ y $\sigma_2(1) = 3 = k_1+k_2+2$.

- Si $k_1 = 1$ y $k_2 = 0$, entonces

  $\{\sigma_2(t-k_1), \sigma_2(t-k_1+1), ..., \sigma_2(t+k_2)\} = \{1, 2, ..., k_1+k_2+1\}$ esto es: $\{\sigma_2(1), \sigma_2(2)\} = \{3, 1\}$. No cumple hipótesis pues: $\{1, 2, ..., k_1+k_2+1\} \neq \{3, 1\}$.

- Si $k_1 = 1$ y $k_2 = 1$ no cumple la hipótesis pues por la Definición 2.3.1 debe cumplirse que $k_1 + k_2 < m - 1$.

  Con lo realizado anteriormente se han agotado los posibles valores para k_1 y k_2 que cumplen la hipótesis de la Definición 2.3.1, concluyendo así que σ_2 satisface la t-Lie condición de orden.

Por otra parte, dada $\sigma_2 \circ \sigma_1$, observe que la composición mencionada no satisface la t-Lie condición de orden, es decir:

a) Note que $\sigma_2 \circ \sigma_1(1) = 1$, por lo tanto $t = 1$.

b) $k_1, k_2 \geq 0$ tal que $t - k_1 \geq 1$ y $t + k_2 \leqslant m$, de donde $k_1 \geq 0$ y $k_2 \leqslant 2$ pues $t = 1$ y $m = 3$.

De acuerdo con lo anterior, teniendo en cuenta que $k_1 + k_2 < m - 1$, en este caso $k_1 + k_2 < 2$:

- Si $k_1 = 0$ y $k_2 = 0$, entonces

  $\{\sigma_2\circ\sigma_1(t-k_1), \sigma_2\circ\sigma_1(t-k_1+1), ..., \sigma_2\circ\sigma_1(t+k_2)\} = \{1, 2, ..., k_1+k_2+1\}$ corresponde a:

  $$\{\sigma_2 \circ \sigma_1(1)\} = \{1\},$$

  luego $t - k_1 - 1 \geq 1$ es decir $1 - 0 - 1 \geq 1$, (absurdo)

  o

  $t+k_2+1 \leqslant m$ es decir $1+0+1 \leqslant 3$ y note que la condición $\sigma_2\circ\sigma_1(t+k_2+1) = k_1+k_2+2$ no se cumple, esto es:
  $\sigma_2 \circ \sigma_1(t + k_2 + 1) = \sigma_2 \circ \sigma_1(1 + 0 + 1) = \sigma_2 \circ \sigma_1(2) = 3 \neq k_1 + k_2 + 2$.

En conclusión para los valores $k_1 = 0$ y $k_2 = 0$, $\sigma_2 \circ \sigma_1$ no cumple la t-Lie condición de orden.

Observación 2.3.6. Se dice que $\sigma \in \jmath_m$ si se cumple respectivamente:

$$\sigma(1) > \sigma(2) > \ldots > \sigma(t) = 1, \sigma(t+1) < \ldots < \sigma(m) \text{ donde } \quad t = 1, \ldots, m.$$

Ejemplo 2.3.7. El presente ejercicio se refiere a las permutaciones de S_4, (recuerde que $|S_4| = 24$). Hallando las permutaciones, las primeras ocho responden a los elementos del grupo de simetrías del cuadrado, se emplea la letra ρ_i si se trata de rotación, μ_i en caso de que corresponda a imágenes reflejadas en bisectrices perpendiculares a los lados, se usa δ_i para los reflejos en las diagonales y para las demás permutaciones se emplea σ_i con $1 \leq i \leq 16$ para las cuales se dejan uno , dos o tres valores fijos en la permutación.

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \sigma_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con las Observaciones 2.3.2 y 2.3.6, se tiene:

$$J_4^{(1)} = \{\ \rho_0\ \}.$$
$$J_4^{(2)} = \{\ \sigma_5\ ,\ \ \sigma_{10}\ ,\ \rho_3\ \}.$$
$$J_4^{(3)} = \{\ \sigma_{13}\ ,\ \ \sigma_{15}\ ,\ \delta_1\ \}.$$
$$J_4^{(4)} = \{\ \mu_2\ \}.$$

En ese sentido:

$$J_m = \{\ \rho_0\ ,\ \rho_3\ ,\ \delta_1\ ,\ \mu_2\ ,\ \sigma_5\ ,\ \sigma_{10}\ ,\ \sigma_{13}\ ,\ \sigma_{15}\ \}.$$

Note que $\sigma_5 \circ \delta_1 = \sigma_6 \not\in J_m$, por lo tanto, en general, J_m no es subgrupo de S_m.

Teorema 2.3.8. Dadas $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_m$ matrices unidad estrictamente triangulares superiores tales que su producto usual asociativo $r_1 r_2 r_3 \ldots r_m \neq 0$. Entonces:

a) $r_{\sigma(1)} r_{\sigma(2)} r_{\sigma(3)} \ldots r_{\sigma(m)} \neq 0$ si y solo si $\sigma = \mathrm{id}$.

b) $r_{\sigma^{-1}(1)} r_{\sigma^{-1}(2)} r_{\sigma^{-1}(3)} \ldots r_{\sigma^{-1}(m)} \neq 0$ si y solo si $\sigma = \mathrm{id}$.

c) $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}, \ldots, r_{\sigma^{-1}(m)}] \neq 0$ si y solo si $\sigma \in J_m$.

Demostración.

a) $r_{\sigma(1)} r_{\sigma(2)} r_{\sigma(3)} \ldots r_{\sigma(m)} \neq 0$ si y solo si $\sigma = \mathrm{id}$.
$\Rightarrow$) Por hipótesis existen matrices unidad triangulares superiores tales que $r_1 r_2 \ldots r_m \neq 0$, es decir, existen $e_{i_n j_n}$ con $i_n < j_n$ tal que $i_{n+1} = j_n$ donde grad $e_{i_n j_n} = g_n$ para todo n, $1 \leq n \leq m-1$.
Ahora suponga que existen $p, k \in \{1,\mathrm{m}\}$ con $p \neq k$ tal que $\sigma(k) = p$, es decir $\sigma \neq \mathrm{id}$. En ese sentido:

- Caso 1: $j_{\sigma(k)} = j_p = i_{p+1} \neq i_{\sigma(k+1)}$, lo que hace que $r_{\sigma(k)} r_{\sigma(k+1)} = 0$, de donde $r_{\sigma(1)} r_{\sigma(2)} r_{\sigma(3)} \ldots r_{\sigma(m)} = 0$.

- Caso 2: $j_{\sigma(k)} = j_p = i_{p+1} = i_{\sigma(k+1)}$, esto es $r_{\sigma(k)} r_{\sigma(k+1)} \neq 0$, así existe $\sigma(k \oplus s) \neq p \oplus s$ con $s \in \{1, m\}$ y $\oplus$ la suma en $\mathbb{Z}_m$, lo que hace que $j_{\sigma(k \oplus (s-1))} = j_{p \oplus (s-1)} = i_{p \oplus s} \neq i_{\sigma(k \oplus s)}$, esto es $r_{\sigma(k \oplus (s-1))} r_{\sigma(k \oplus s)} = 0$ lo que implica $r_{\sigma(1)} r_{\sigma(2)} r_{\sigma(3)} \ldots r_{\sigma(m)} = 0$.

- Caso 3: $j_{\sigma(k)} = j_p = i_{p+1} = i_{\sigma(k+1)}$ de donde:

  $\sigma(k\oplus s) = p\oplus s$, $\sigma(k\oplus(s+1)) = p\oplus(s+1)...\sigma(k\oplus r) = p\oplus r = m$ y $\sigma(k\oplus(r+1)) = 1$ con $\oplus$ la suma en $\mathbb{Z}_m$ y $s,r \in \{1,\text{m}\}$. Observe que $\sigma(k\oplus r) = m$ y $\sigma(k\oplus(r+1)) = 1$, es decir que $r_{\sigma(k\oplus r)}r_{\sigma(k\oplus(r+1))} = r_m r_1$. Si $r_m r_1 \neq 0$ implica que $i_1 = j_m$ de donde $r_1 r_2 r_3 ... r_m = e_{i_1 j_m}$ cuenta con elemento en la diagonal principal pues $e_{i_1 j_1} e_{i_2 j_2} ... e_{i_n j_n} = e_{i_1 j_n}$, lo que contradice que la matriz sea estrictamente triangular superior. De aquí $i_1 \neq j_m$, así entonces $r_m r_1 = 0$, es decir, $r_{\sigma(k\oplus r)}r_{\sigma(k\oplus(r+1))} = 0$, luego $r_{\sigma(1)}r_{\sigma(2)}r_{\sigma(3)} \dots r_{\sigma(m)} = 0$.

$\Leftarrow$) Se tiene $r_1 r_2 r_3 \dots r_m \neq 0$ y además $\sigma = \text{id}$, así $r_1 r_2 r_3 \dots r_m = r_{\sigma(1)}r_{\sigma(2)}r_{\sigma(3)} \dots r_{\sigma(m)} \neq 0$.

b) $\Leftarrow$) Dado que 0*a* se cumple, si $\sigma = \text{id}$, se tiene que $\sigma = \sigma^{-1}$, así

$$r_{\sigma(1)}r_{\sigma(2)}r_{\sigma(3)} \dots r_{\sigma(m)} = r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)}r_{\sigma^{-1}(3)} \dots r_{\sigma^{-1}(m)},$$

es decir, $r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)}r_{\sigma^{-1}(3)} \dots r_{\sigma^{-1}(m)} \neq 0$.

$\Rightarrow$) Por hipótesis $r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)}r_{\sigma^{-1}(3)} \dots r_{\sigma^{-1}(m)} \neq 0$, note que por 0*a* se tiene que σ^{-1} es la identidad.

c) $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}, \dots, r_{\sigma^{-1}(m)}] \neq 0$ si y solo si $\sigma \in \jmath_m$.

$\Rightarrow$) Considere $\sigma \in S_m$ tal que $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}, \dots, r_{\sigma^{-1}(m)}] \neq 0$. Observe que si $m = 2$, $\sigma \in \jmath_m$. Esto es: $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}] = r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)} - r_{\sigma^{-1}(2)}r_{\sigma^{-1}(1)} \neq 0$, de donde $r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)} \neq 0$ o $r_{\sigma^{-1}(2)}r_{\sigma^{-1}(1)} \neq 0$, pues se trata de matrices triangulares superiores. Suponga que $\sigma^{-1}(1) = t$, en ese sentido $\sigma^{-1}(2) = t+1$ o $\sigma^{-1}(2) = t-1$, es decir :

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ t & t+1 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ t & t-1 \end{pmatrix},$$

en otras palabras

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En cualquier caso $\sigma \in \jmath_m$.

Ahora note que si $m = 3$ también $\sigma \in \jmath_m$. Suponga que $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}] \neq 0$ entonces:

$$\begin{aligned}
&[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}] \\
&= (r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)} - r_{\sigma^{-1}(2)}r_{\sigma^{-1}(1)})r_{\sigma^{-1}(3)} - r_{\sigma^{-1}(3)}(r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)} - r_{\sigma^{-1}(2)}r_{\sigma^{-1}(1)}) \\
&= (r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)})r_{\sigma^{-1}(3)} - (r_{\sigma^{-1}(2)}r_{\sigma^{-1}(1)})r_{\sigma^{-1}(3)} - r_{\sigma^{-1}(3)}(r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)}) + r_{\sigma^{-1}(3)}(r_{\sigma^{-1}(2)}r_{\sigma^{-1}(1)}) \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

De lo anterior, tenga en cuenta que si $r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)} \neq 0$ entonces $r_{\sigma^{-1}(2)}r_{\sigma^{-1}(1)} = 0$, observe: Si $\sigma^{-1}(1) = t$ entonces $\sigma^{-1}(2) = t+1$, cumpliendo $r_t r_{t+1} \neq 0$ (caso contrario, contradice la hipótesis del Teorema). Por otro lado, el producto $r_{\sigma^{-1}(2)}r_{\sigma^{-1}(1)}$ implicaría que $r_{t+1}r_t = 0$.

Así entonces se deben analizar dos casos:

- Caso 1: Si $r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)} \neq 0$ entonces:

  $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}] = (r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)})r_{\sigma^{-1}(3)} - r_{\sigma^{-1}(3)}(r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)})$ lo que hace que:

  $(r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)})r_{\sigma^{-1}(3)} \neq 0 \quad \text{o} \quad r_{\sigma^{-1}(3)}(r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)}) \neq 0.$

  Si $(r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)})r_{\sigma^{-1}(3)} \neq 0$ entonces:

  $\sigma^{-1}(1) = t\,, \quad \sigma^{-1}(2) = t+1, \quad \sigma^{-1}(3) = t+2$, de donde

  $$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ t & t+1 & t+2 \end{pmatrix} \qquad \text{lo que implica} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

  Si $r_{\sigma^{-1}(3)}(r_{\sigma^{-1}(1)}r_{\sigma^{-1}(2)}) \neq 0$, se tiene entonces que:

  $$\sigma^{-1}(1) = t, \sigma^{-1}(2) = t+1, \sigma^{-1}(3) = t-1,$$

  de donde

  $$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ t & t+1 & t-1 \end{pmatrix} \qquad \text{lo que implica} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

  En cualquiera de los casos $\sigma \in \jmath_m$.

- Caso 2: Si $r_{\sigma^{-1}(2)}r_{\sigma^{-1}(1)} \neq 0$ entonces:

  $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}] = -(r_{\sigma^{-1}(2)}r_{\sigma^{-1}(1)})r_{\sigma^{-1}(3)} + r_{\sigma^{-1}(3)}(r_{\sigma^{-1}(2)}r_{\sigma^{-1}(1)})$ lo que hace que:

  $(r_{\sigma^{-1}(2)}r_{\sigma^{-1}(1)})r_{\sigma^{-1}(3)} \neq 0 \quad \text{o} \quad r_{\sigma^{-1}(3)}(r_{\sigma^{-1}(2)}r_{\sigma^{-1}(1)}) \neq 0.$

  Si $(r_{\sigma^{-1}(2)}r_{\sigma^{-1}(1)})r_{\sigma^{-1}(3)} \neq 0$ entonces:

  $\sigma^{-1}(1) = t\,, \quad \sigma^{-1}(2) = t-1, \quad \sigma^{-1}(3) = t+1$, de donde

  $$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ t & t-1 & t+1 \end{pmatrix} \qquad \text{lo que implica} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

  Si $r_{\sigma^{-1}(3)}(r_{\sigma^{-1}(2)}r_{\sigma^{-1}(1)}) \neq 0$, se tiene entonces que:

  $$\sigma^{-1}(1) = t, \sigma^{-1}(2) = t-1, \sigma^{-1}(3) = t-2,$$

  de donde

  $$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ t & t-1 & t-2 \end{pmatrix} \qquad \text{lo que implica} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Por lo anterior, $\sigma \in \jmath_m$.

Basado en lo obtenido para los casos anteriores, note que $\sigma^{-1}(m) = m$ o $\sigma^{-1}(m) = 1$.

Ahora, como hipótesis de inducción, suponga válido para $m-1$ y a continuación se prueba para m.

Puesto que se cumple para $m-1$, entonces existe $\sigma^{-1'}$ tal que $\sigma' \in \jmath_{m-1}$, así entonces, teniendo en cuenta que $\sigma^{-1}(m) = m$ o $\sigma^{-1}(m) = 1$, se tiene que:

- Si $\sigma^{-1}(m) = 1$, entonces

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m \\ m & \sigma'(1) & \sigma'(2) & \cdots & \sigma'(m-1) \end{pmatrix}.$$

- Si $\sigma^{-1}(m) = m$, entonces

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & m \\ \sigma'(1) & \sigma'(2) & \sigma'(3) & \cdots & m \end{pmatrix}.$$

En cualquier caso $\sigma \in \jmath_m$.

$\Leftarrow$) Dado $\sigma \in \jmath_m$ se quiere ver que $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}, \ldots, r_{\sigma^{-1}(m)}] \neq 0$.

Puesto que $\sigma \in \jmath_m$, por Observación 2.3.6, se cumple que:

$$\sigma(1) > \sigma(2) > \ldots > \sigma(t) = 1, \sigma(t+1) < \ldots < \sigma(m), \quad \text{donde} \quad t = 1, \ldots, m.$$

Note primero que al considerar $m = 2$, se tiene $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}] \neq 0$.

Es claro que si $\sigma(t) = 1$, entonces $\sigma^{-1}(1) = t$. En ese sentido, $\sigma(t+1) = 2$ o $\sigma(t-1) = 2$ (pues $\sigma \in \jmath_m$). De acuerdo con lo anterior $\sigma^{-1}(2) = t+1$ o $\sigma^{-1}(2) = t-1$, es decir que $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}] = [r_t, r_{t+1}]$ o $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}] = [r_t, r_{t-1}]$.

Ahora, observe que $[r_t, r_{t+1}] = r_t r_{t+1} - r_{t+1} r_t$, pero por hipótesis $r_t r_{t+1} \neq 0$ lo que hace que $[r_t, r_{t+1}] = r_t r_{t+1} - 0 = r_t r_{t+1} \neq 0$.

Si se considera que $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}] = [r_t, r_{t-1}]$, entonces $[r_t, r_{t-1}] = r_t r_{t-1} - r_{t-1} r_t$, en este caso $r_{t-1} r_t \neq 0$, lo que hace que $[r_t, r_{t-1}] = 0 - r_{t-1} r_t \neq 0$.

Con $m = 3$ se pretende ratificar que al aplicar el corchete de Lie siempre existe secuencia de matrices cuyo producto de Lie es diferente de cero. Dado que $\sigma^{-1}(1) = t$ se cumple, entonces puede suceder que:

- Caso 1: $\sigma^{-1}(2) = t+1$ entonces $\sigma^{-1}(3) = t+2$ o $\sigma^{-1}(3) = t-1$. En este caso se debe considerar entonces

$$[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}] = [r_t, r_{t+1}, r_{t+2}] \quad \text{o} \quad [r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}] = [r_t, r_{t+1}, r_{t-1}],$$

en ambas operaciones se obtiene un valor diferente de cero. Observe:

$$\begin{aligned}[r_t, r_{t+1}, r_{t+2}] &= [(r_t r_{t+1} - r_{t+1} r_t), r_{t+2}] = (r_t r_{t+1} - r_{t+1} r_t) r_{t+2} - r_{t+2}(r_t r_{t+1} - r_{t+1} r_t)\\ &= (r_t r_{t+1}) r_{t+2} - (r_{t+1} r_t) r_{t+2} - r_{t+2}(r_t r_{t+1}) + r_{t+2}(r_{t+1} r_t).\end{aligned}$$

De donde, por hipótesis del Teorema $(r_t r_{t+1}) r_{t+2} \neq 0$, lo que permite que

$$[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}] \neq 0.$$

Si por el contrario, se contempla $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}] = [r_t, r_{t+1}, r_{t-1}]$, entonces:

$$\begin{aligned}[r_t, r_{t+1}, r_{t-1}] &= [(r_t r_{t+1} - r_{t+1} r_t), r_{t-1}] = (r_t r_{t+1} - r_{t+1} r_t) r_{t-1} - r_{t-1}(r_t r_{t+1} - r_{t+1} r_t)\\ &= (r_t r_{t+1}) r_{t-1} - (r_{t+1} r_t) r_{t-1} - r_{t-1}(r_t r_{t+1}) + r_{t-1}(r_{t+1} r_t).\end{aligned}$$

En este caso $r_{t-1}(r_t r_{t+1}) \neq 0$, lo que hace $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}] \neq 0$.

- De forma similar si se aborda el caso $\sigma^{-1}(2) = t-1$ entonces

$$\sigma^{-1}(3) = t-2 \text{ o } \sigma^{-1}(3) = t+1.$$

En ese sentido, se debe considerar entonces $[r_t, r_{t-1}, r_{t-2}]$ o $[r_t, r_{t-1}, r_{t+1}]$, en ambas operaciones se obtiene un valor diferente de cero. Observe:

$$\begin{aligned}[r_t, r_{t-1}, r_{t-2}] &= [(r_t r_{t-1} - r_{t-1} r_t), r_{t-2}] = (r_t r_{t-1} - r_{t-1} r_t) r_{t-2} - r_{t-2}(r_t r_{t-1} - r_{t-1} r_t)\\ &= (r_t r_{t-1}) r_{t-2} - (r_{t-1} r_t) r_{t+2} - r_{t+2}(r_t r_{t-1}) + r_{t-2}(r_{t-1} r_t).\end{aligned}$$

En este caso $r_{t-2}(r_{t-1} r_t) \neq 0$, lo que hace $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}] \neq 0$.

De otra parte, si se aborda $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}] = [r_t, r_{t-1}, r_{t+1}]$, entonces:

$$\begin{aligned}[r_t, r_{t-1}, r_{t+1}] &= [(r_t r_{t-1} - r_{t-1} r_t), r_{t+1}] = (r_t r_{t-1} - r_{t-1} r_t) r_{t+1} - r_{t+1}(r_t r_{t-1} - r_{t-1} r_t)\\ &= (r_t r_{t-1}) r_{t+1} - (r_{t-1} r_t) r_{t+1} - r_{t+1}(r_t r_{t-1}) + r_{t+1}(r_{t-1} r_t).\end{aligned}$$

En este caso $r_{t-1}(r_t r_{t+1}) \neq 0$. Por lo anterior, $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}] \neq 0$.

Ahora suponga que se cumple para $m-1$, es decir:

$$[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}, \dots, r_{\sigma^{-1}(m-1)}] \neq 0,$$

esto es, existen matrices triangulares superiores cuyo subíndice depende de t, tal que $r_{s(t)} r_{q(t)} r_{u(t)} \cdots r_{v(t)} r_{z(t)} \neq 0$, donde $s(t)+1 = q(t)$, $q(t)+1 = u(t)$, $\cdots, v(t)+1 = z(t)$. Dicha secuencia permite que al considerar $\sigma^{-1}(m) = s(t)-1$ o $\sigma^{-1}(m) = z(t)+1$ se cumpla que

$$r_{s(t)-1} r_{s(t)} r_{q(t)} r_{u(t)} \cdots r_{v(t)} r_{z(t)} \neq 0 \text{ o } r_{s(t)} r_{q(t)} r_{u(t)} \cdots r_{v(t)} r_{z(t)} r_{z(t)+1} \neq 0,$$

cualquiera de los casos anteriores, permitiría que $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}, \dots, r_{\sigma^{-1}(m)}] \neq 0$, quedando así probado que $[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}, \dots, r_{\sigma^{-1}(m)}] \neq 0$ si y solo si $\sigma \in J_m$. Esta conclusión permite completar la prueba del Teorema.

■

2.4. Acciones de permutaciones

Definición 2.4.1. Sea $\eta = (g_1, g_2, g_3, ..., g_m) \in G^m$ y $\sigma \in S_m$, se define la **acción por izquierda** de σ sobre η como $\sigma\eta := (g_{\sigma^{-1}(1)}, g_{\sigma^{-1}(2)}, g_{\sigma^{-1}(3)}, ..., g_{\sigma^{-1}(m)})$.

Observación 2.4.2. No importa si los elementos de la secuencia son elementos de un grupo, la misma acción puede ser definida para una secuencia de símbolos. El siguiente lema se cumple de forma general.

Lema 2.4.3. Dadas las secuencias η, $\mu \in G^m$. Luego $\eta = \mu \quad \text{o} \quad \eta = \operatorname{rev}\mu$ si y solo si para cada elección σ , $\tau' \in \jmath_m$ existen σ', $\tau \in \jmath_m$ tal que $\sigma\eta = \sigma'\mu \quad \text{y} \quad \tau\eta = \tau'\mu$.

Demostración. Este Lema fue probado por Hitomi y Yasumura en [14, Teorema 1]. ∎

Corolario 2.4.4. Una identidad polinomial f_μ, $\mu \in G^{n-1}$ no es identidad G-graduada para $(UT_n(K)^{(-)}, \eta)$ si y solo si $\mu = \sigma\eta$ para algun $\sigma \in \jmath_m$.

Demostración. Observe que si $\mu = \sigma\eta$ para algún $\sigma \in \jmath_m$, entonces f_μ, $\mu \in G^{n-1}$ no es identidad G-graduada para $(UT_n(K)^{(-)}, \eta)$.

Lo anterior se tiene puesto que si $\mu = \sigma\eta$, entonces

$$\mu = (g_1, g_2, g_3, ..., g_{n-1}) = (g_{\sigma^{-1}(1)}, g_{\sigma^{-1}(2)}, g_{\sigma^{-1}(3)}, ..., g_{\sigma^{-1}(n-1)}),$$

donde $g_i \in \mu$ y $g_{\sigma^{-1}(i)} \in \sigma\eta$ con $i = 1, 2, 3, ..., n-1$.

Ya que$\sigma \in \jmath_m$,tenemos $[r_{g_{\sigma^{-1}(1)}}, r_{g_{\sigma^{-1}(2)}}, r_{g_{\sigma^{-1}(3)}}, ..., r_{g_{\sigma^{-1}(n-1)}}] \neq 0$, osea $[r_{g_1}, r_{g_2}, r_{g_3}, ..., r_{g_{n-1}}] \neq 0$, como $\sigma\eta = (g_{\sigma^{-1}(1)}, g_{\sigma^{-1}(2)}, g_{\sigma^{-1}(3)}, ..., g_{\sigma^{-1}(n-1)})$, $\sigma\eta$ es η-buena secuencia para $(UT_n(K)^{(-)}, \eta)$, pues $g_{\sigma^{-1}(i)} = g_i \in \eta$, es decir, $\mu \in G^{n-1}$ es η-buena secuencia para $(UT_n(K)^{(-)}, \eta)$, lo que implica que f_μ no es identidad G-graduada para $(UT_n(K)^{(-)}, \eta)$.

Ahora, note que f_μ no es identidad G-graduada para $(UT_n(K)^{(-)}, \eta)$, implica que μ es η-buena secuencia, es decir $[r_{g_1}, r_{g_2}, r_{g_3}, ..., r_{g_{n-1}}] \neq 0$ donde $g_i \in \mu$ con $i = 1, 2, 3, ..., n-1$. En ese sentido existe $\sigma \in \jmath_m$ tal que $g_i = \sigma^{-1}(g_i')$ donde $g_i' \in \eta$, pues $UT_n(K)^{(-)}$ fue graduada con η. Por lo anterior $\mu = \sigma\eta$ para algún $\sigma \in \jmath_m$. ∎

Proposición 2.4.5. Dadas η, $\mu \in G^{n-1}$, si $(UT_n(K)^{(-)}, \eta) \cong (UT_n(K)^{(-)}, \mu)$, entonces

$$\mathrm{Id}(UT_n(K)^{(-)}, \eta) = \mathrm{Id}(UT_n(K)^{(-)}, \mu).$$

Demostración.

Dado ϕ el isomorfismo tal que

$$\phi : (UT_n(K)^{(-)}, \eta) \longrightarrow (UT_n(K)^{(-)}, \mu)$$

puesto que ϕ es isomorfismo, entonces para todo $b \in (UT_n(K)^{(-)}, \mu)$ existe $a \in (UT_n(K)^{(-)}, \eta)$ tal que $\phi(a) = b$, luego siendo f la identidad polinomial G-graduada para $(UT_n(K)^{(-)}, \mu)$ entonces:

$$\begin{aligned} f(b_1, b_2, b_3, ..., b_n) &= f(\phi(a_1), \phi(a_2), \phi(a_3), ..., \phi(a_n)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi(a_i) = \phi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i) \\ &= \phi(f(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)) = \phi(0) = 0, \end{aligned}$$

lo que permite concluir que $\mathrm{Id}(UT_n(K)^{(-)}, \eta\ ) = \mathrm{Id}(UT_n(K)^{(-)}, \mu\ )$.

$\blacksquare$

Corolario 2.4.6. Suponga que η y $\mu \in G^{n-1}$. Asuma $\mu \neq \eta$ y $\mu \neq \mathrm{rev}\,\eta$. Luego $(UT_n(K)^{(-)},\ \mu\ )$ no es isomorfo a $(UT_n(K)^{(-)},\ \eta\ )$.

Demostración. De acuerdo con el Lema 2.4.3 existe $\sigma \in \jmath_{n-1}$ tal que $\sigma\mu \neq \sigma'\eta$ para todo $\sigma' \in \jmath_{n-1}$. Luego $\sigma\mu$ es buena secuencia para $(UT_n(K)^{(-)}, \mu\ )$, es decir,

$$[r_{\sigma^{-1}(1)}, r_{\sigma^{-1}(2)}, r_{\sigma^{-1}(3)}, \ ..., r_{\sigma^{-1}(n-1)}] \neq 0, \quad \text{con } r_{\sigma^{-1}(i)} \text{ la matriz de grado } g_i,$$

pero es mala secuencia para $(UT_n(K)^{(-)}, \eta)$. Lo anterior implica que $f_{\sigma\mu}$ es identidad G-graduada para $(UT_n(K)^{(-)}, \eta)$ pero no para $(UT_n(K)^{(-)}, \mu)$, lo que indica por la Proposición 2.4.5 que $(UT_n(K)^{(-)}, \eta\ ) \ \ncong\ (UT_n(K)^{(-)}, \mu\ )$. $\blacksquare$

CAPÍTULO 3

$\mathbb{Z}_n$-IDENTIDADES GRADUADAS

En este capítulo se estudia una particular pero importante $\mathbb{Z}_n$-graduación sobre el álgebra $UT_n(K)^{(-)}$. Esta graduación es conocida como la graduación canónica de $UT_n(K)^{(-)}$. Así mismo, se logra establecer una base para el $T_{\mathbb{Z}_n}$-ideal de identidades de $UT_n(K)$, lo que posteriormente permitirá probar un resultado similar para el caso de Lie, es decir $UT_n(K)^{(-)}$.

3.1. Identidades para el álgebra asociativa $UT_n(K)$

Definición 3.1.1. Dado $\mathbb{Z}_n$ grupo. Se define una $\mathbb{Z}_n$-**graduación canónica** sobre $UT_n(K)^{(-)}$ si se cumple que $\text{grad}(e_{12}) = \overline{1}$, $\text{grad}(e_{23}) = \overline{1}$, $\text{grad}(e_{34}) = \overline{1}$, ... , $\text{grad}(e_{n-1,n}) = \overline{1}$.

Ejemplo 3.1.2. Sea $G = \mathbb{Z}_7$, note que la $\mathbb{Z}_7$-graduación canónica sobre $UT_7(K)^{(-)}$ queda definida como:

$UT_7(K)^{(-)} = A^{(\overline{0})} \oplus A^{(\overline{1})} \oplus A^{(\overline{2})} \oplus A^{(\overline{3})} \oplus A^{(\overline{4})} \oplus A^{(\overline{5})} \oplus A^{(\overline{6})}$, donde:

$A^{(\overline{0})} = \text{span}\,\{e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{44}, e_{55}, e_{66}, e_{77}\}$.

$A^{(\overline{1})} = \text{span}\,\{e_{12}, e_{23}, e_{34}, e_{45}, e_{56}, e_{67}\}$.

$A^{(\overline{2})} = \text{span}\,\{e_{13}, e_{24}, e_{35}, e_{46}, e_{57}\}$.

$A^{(\overline{3})} = \text{span}\,\{e_{14}, e_{25}, e_{36}, e_{47}\}$.

$A^{(\overline{4})} = \text{span}\,\{e_{15}, e_{26}, e_{37}\}$.

$A^{(\overline{5})} = \text{span}\,\{e_{16}, e_{27}\}$.

$A^{(\overline{6})} = \text{span}\,\{e_{17}\}$.

asociando el resultado anterior a la matriz graduación (Definición 1.3.13), se tiene:

$$\mathrm{M}_{\text{grad}} = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} & \overline{6} \\ & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} & \overline{5} \\ & & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} & \overline{4} \\ & & & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} & \overline{3} \\ & & & & \overline{0} & \overline{1} & \overline{2} \\ & & & & & \overline{0} & \overline{1} \\ & & & & & & \overline{0} \end{pmatrix}$$

Observación 3.1.3. En una $\mathbb{Z}_n$-graduación canónica, cada matriz unidad e_{ij} es homogénea y se cumple que $\text{grad}(e_{ij}) = j - i \in \mathbb{Z}_n$.

Lema 3.1.4. El álgebra $UT_n(K)$ satisface las siguientes identidades graduadas.

$$\begin{cases} {x_1}^{(0)}{x_2}^{(0)} - {x_2}^{(0)}{x_1}^{(0)} \equiv 0 & \\ {x_1}^{(g_1)}{x_2}^{(g_2)} \equiv 0 & \text{si } g_1 + g_2 \geq n. \end{cases}$$

Demostración. Puesto que las matrices que pertenecen al subespacio de grado 0 solo tienen componentes en la diagonal principal, este tipo de matrices conmutan con cualquier otra matriz, se tiene entonces que ${x_1}^{(0)}{x_2}^{(0)} - {x_2}^{(0)}{x_1}^{(0)} = 0$. Es decir, satisfacen el corchete de Lie.

Ahora observe que ${x_1}^{(g_1)}{x_2}^{(g_2)}$, con $g_1+g_2 \geq n$, se cumple en la base conformada por matrices elementales de cualquier subespacio de grado g_i. En ese sentido, bastará con mostrar que se cumple para todas las matrices de la base y así se satisface para todas las matrices generadas. Note que si $e_{ks} \in A^{g_1}$ y $e_{rt} \in A^{g_2}$, entonces se tiene $e_{ks} = e_{k,(k+g_1)}$ y $e_{rt} = e_{r,(r+g_2)}$. Suponga que $e_{k,(k+g_1)}e_{r,(r+g_2)} \neq 0$. Así, $r + g_2 \leq n$ de donde $r \leq n - g_2$, pero por hipótesis $k + g_1 = r$, entonces $k + g_1 \leq n - g_2$, lo que implica que $k \leq n - (g_1 + g_2)$, no obstante $g_1 + g_2 \geq n$ lo que permite concluir que $k \leq 0$ (absurdo).

Por lo anterior, si $g_1 + g_2 \geq n$ se tiene entonces que ${x_1}^{(g_1)}{x_2}^{(g_2)} = 0$. ■

Corolario 3.1.5. $J = \langle [{x_1}^{(0)}, {x_2}^{(0)}], {x_1}^{(g_1)}{x_2}^{(g_2)} \mid g_1 + g_2 \geq n \rangle_{T_{\mathbb{Z}_n}}$ e $\text{Id}^{\text{gr}}(UT_n(K))$ las identidades graduadas de $UT_n(K)$, entonces $J \subseteq \text{Id}^{\text{gr}}(UT_n(K))$.

Demostración. Por el Lema 3.1.4, si $f \in J$, entonces f es de la forma

$$k_1[x_1(0)x_2(0) - x_2(0)x_1(0)] + k_2[x_1^{g_1}x_2^{g_2}]$$

donde $g_1 + g_2 \geq n$ y $k_1, k_2 \in K$ ya que $x_1x_2 - x_2x_1$ y x_1x_2 son identidades de $UT_n(K)$, entonces $f \in \text{Id}^{\text{gr}}(UT_n(K))$ así $J \subseteq \text{Id}^{\text{gr}}(UT_n(K))$. ■

Observación 3.1.6. Los monomios

$$u_i = w_0 {x_{i1}}^{(g_1)} w_1 {x_{i2}}^{(g_2)} ... w_{t-1} {x_{it}}^{(g_t)} w_t,$$

tal que $g_1 + g_2 + \cdots + g_t < n$ y w_i son monomios cuyo grado homogéneo es cero y en los cuales, las variables se pueden escribir en orden creciente, no son identidades graduadas en una $\mathbb{Z}_n$-graduación. Lo anterior se cumple evaluando así: w_0 en e_{11}, ${x_{i1}}^{(g_1)}$ en e_{1,g_1+1}, w_1 en e_{g_1+1,g_1+1}, la variable ${x_{i2}}^{(g_2)}$ en e_{g_1+1,g_1+g_2+1}, ... , ${x_{it}}^{(g_t)}$ en $e_{g_1+g_2+...+g_{t-1}+1,g_1+g_2+...+g_t+1}$ y w_t en e_{jj}, donde el valor de j esta dado por $g_1 + g_2 + g_3 + ... + g_t + 1$.

Ejemplo 3.1.7. Dada la $\mathbb{Z}_7$-graduación sobre $UT_7(K)^{(-)}$ en el Ejemplo 3.1.2, observe que:

- Si $u = w_0 {x_{i1}}^{(1)} w_1 {x_{i2}}^{(1)} w_2 {x_{i3}}^{(1)} w_3$, se tiene $g_1 = 1, g_2 = 1, g_3 = 1$. En ese sentido:

  w_0 se evalúa en e_{11}.

  ${x_{i1}}^{(1)}$ se evalúa en e_{1,g_1+1}, es decir e_{12}.

  w_1 se evalúa en e_{g_1+1,g_1+1}, es decir e_{22}.

  ${x_{i2}}^{(1)}$ se evalúa en e_{g_1+1,g_1+g_2+1}, es decir e_{23}.

  w_2 se evalúa en $e_{g_1+g_2+1,g_1+g_2+1}$, es decir e_{33}.

  ${x_{i3}}^{(1)}$ se evalúa en $e_{g_1+g_2+1,g_1+g_2+g_3+1}$, es decir e_{34}.

  w_3 se evalúa en $e_{g_1+g_2+g_3+1,g_1+g_2+g_3+1}$, es decir e_{44}.

  Por lo anterior $u = e_{11}e_{12}e_{22}e_{23}e_{33}e_{34}e_{44} = e_{14} \neq 0$.

- Si $u = w_0 {x_{i1}}^{(1)} w_1 {x_{i2}}^{(2)} w_2 {x_{i3}}^{(3)} w_3$, se tiene $g_1 = 1, g_2 = 2, g_3 = 3$. Entonces:

  w_0 se evalúa en e_{11}.

  ${x_{i1}}^{(1)}$ se evalúa en e_{1,g_1+1}, es decir e_{12}.

  w_1 se evalúa en e_{g_1+1,g_1+1}, es decir e_{22}.

  ${x_{i2}}^{(2)}$ se evalúa en e_{g_1+1,g_1+g_2+1}, es decir e_{24}.

  w_2 se evalúa en $e_{g_1+g_2+1,g_1+g_2+1}$, es decir e_{44}.

$x_{i3}{}^{(3)}$ se evalúa en $e_{g_1+g_2+1,g_1+g_2+g_3+1}$, es decir e_{47}.

w_3 se evalúa en $e_{g_1+g_2+g_3+1,g_1+g_2+g_3+1}$, es decir e_{77}.

Por lo anterior $u = e_{11}e_{12}e_{22}e_{24}e_{44}e_{47}e_{77} = e_{17} \neq 0$.

Lema 3.1.8. Los monomios $u_i = w_0 x_{i1}{}^{(g_1)} w_1 x_{i2}{}^{(g_2)} ... w_{t-1} x_{it}{}^{(g_t)} w_t$, son una base de

$$K\langle X\rangle \big/ \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K)).$$

Demostración. Se quiere ver que los monomios de la forma

$$u_i = w_0 x_{i1}{}^{(g_1)} w_1 x_{i2}{}^{(g_2)} ... w_{t-1} x_{it}{}^{(g_t)} w_t$$

son linealmente independientes modulo $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$ y además que todo elemento de

$$K\langle X\rangle \big/ \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K)),$$

se puede escribir como combinación lineal de los u_i.

Suponga que $f_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$ con $\alpha_i \in K$, es decir, $f = 0 \bmod \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$. Puesto que K es un cuerpo infinito, por Proposición 1.3.22, se puede afirmar que todo u_i es multilineal del mismo grado. Ahora, fije un monomio con coeficiente diferente de cero, suponga que es

$$u_1 = w_0 x_{i1}{}^{(g_1)} w_1 x_{i2}{}^{(g_2)} ... w_{t-1} x_{it}{}^{(g_t)} w_t,$$

evaluando este polinomio así: w_0 en e_{11}, $x_{i1}{}^{(g_1)}$ en e_{1,g_1+1}, w_1 en e_{g_1+1,g_1+1}, la variable $x_{i2}{}^{(g_2)}$ en e_{g_1+1,g_1+g_2+1}, ... , $x_{it}{}^{(g_t)}$ en $e_{g_1+g_2+...+g_{t-1}+1,g_1+g_2+...+g_t+1}$ y w_t en e_{jj} donde $j = g_1+g_2+g_3+...+g_t+1$, se obtiene como resultado e_{1j}, además al considerar la sustitución mencionada, todos los otros $u_i \in f$ se hacen cero, lo que implica que $f \neq 0 \bmod \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$. (Contradicción). Por lo tanto, los u_i son linealmente independientes.

Por último, observe que cada elemento de $K\langle X\rangle \big/ \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$ se puede escribir como combinación lineal de los u_i. Note que si $g_1+g_2+\cdots+g_n \geq n$ entonces $x^{g_1}x^{g_2}\cdots x^{g_n} = 0$ en $K\langle X\rangle \big/ \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$. Por ende, debe suceder que en cada monomio se cumpla $g_1+g_2+\cdots g_n < n$, es decir monomios de la forma u_i. Como observación adicional, si es el caso, pueden existir variables x inmersas en los u_i, dichas variables necesariamente serían de grado cero puesto que que si se caracteriza por tener cualquier otro grado, dicho grado altera la suma de los g_i, lo que haría que $g_1+g_2+...+g_n \geq n$. Por lo anterior, se concluye que si $f \in K\langle X\rangle \big/ \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$, entonces $f_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. ■

Teorema 3.1.9. Las identidades $[x_1{}^{(0)}, x_2{}^{(0)}]$ y $x_1{}^{(g_1)} x_2{}^{(g_2)}$ con $g_1+g_2 \geq n$ generan $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$ como $T_{\mathbb{Z}_n}$-ideal.

Demostración. Si $J = \langle [x_1{}^{(0)}, x_2{}^{(0)}], x_1{}^{(g_1)} x_2{}^{(g_2)} \mid g_1 + g_2 \geq n \rangle_{T_{\mathbb{Z}_n}}$, se desea ver que

$$J = \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$$

. Por el Corolario 3.1.5 se tiene $J \subseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$, para mostrar la contenencia recíproca, tome $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$, se desea ver que modulo J, f es congruente con el polinomio nulo, es decir $f \equiv 0 \bmod J$. Por Lema 3.1.8 f se escribe de la forma

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i,$$

de acuerdo con lo anterior, tome f así:

$$f \equiv \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \bmod J;$$

Se trata entonces de ver sin pérdida de generalidad que $f_1 = \alpha_1 u_1 \equiv 0 \bmod J$. Dado que $f \equiv \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \bmod J$ se tiene que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i - f \in J \subseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$, esto implica $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i - f$ pertenece a $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$, pero por hipótesis $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$ entonces $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$, de acuerdo con lo anterior y basados en la Proposición 1.3.22 se tiene que $f_1 \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$. Puesto que al realizar la sustitución w_0 en e_{11}, $x_{i1}{}^{(g_1)}$ en e_{1,g_1+1}, w_1 en e_{g_1+1,g_1+1}, la variable $x_{i2}{}^{(g_2)}$ en e_{g_1+1,g_1+g_2+1}, ... , $x_{it}{}^{(g_t)}$ en $e_{g_1+g_2+\ldots+g_{t-1}+1,g_1+g_2+\ldots+g_t+1}$ y w_t en e_{jj} donde $j = g_1 + g_2 + \ldots + g_t + 1$ en

$$f_1 = \alpha_1 u_1 = \alpha_1 w_0 x_{i1}{}^{(g_1)} w_1 x_{i2}{}^{(g_2)} w_2 x_{i3}{}^{(g_3)} w_4 \ldots w_{t-1} x_{it}{}^{(g_t)} w_t,$$

se obtiene como resultado $\alpha_1 e_{1,g_1+g_2+\ldots+g_t+1}$, de esta manera $f_1 = \alpha_1 e_{1,g_1+g_2+\ldots+g_t+1}$, pero f_1 pertenece a $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$ entonces tiene que ser que $\alpha_1 = 0$, lo que contradice el hecho de que el monomio elegido era no nulo; por lo anterior, no es posible elegir un monomio no nulo de $K\langle X\rangle^{\mathrm{gr}} \big/ J$ y se concluye que $f_1 \equiv 0 \bmod J$.

Por lo tanto $f \in J$, luego $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K)) = \langle [x_1{}^0, x_2{}^0], x_1{}^{(g_1)} x_2{}^{(g_2)} \mid g_1 + g_2 \geq n \rangle$. ∎

3.2. $T_{\mathbb{Z}_n}$-ideal generado

Definición 3.2.1. Dado $\boldsymbol{X}$ un conjunto de variables. Se denota por $\boldsymbol{L(X)}$ el **álgebra de Lie libre sobre $\boldsymbol{X}$** , el cual se define de la siguiente forma: Para cualquier álgebra de Lie $\boldsymbol{A}$ y cualquier función $f\colon \boldsymbol{X} \to A$ existe un único homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : L(X) \to A$ tal que el siguiente diagrama donde $i\colon \boldsymbol{X} \to L(X)$ es la función inclusión, conmuta:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X} \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & L(X) \arrow[d, "\phi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Observación 3.2.2. Se denota por $\boldsymbol{X}_{\mathbb{Z}_n}$ el conjunto de variables $\mathbb{Z}_n$-graduadas.

Observación 3.2.3. Se denota por $\mathfrak{C} = \langle [x_1{}^{(0)}, x_2{}^{(0)}] \rangle^{T_{\mathbb{Z}_n}} \subseteq K\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle$ el $T_{\mathbb{Z}_n}$-ideal generado por el conmutador $[x_1{}^{(0)}, x_2{}^{(0)}]$ en el álgebra libre asociativa $\mathbb{Z}_n$-graduada. Se denota por $\mathfrak{D} \subseteq L(X_{\mathbb{Z}_n})$ el $T_{\mathbb{Z}_n}$-ideal en el álgebra de Lie libre $\mathbb{Z}_n$-graduada que es generada por el mismo conmutador.

De acuerdo con lo anterior, se define

$$K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle := {}^{K\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle}\big/_{\mathfrak{C}} \quad \text{y} \quad L'(X_{\mathbb{Z}_n}) := {}^{L(X_{\mathbb{Z}_n})}\big/_{\mathfrak{D}}.$$

Se habla de $T'_{\mathbb{Z}_n}$-ideales cuando se trata de los ideales en $K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle$ ó en $L'(X_{\mathbb{Z}_n})$.

Teorema 3.2.4. $L(X_{\mathbb{Z}_n})$ es la subálegra de Lie generada por $\boldsymbol{X}$ en el álgebra de Lie $K\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle^{(-)}$.

Demostración. Ver [9, Teorema. 1.3.5]. ∎

Del teorema anterior se tiene que $L(X_{\mathbb{Z}_n}) \subseteq K\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle$, llamando

$$\mathfrak{C} = \langle [x_1{}^{(0)}, x_2{}^{(0)}] \rangle^{T_{\mathbb{Z}_n}} \subseteq K\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle,$$

directamente se puede afirmar que $\mathfrak{D} = \mathfrak{C} \cap L(X_{\mathbb{Z}_n})$.

Observación 3.2.5.

Si f y g son de $\mathbb{Z}_n$-grado 0, entonces $[f, g] \in \mathfrak{C}$ puesto que $\mathfrak{C} = \langle [x_1{}^{(0)}, x_2{}^{(0)}] \rangle^{T_{\mathbb{Z}_n}}$.

3.3. Identidades para el álgebra de Lie $UT_n(K)^{(-)}$

Lema 3.3.1. Sea $L'(X_{\mathbb{Z}_n}) = {}^{L(X_{\mathbb{Z}_n})}\big/_{\mathfrak{D}}$ y $K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle = {}^{K\langle X\rangle}\big/_{\mathfrak{C}}$ y sea $\rho : K\langle X\rangle \to K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle$ el homomorfismo canónico, es decir $f \mapsto f + \mathfrak{C}$, entonces $L'(X_{\mathbb{Z}_n}) \subseteq K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle$.

Demostración. Como $L(X_{\mathbb{Z}_n}) \subseteq K\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle$, la subálgebra de Lie $L(X)$ de $K\langle X\rangle^{(-)}$ generada por X es isomorfa al álgebra de Lie libre. Entonces existe una función inclusión llamada i, tal que

$$\begin{aligned} i:\ L(X_{\mathbb{Z}_n}) &\longrightarrow K\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle \\ f &\longmapsto f \end{aligned}$$

observe que i es homomorfismo de álgebras de Lie, Así:

$$i([f,g]) = i(f)i(g) - i(g)i(f) = [i(f), i(g)],$$

de acuerdo con lo anterior se puede afirmar que $i : L(X_{\mathbb{Z}_n}) \to K\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle^{(-)}$.

Teniendo $i : L(X_{\mathbb{Z}_n}) \to K\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle$ y definiendo $\rho : K\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle \to {K\langle X\rangle}/{\mathfrak{C}}$, el homomorfismo canónico, considerando $h = \rho i$, es decir $h : L(X_{\mathbb{Z}_n}) \to K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle$, así:

$$\begin{aligned} h:\ L(X_{\mathbb{Z}_n}) &\longrightarrow K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle \\ f &\longmapsto h(f) \end{aligned}$$

Note que $h(f) = (\rho i)(f) = \rho(i(f)) = \rho(f) = f + \mathfrak{C}$. Se quiere ver que h es homomorfismo de álgebras de Lie.

$$\begin{aligned} h([f,g]) &= \rho(i([f,g])) = \rho([i(f), i(g)]) \\ &= \rho(i(f)i(g) - i(g)i(f)) \\ &= (\rho i)(f)(\rho i)(g) - (\rho i)(g)(\rho i)(f) \\ &= h(f)h(g) - h(g)h(f) = [h(f), h(g)]. \end{aligned}$$

Además, $\mathrm{Ker}(h) = \mathfrak{D}$. Observe:
$\subseteq$) Dado $f \in \mathrm{Ker}(h) \subseteq L(X_{\mathbb{Z}_n})$ entonces $h(f) = 0$, osea que $h(f) = (\rho i)(f) = \rho(f) = f + \mathfrak{C} = 0 + \mathfrak{C}$, entonces $f \in \mathfrak{C}$. Como $f \in L(X_{\mathbb{Z}_n})$ y $f \in \mathfrak{C}$ se tiene que $f \in \mathfrak{C} \cap L(X_{\mathbb{Z}_n})$, lo que implica que $f \in \mathfrak{D}$.

$\supseteq$) $f \in \mathfrak{D}$ entonces $f = \sum_{i=1}^{n}[f_i, g_i, f_i'] \in \mathfrak{D}$ donde f_i, g_i son elementos de $\mathbb{Z}_n$-grado 0 en $L(X_{\mathbb{Z}_n})$. Así, $h(f) = h(\sum_{i=1}^{n}[f_i, g_i, f_i'])$, dado que h es homomorfismo,

$$h(f) = \sum_{i=1}^{n}[h([f_i, g_i]), h(f_i')] \in \mathfrak{C}$$

por la Observación 3.2.5. En ese sentido, $h(f) = \sum_{i=1}^{n}[h([f_i, g_i]), h(f_i')] = 0$, lo que implica que $f \in \mathrm{Ker}(h)$.

De lo anterior y por la Proposición 1.1.38 se tiene que existe un único homomorfismo inyectivo $\overline{h}$ tal que $\overline{h} : {L(X_{\mathbb{Z}_n})}/{\mathfrak{D}} \to K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle^{(-)}$, es decir $\overline{h} : L'(X_{\mathbb{Z}_n}) \to K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle^{(-)}$. Esta conclusión, permite afirmar que $L'(X_{\mathbb{Z}_n}) \subseteq K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle^{(-)}$, equivalente a $L'(X_{\mathbb{Z}_n}) \subseteq K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle$. De esta manera queda probado que $L'(X_{\mathbb{Z}_n}) \subseteq K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle$. ■

Lema 3.3.2. $\rho^{-1}(J) = \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$, con $J = \langle {x_1}^{(g_1)}{x_2}^{(g_2)} \mid g_1 + g_2 \geq n\rangle_{T_{\mathbb{Z}_n}}$ ideal de ${K\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle}/{\mathfrak{C}}$.

Demostración. Recuerde que $\rho^{-1}(J) = \{f \in K\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle : \rho(f) \in J\}$ es ideal de $K\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle$. Dicho esto, observe que $\rho^{-1}(J) \subseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$, Suponga que $f \in \rho^{-1}(J)$, por ende $\rho(f) \in J$ lo que implica que $f = \sum_{k=1}^{n} f_k{}' f_k{}^{g_1} g_k{}^{g_2} g_k{}'$ con $g_1 + g_2 \geq n$, por lo tanto $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$.

Ahora note que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K)) \subseteq \rho^{-1}(J)$. Suponga que $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$. Como caso particular:

- Si $f = [x_1{}^{(0)}, x_2{}^{(0)}]$ entonces $\rho(f) = 0 \in J$. Puesto que $\rho(f) \in J$ entonces $f \in \rho^{-1}(J)$.
- Si $f = x_1{}^{(g_1)} x_2{}^{(g_2)}$ con $g_1 + g_2 \geq n$, entonces $\rho(f) \in J$ por definición de J, como $\rho(f) \in J$ entonces $f \in \rho^{-1}(J)$.
- De manera general, si $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$ entonces f es generado por $[x_1{}^{(0)}, x_2{}^{(0)}]$ y $x_1{}^{(g_1)} x_2{}^{(g_2)}$ con $g_1 + g_2 \geq n$, para lo cual en los dos ítems anteriores se concluyó que $\rho(f) \in J$, lo que implica que $f \in \rho^{-1}(J)$.

Así pues, se concluye que $\rho^{-1}(J) = \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K))$. ∎

Lema 3.3.3.

1. Sea $f = \sum_{i=1}^{n} m_i \in K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle$ donde m_i es un monomio. Luego f es una $\mathbb{Z}_n$-identidad para $UT_n(K)$ si y solo si cada m_i es una $\mathbb{Z}_n$-identidad para $UT_n(K)$.
2. Un monomio $m = x_{i1}{}^{(g_1)} x_{i2}{}^{(g_2)} \cdots x_{im}{}^{(g_m)}$ es una $\mathbb{Z}_n$-identidad si y solo si en el monomio se cumple que $g_1 + g_2 \cdots + g_m \geq n$.

Demostración.

1. $\Rightarrow$) Si $f = \sum_{i=1}^{n} m_i \in K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle$ es una $\mathbb{Z}_n$-identidad de $UT_n(K)$, por la Proposición 1.3.22 cada m_i es una $\mathbb{Z}_n$-identidad para $UT_n(K)$.

   $\Leftarrow$) Si cada m_i es una $\mathbb{Z}_n$-identidad para $UT_n(K)$ directamente se tiene que
   $$f = \sum_{i=1}^{n} m_i = 0.$$
2. Se tiene por el Lema 3.1.4.

∎

Observación 3.3.4. Usando la inclusión $L'(X_{\mathbb{Z}_n}) \subseteq K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle$, se obtienen conclusiones similares a las anteriores para el álgebra $UT_n(K)^{(-)}$.

Observación 3.3.5. Un polinomio en el álgebra de Lie, no se escribe de manera única como suma de monomios. Por ejemplo, puesto que $[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0$, note que:

$$[[x,y],z] = -[[y,z],x] - [[z,x],y].$$

Lema 3.3.6.

1. Sea $m \in L'(X_{\mathbb{Z}_n})$ un polinomio de Lie y escriba $m = \sum_{i=1}^{n} f_i$, aquí cada $f_i \in K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle$ es un monomio asociativo. Luego m es una Lie $\mathbb{Z}_n$-identidad para $UT_n(K)^{(-)}$ si y solo si cada uno de los f_i es una $\mathbb{Z}_n$-identidad para $UT_n(K)$.
2. Sea $f = \sum_{i=1}^{n} m_i \in L'(X_{\mathbb{Z}_n})$. Luego f es una $\mathbb{Z}_n$-identidad para $UT_n(K)^{(-)}$ si y solo si cada m_i es una $\mathbb{Z}_n$-identidad para $UT_n(K)^{(-)}$.

Demostración.

1. Dado que $L'(X_{\mathbb{Z}_n}) \subseteq K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle$ entonces $m = \sum_{i=1}^{n} f_i$ donde $f_i \in K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle$, por el Lema 3.3.3 se tiene que $\sum_{i=1}^{n} f_i \equiv 0$ entonces cada f_i es una $\mathbb{Z}_n$-identidad. Lo recíproco se tiene de forma directa.
2. Se tiene como implicación del Lema 3.3.3.

■

Corolario 3.3.7. Dado $m \in L'(X_{\mathbb{Z}_n})$ un monomio de Lie que es una $\mathbb{Z}_n$-identidad para $UT_n(K)^{(-)}$. Luego m es una consecuencia de los monomios de tipo $\{[x_1{}^{g_1}, x_2{}^{g_2}] : g_1 + g_2 \geq n\}$.

Demostración. Note que m no puede ser escrito como una expresión de grado usual 1 (grado usual de polinomios). En ese sentido, se puede escribir $m = [u, v]$ donde es posible que u sea el resultado de operar elementos de $L'(X_{\mathbb{Z}_n})$ mediante el corchete de Lie, previamente. Ahora, si m es una $\mathbb{Z}_n$-identidad para $UT_n(K)^{(-)}$ entonces por el Lema 3.3.6 $m = \sum_{i=1}^{n} f_i$ donde $f_i \in K'\langle X_{\mathbb{Z}_n}\rangle$ y f_i es una $\mathbb{Z}_n$-identidad para $UT_n(K)$, lo que implica por el Lema 3.3.3, $f_i = [x_{i1}{}^{(g_1)} x_{i2}{}^{(g_2)} \cdots x_{im}{}^{(g_m)}]$ tal que $g_1 + g_2 + \cdots g_m \geq n$. ■

Teorema 3.3.8. Asuma K un cuerpo infinito. Luego las $\mathbb{Z}_n$-identidades graduadas del álgebra de Lie $UT_n(K)^{(-)}$ son generadas por:

$$\begin{cases} [x_1{}^{(g_1)}, x_2{}^{(g_2)}], & \text{si } g_1 + g_2 \geq n \\ [x_1{}^{(0)}, x_2{}^{(0)}] \end{cases}$$

Demostración. Se quiere ver que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K)^{(-)}) = \langle [x_1{}^{(0)}, x_2{}^{(0)}], [x_1{}^{(g_1)} x_2{}^{(g_2)}], g_1 + g_2 \geq n\rangle_{T_{\mathbb{Z}_n}}$. En ese sentido, observe que si $f \in \langle [x_1{}^{(0)}, x_2{}^{(0)}], [x_1{}^{(g_1)} x_2{}^{(g_2)}], g_1 + g_2 \geq n\rangle_{T_{\mathbb{Z}_n}}$ entonces

$$f = \sum_{i=0}^{n} f'[f_i{}^{(0)}, g_i{}^{(0)}] g_i{}' + \sum_{j=0}^{n} h'[h_j{}^{(g_1)}, k_j{}^{(g_2)}] k_j{}'$$

es decir $f \equiv 0 \bmod \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K)^{(-)})$, esto significa que $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K)^{(-)})$, por lo tanto

$$\langle [x_1{}^{(0)}, x_2{}^{(0)}], [x_1{}^{(g_1)} x_2{}^{(g_2)}], g_1 + g_2 \geq n\rangle_{T_{\mathbb{Z}_n}} \subseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K)^{(-)}).$$

Ahora se quiere ver que si $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K)^{(-)}) \subseteq L(X_{\mathbb{Z}_n})$ entonces

$$f \in \langle [{x_1}^{(0)}, {x_2}^{(0)}], [{x_1}^{(g_1)} {x_2}^{(g_2)}], g_1 + g_2 \geq n \rangle_{T_{\mathbb{Z}_n}}.$$

Como $f \in L(X_{\mathbb{Z}_n})$ y sean las proyecciones canónicas ρ_1 y ρ_2 tales que:

$$L(X_{\mathbb{Z}_n}) \xrightarrow{\rho_1} L(X_{\mathbb{Z}_n})/\mathfrak{D} \xrightarrow{\rho_2} {}^{L(X_{\mathbb{Z}_n})/\mathfrak{D}}\Big/_{T'_{\mathbb{Z}_n}(UT_n(K)^{(-)})}$$

puesto que $\mathfrak{D} = \mathfrak{C} \cap L(X_{\mathbb{Z}_n}) = \langle [{x_1}^{(0)}, {x_2}^{(0)}] \rangle$ y

$$T'_{\mathbb{Z}_n}(UT_n(K)^{(-)}) = {}^{T_{\mathbb{Z}_n}(UT_n(K))}\big/_{\mathfrak{D}} = \langle [{x_1}^{(g_1)}, {x_2}^{(g_2)}], g_1 + g_2 \geq n \rangle,$$

entonces $\rho_1(f) = f + \mathfrak{D}$ no posee términos de la forma $[{x_1}^{(0)}, {x_2}^{(0)}]$ y

$$\rho_2(\rho_1(f)) = f + \mathfrak{D} + T'_{\mathbb{Z}_n}(UT_n^{(-)}(K))$$

no tendrá términos de la forma $[{x_1}^{(g_1)}, {x_2}^{(g_2)}]$ con $g_1 + g_2 \geq n$, tampoco de la forma $[{x_1}^{(0)}, {x_2}^{(0)}]$. Además, note que por el Teorema 1.1.43, se tiene el siguiente isomorfismo:

$${}^{L(X_{\mathbb{Z}_n})/\mathfrak{D}}\Big/_{T'_{\mathbb{Z}_n}(UT_n(K)^{(-)})} = {}^{L(X_{\mathbb{Z}_n})/\mathfrak{D}}\Big/_{T_{\mathbb{Z}_n}(UT_n(K)^{(-)})/\mathfrak{D}} \cong {}^{L(X_{\mathbb{Z}_n})}\big/_{T_{\mathbb{Z}_n}(UT_n(K)^{(-)})}$$

entonces se puede afirmar que $\rho_2(\rho_1(f)) \in {}^{L(X_{\mathbb{Z}_n})}\big/_{T_{\mathbb{Z}_n}(UT_n(K)^{(-)})}$, pero $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K)^{(-)})$ osea que $\rho_2(\rho_1(f)) = 0$, pues $T_{\mathbb{Z}_n}(UT_n(K)^{(-)})$ es el ideal generado por $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K)^{(-)})$. De acuerdo con lo anterior,

$$f \equiv 0 \bmod(\mathfrak{D}, T'_{\mathbb{Z}_n}(UT_n(K)^{(-)})), \text{ es decir } f \equiv 0 \bmod([{x_1}^{(0)}, {x_2}^{(0)}], [{x_1}^{(g_1)}, {x_2}^{(g_2)}], g_1 + g_2 \geq n)$$

lo que permite concluir que $f \in \langle [{x_1}^{(0)}, {x_2}^{(0)}], [{x_1}^{(g_1)}, {x_2}^{(g_2)}], g_1 + g_2 \geq n \rangle_{T_{\mathbb{Z}_n}}$. Por lo tanto:

$$\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(UT_n(K)^{(-)}) = \langle [{x_1}^{(0)}, {x_2}^{(0)}], [{x_1}^{(g_1)}, {x_2}^{(g_2)}], g_1 + g_2 \geq n \rangle_{T_{\mathbb{Z}_n}}.$$

■

BIBLIOGRAFÍA

[1] Y. A. Bahturin, S. Montgomery, and M. Zaicev. Generalized Lie solvability of associative algebras. In *Groups, Rings, Lie and Hopf Algebras*, pages 1–23. Springer, 2003.

[2] Y. A. Bahturin, S. Sehgal, and M. Zaicev. Group gradings on associative algebras. *Journal of Algebra*, 241(2):677–698, 2001.

[3] Y. A. Bahturin, I. Shestakov, and M. Zaicev. Gradings on simple Jordan and Lie algebras. *Journal of Algebra*, 283(2):849–868, 2005.

[4] Y. A. Bahturin and M. Zaicev. Identities of graded algebras. *Journal of Algebra*, 205(1):1–12, 1998.

[5] Y. A. Bahturin and M. Zaicev. Group gradings on matrix algebras. *Canadian Mathematical Bulletin*, 45(4):499–508, 2002.

[6] Y. A. Bahturin and M. Zaicev. Graded algebras and graded identities. *LECTURE NOTES IN PURE AND APPLIED MATHEMATICS*, pages 101–140, 2003.

[7] Y. A. Bahturin and M. Zaicev. Identities of graded algebras and codimension growth. *Transactions of the American Mathematical Society*, 356(10):3939–3950, 2004.

[8] O. Di Vincenzo, P. Koshlukov and A. Valenti. Gradings on the algebra of upper triangular matrices and their graded identities. *Journal of Algebra*, 275(2):550–566, 2004.

[9] V. Drensky. *Free algebras and PI-algebras. Graduate course in algebra, 2000*. Springer-Verlag, Singapore, xii, 2013.

[10] A. Elduque and M. Kochetov. *Gradings on simple Lie algebras*. American Mathematical Soc., 2013.

[11] A. Giambruno and M. Zaicev. Codimension growth and minimal superalgebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 355(12):5091–5117, 2003.

[12] A. Giambruno and M. Zaicev. Minimal varieties of algebras of exponential growth. *Advances in Mathematics*, 174(2):310–323, 2003.

[13] A. Giambruno, M. Zaicev, and M.V. Zaicev. *Polynomial identities and asymptotic methods*. American Mathematical Soc., 2005.

[14] E. A. Hitomi and F. Yasumura. On the combinatorics of commutators of Lie algebras. *Journal of Algebra and Its Applications*, 19(06):2050119, 2020.

[15] N. Jacobson. PI-algebras. *PI-Algebras*, pages 11–66, 1975.

[16] Mikhail Kochetov and Felipe Yukihide Yasumura. Group gradings on the Lie and Jordan algebras of block-triangular matrices. *Journal of Algebra*, 537:147–172, 2019.

[17] P. Koshlukov and F. Yukihide. Elementary gradings on the Lie algebra $UT_n(K)^{(-)}$. *Journal of Algebra*, 473:66–79, 2017.

[18] D. Pagon, D. Repovš, and M. Zaicev. Group gradings on finite dimensional Lie algebras. In *Algebra Colloquium*, pages 573–578. World Scientific, 2013.

[19] S. Sehgal and M. Zaicev. Graded identities and induced gradings on group algebras. In *Groups, rings, Lie and Hopf algebras*, pages 211–219. Springer, 2003.

[20] A. Valenti and M. Zaicev. Abelian gradings on upper-triangular matrices. *Archiv der Mathematik*, 80(1):12–17, 2003.

[21] A. Valenti and M. Zaicev. Group gradings on upper triangular matrices. *Archiv der Mathematik*, 89(1):33–40, 2007.

[22] CTC Wall. Graded algebras, anti-involutions, simple groups and symmetric spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 74(1):198–202, 1968.