Expansión de acciones supersimétricas en el formalismo espinorial puro utilizando Mathematica

Carlos Alberto Dagua Conda

Universidad Tecnológica de Pereira

Facultad de ingenierías

Programa de ingeniería física

Pereira, 2017

Expansión de acciones supersimétricas en el formalismo espinorial puro utilizando Mathematica

TRABAJO DE GRADO PRESENTADO POR

Carlos Alberto Dagua Conda

COMO REQUISITO PARCIAL
PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE INGENIERO FÍSICO

DIRECTOR DE TRABAJO DE GRADO

Ph.D. Hector Iván Arcos Velasco

Universidad Tecnológica de Pereira

Facultad de ingenierías

Programa de ingeniería física

Pereira, 2017

Nota de Aceptación

M.Sc Jhon Jairo Santa Chávez
Director de Programa

Ph.D. Hector Ivan Arcos Velasco
Director

Universidad Tecnológica de Pereira

Facultad de ingenierías

Programa de ingeniería física

Pereira, 2017

Resumen

Un revolucionario método para la descripción de modelos con teorías supersimétricas en el superespacio en dimensiones de orden superior, fue propuesto recientemente por N. Berkovits y M. Cederwall en el marco del formalismo espinorial puro, con el objetivo de alcanzar la construcción de acciones manifiestamente supersimétricas que no requieran de imponer ligaduras diferentes a las convencionales para su manipulación. Lo anterior proporciona una correcta descripción para los modelos de Super Yang-Mills (SYM) en las dimensiones espacio temporales D=10 y Supergravedad (SG) en D=11, obteniéndose al final ecuaciones de movimiento con supersimetría manifiesta.
El principal objetivo de este trabajo de grado, es alcanzar una correcta manipulación de los paquetes de cálculo, xAct, GAMMA y LieART, de Mathematica e implementar rutinas para obtener las expansiones de los supercampos que surgen de la formulación de las descripciones propuesta por N. Berkovits y M. Cederwall. Al final del trabajo se muestran los códigos en los que se encuentran basados nuestros resultados.

Palabras claves: Supersimetría manifiesta, superespacio, supercampos, formalismo espinorial puro, Mathematica.

Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer a mi familia por su constante apoyo y sus palabras de motivación, desde el comienzo de mis estudios hasta ahora, en especifico me gustaría agradecerle infinitamente a mi madre *Amanda Dagua*, quién me apoyo en todas mis decisiones académicas y las relacionadas con mi vida, quién además tuvo la paciencia y la compresión para identificar mis propósitos de vida y darme la oportunidad de alcanzarlos. También quiero agradecerle a mi hermana y a mi sobrina *Luciana*, quién ha llenado de alegría nuestras vidas.

También quisiera agradecerle al profesor *Hector Iván Arcos* quién me motivo y me introdujo sobre esta área del conocimiento y sin importar mis limitaciones tuvo la confianza en mis capacidades para afrontar estos temas y desarrollarlos en su parcialidad, al profesor *Ulf Gran* de Chalmers University of Technology, por dar respuesta a las diversas preguntas que surgieron en la manipulación del paquete GAMMA.

Debo decir que también me encuentro muy agradecido con los profesores que hicieron parte de mi formación, todos ellos contribuyeron a la construcción de nuevos conocimientos para mi y representaron una motivación para alcanzar el entendimiento de algunos temas.

Índice general

Resumen **iv**

Agradecimientos **v**

1 Introducción **1**

2 Notaciones y convenciones **4**

3 Teoria Super Yang-Mills en $D = 10$, utilizando espinores puros **6**

3.1 Formulación en componentes de SYM en $D = 10$ 6

3.2 Formulación del superespacio de SYM en D=10 14

3.3 Cálculo de la cohomología del operador Q 32

3.3.1 Primera potencia de λ 33

3.3.2 Segunda potencia de λ 41

3.3.3 Tercera potencia de λ 41

4 Teoría de Supergravedad en $D = 11$, utilizando espinores puros **43**

4.1 Formulación en componentes de SG en D=11 43

4.1.1 SG en D=11 de la forma Cremmer-Julia-Scherk 43

4.2 Formulación del superespacio de SG en D=11 48

4.3 Formulación en supercampos de espinores puros 50

4.4 Cálculo de la cohomología del operador Q 51

5 Conclusiones **55**

A Indentidades de los espinores puros en $D = 10$ y $D = 11$ **57**

A.1 Identidades en $D = 10$ 57

A.2 Identidades en $D = 11$ 58

B Código de Mathematica para SYM en $D = 10$ **60**

B.1 Variación del tensor de Maxwell 60

B.2 SYM en D=10, utilizando espinores puros 61

C Código de Mathematica para SG en $D = 11$ **66**

C.1 Supergravedad en D=11, Cremmer-Julia-Scherk 66

C.2 Transformaciones de Fierz en D=11 68

C.3 Cohomología espinorial (Cederwall, Nilsson, Tsimpis) 74

Bibliografía **76**

. . . . 76

Capítulo 1

Introducción

El problema que representa obtener una formulación covariante de los modelos supersimétricos, ha incentivado que en los últimos años el problema sea abordado desde diferentes aproximaciones: La primera que podríamos destacar es la *cuantización de la partícula* (teoría de cuerdas) y la segunda mediante *teoría de campos*, ambas sin poder resolver el problema. El estudio formal del problema, presenta una combinación de ligaduras de primera y segunda clase, las cuales no pueden ser separadas en una forma covariante de Lorentz, como puede observarse en la superpartícula de Brink-Schwarz [3] o en la supercuerda de Green-Schwarz [11]. Esta ultima presenta dificultades en formular una descripción mediante supercampos (con supersimetria manifiesta) para las teorías Super Yang-Mills (SYM) en $D = 10$ y supergravedad (SG) en $D = 11$, donde las dos son teorías con supersimétria. Sin embargo recientemente fue propuesta la construcción de acciones mediante el uso componentes y la formulación del superespacio, para la teoría SYM en $D = 10$ y SG en $D = 11$, donde se obtiene una acción que no es manifiestamente supersimétrica.

Por estas razones se replanteo el problema y se alcanzó una solución mediante el uso de los espinores puros, los cuales son objetos del álgebra de Cartan [4]. El descubrimiento del rol que tienen estos objetos en la formulación del principio de acción manifiestamente supersimétrico, para modelos con supesimetría, fue solo realizado recientemente desde dos lineas de investigación: El primer paso lo dio N. Berkovits cuando alcanzó a cuantizar la supercuerda covariantamente mediante la introducción de un conjunto adecuado de variables ghost (variables espinoriales puras) [2]. Por otro lado M. Cederwall, realizó intentos de encontrar posibles deformaciones en las derivadas de orden superior en los términos de los modelos supersimétricos mediante el estudio de las ligaduras en el superespacio, lo cual revelo una estructura cohomologíca de estas deformaciones y se llego a la conclusión de que el operador BRST se convierte por medio del formalismo espinorial puro [6].

Fue posible a principios del año 2000, conocer la construcción de acciones para versiones linealizadas (teorías que no interactúan) de SYM en $D = 10$ y SG en $D = 11$, mediante el uso de supercampos de espinores puros (los cuales son dependientes del supercampo en el espacio ordinario de las coordenadas y de una variable espinorial pura $\lambda : \Psi(x, \theta, \lambda)$) y un operador BRST en el formalismo espinorial puro ($Q = \lambda D$, donde D es la derivada supersimétrica en $D = 10$ y $D = 11$, respectivamente). En esta aproximación, después de definir a lo que se le denomina numero *ghost* y de asignar naturalmente los valores numéricos $+1$ para la variable espinorial pura y 0 para campos de materia, la correspondiente teoría física es obtenida como la cohomología del operador BRST (SYM en $D = 10$ con numero ghost $+1$ y SG en $D = 11$ numero ghost $+3$), correspondiente a las ecuaciones de movimiento obtenidas al generar el correspondiente supercampo de espinores puros es un estado del operador BRST ”acotado” ($Q\Psi = 0$) y la invariancia gauge a este supercampo, donde el operador BRST es ”exacto” ($\delta\Psi = Q\Lambda$, para algunos supercampos espinoriales puros Λ). Es así que durante el desarrollo del presente trabajo de grado, obtuvimos diferentes valores de la cohomología correspondiente al operador BRST, en el formalismo espinorial puro. Lo anterior fue logrado a partir de la expansión de los supercampos en los diferentes niveles de θ y λ, por medio de los paquetes xAct, Gamma y LieART, los códigos se encuentran disponibles en https://github.com/GyTU/Gamma-xAct. Obteniendo al final, la correspondiente cohomología donde se encuentran los campos físicos auxiliares de la teoría SYM en $D = 10$

y SG en $D = 11$. Acerca de la construcción de la acción para la cohomología alcanzada, pudimos reescribir la acción linealizada, en términos de los supercampos, es decir

$$S = \int [dx] < \Psi Q \Psi > \tag{1.1}$$

Capítulo 2

Notaciones y convenciones

Durante el desarrollo de este trabajo de grado encontraremos diferentes tipos de tensores, asignados mediante las siguiente notación

Superespacio

$$x^M \equiv (x^m, \theta^\alpha, \hat{\theta}^\alpha), \qquad \theta^\alpha = \begin{pmatrix} \theta^a \\ \theta^{\dot{a}} \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

donde θ^α y $\hat{\theta}^\alpha$, son variables Grassmanianas y anticonmutan entre sí.

Espacio curvo

$$m, n, p, \ldots = 0, 1, 2, 3, \ldots, D-1 \qquad \text{índices de Einstein,} \tag{2.2}$$

Espacio plano

$$a, b, c, \ldots = 0, 1, 2, 3, \ldots, D-1 \qquad \text{índices de Lorentz,} \tag{2.3}$$

Representación espinorial

$$\mu, \nu, \rho, \ldots = 0, 1, 2, 3, \ldots, D-1 \qquad \text{índices del espinor de Majorana,} \tag{2.4}$$

Corchete de Poisson y derivadas

$$\{p_m, x^n\} = \delta_m^n = -\{x^n, p_m\} \tag{2.5}$$

$$\{b_m, c^n\} = \delta_m^n = -(-)^{bc}\{c^n, b_m\} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^m} f \equiv \partial_m f \equiv f_{,m} \tag{2.7}$$

Las convenciones asociadas, son las siguientes:

- Se define el álgebra de Clifford tangente al espacio $\left\{\Gamma^a, \Gamma^b\right\} = 2\eta^{ab}$ donde Γ^a, son matrices 32×32 en la representación de Majorana-Weyl
- Las matrices gamma simétricas 16×16, están representadas mediante

$$\gamma^m_{\alpha\beta}, \qquad (\gamma^m)^{\alpha\beta} \tag{2.8}$$

  las cuales se encuentran relacionadas a las matrices Γ^a, donde γ^m satisface la relación del álgebra de Clifford tangente al espacio, expuesto anteriormente.
- Las matrices anteriormente mencionadas satisfacen las siguientes propiedades:

$$\gamma^m_{\alpha\beta}(\gamma^n)^{\beta\delta} + \gamma^n_{\alpha\beta}(\gamma^m)^{\beta\delta} = 2\eta^{mn}\delta^\delta_\alpha \tag{2.9}$$

$$\gamma^m_{\alpha(\beta}(\gamma_m)_{\lambda\delta)} = 0 \tag{2.10}$$

- En la configuración espacio temporal de dimensión $D = 10$, los espinores de Majorana-Weyl se asigna en la representación del grupo $SO(1,9)$ $\left(\mathbf{32} = \mathbf{16} + \bar{\mathbf{16}}\right)$, donde se utilizara la notación para los espinores de Weyl χ^α $(\mathbf{16})$ y para los espinores anti-Weyl χ_α $(\bar{\mathbf{16}})$

Capítulo 3

Teoria Super Yang-Mills en $D = 10$, utilizando espinores puros

El presente capitulo se encuentra principalmente basado en la tesis de maestría de F. Eliasson [8], en este trabajo se pueden encontrar algunos de los cálculos correspondientes a la teoría Super Yang-Mills en el superespacio de dimensión espacio temporal $D = 10$. Sin embargo, para nuestro desarrollar nuestro objetivo, nos limitamos a realizar una descripción poco detallada, debido a que de la teoría SYM en $D = 10$ nos interesa específicamente, comprender los cálculos para el desarrollo de la teoría gauge y las ligaduras convencionales y dinámicas en el superespacio, mediante identidades de Bianchi, las cuales son obtenidas a partir del uso de los paquetes GAMMA y xAct [9, 10, 17] de Mathematica.

3.1 Formulación en componentes de SYM en $D = 10$

En esta sección vamos a encontrar una breve descripción de la teoría SYM en $D = 10$, para campos en la configuración on-shell, particularmente nos fijamos en el caso abeliano. Algunos de los cálculos correspondientes son obtenidos mediante Mathematica, de manera que durante el el desarrollo del capitulo observaremos lineas de código correspondientes a la implementación computacional

Caso abeliano

Para construir una versión supersimétrica de la teoría ordinaria de Yang Mills (YM) en $D = 10$, los campos asociados a esta teoría deberían encontrarse en las representaciones del álgebra supersimétrica [19], en nuestro caso consistiría de campos bosónicos y fermiónicos, además uno de estos debería corresponder a el campo gauge de la teoría ordinaria de YM en $D = 10$. Es así que la utilización de transformaciones supersimétricas (SUSY) proporcionan transformaciones de acuerdo a las representaciones del álgebra SUSY, necesario para construir SYM en $D = 10$.
El principal problema que surge de esta teoría, es que a medida que se involucran más campos a la ecuaciones de movimiento, estas no reajustan automáticamente, el correspondiente número de componentes. La solución es introducir los campos asociados a una configuración on-shell, un análisis más detallado de los grados de libertad de la configuración on-shell puede encontrarse en el apéndice C de [12]. Lo anterior puede observarse mediante el uso de ecuaciones de movimiento y la invariancia en el espacio del momentum, como se muestra en el apéndice A.

Así la acción para la teoría SYM en $D = 10$ viene dada por

$$S = \int d^{10}x \left[-\frac{1}{4} F^{mn} F_{mn} + \frac{i}{2} \chi \gamma^p \partial_p \chi \right] \tag{3.1}$$

para obtener la ecuaciones de movimiento utilizamos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} &= 0 \\ \partial_m \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_m A_n\right)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_m} &= 0 \rightarrow \partial_m \left(\partial^m A^n - \partial^n A^m\right) = 0 \rightarrow \partial_m F^{mn} = 0 \\ \partial_m \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_m \chi^\alpha\right)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi^\alpha} &= 0 \rightarrow \frac{i}{2}\{\gamma^m_{\alpha\beta}, \partial_m \chi^\beta\} = 0 \rightarrow \gamma^m_{\alpha\beta} \partial_m \chi^\beta = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde F es la magnitud del campo ordinario, construida a partir del vector $F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m$ y χ_α es un espinor de Weyl que toma valores de 1 a 16.

Consideramos las siguientes transformaciones SUSY

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon A_m &= i\left(\epsilon\gamma_m\chi\right)\\ \delta_\epsilon\chi^\alpha &= \frac{i}{2}F^{mn}\left(\gamma^{mn}\right)^\alpha\epsilon^\beta\end{aligned}\tag{3.3}$$

donde ϵ^α es una parámetro constante del espinor de Majorana-Weyl. En cuanto a demostrar que la acción 3.1 es invariante bajo transformaciones SUSY, podemos utilizar las identidades de Fierz [13].

$$\gamma^{mn}\gamma^p = \gamma^{mnp} + 2\eta^{p[n}\gamma^{m]}, \qquad \chi\gamma^p\gamma^{mn}\epsilon = \epsilon\gamma^{mn}\gamma^p\chi$$

y podemos observar que la variación de la acción en la primera parte corresponde al tensor de Maxwell, obtenido a partir del paquete xAct de Mathematica, apéndice B

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^{10}x\Big[-\frac{1}{2}F_{mn}\delta\left(F^{mn}\right) + \frac{i}{2}\delta\chi\gamma^m\partial_m\chi + \frac{i}{2}\chi\gamma^p\partial_p\left(\delta\chi\right)\Big]\\ &= \int d^{10}x\Big[-\frac{1}{2}F^{mn}\left(2\partial^m\delta A^n\right) + \frac{i}{4}F_{mn}\left(\gamma^{mn}\right)^\alpha{}_\lambda\,\epsilon^\lambda\gamma^p{}_{\alpha\beta}\partial_p\chi^\beta +\\ &+ \frac{i}{4}\chi^\alpha\gamma^p{}_{\alpha\beta}F_{mn}\left(\gamma^{mn}\right)^\beta{}_\lambda\,\epsilon^\lambda\Big]\\ &= i\int d^{10}x\Big[-\frac{1}{2}\partial_p\left(F_{mn}\epsilon\gamma^{mnp}\chi\right) + \frac{1}{4}\partial_p\left(F_{mn}\epsilon\gamma^{mn}\gamma^p\chi\right)\Big]\\ &= 0\end{aligned}$$

lo anterior es obtenido mediante el uso de las identidades de Bianchi tipo $\partial_{[m}F_{np]} = 0$, de esta manera la acción es invariante bajo transformaciones 3.3, asumiendo que los campos convergen a cero en el infinito. Por otro lado, para derivar el álgebra de los generadores que satisfacen la siguiente relación, tenemos

$$\left\{Q_\beta, Q_\delta\right\}\Psi\left(F_{mn},\chi^\alpha\right) = -2i\left(\gamma^m\right)_{\beta\delta}\partial_m\Psi\left(F_{mn},\chi^\alpha\right)\tag{3.4}$$

esto es posible obtenerse utilizando el paquete GAMMA, como se muestra a continuación

---

```
(I/2) GammaExpand[
   GammaProd[{m}, {p, q}]*
    Tensor[F, {p, q}]] \[Epsilon]1 ** \[Epsilon]2 // ExpandAll
```

---

donde hemos utilizado las funciones *GammaProd* y *GammaExpand* para obtener los correspondientes términos de las identidades de Fierz.

$$\begin{aligned} \delta_2\delta_1 A_m &= i\delta_2\left(\epsilon_1\gamma_m\chi\right) = \frac{i}{2}\epsilon_1\gamma_{mpq}\epsilon_2 F^{pq} + i\epsilon_1\gamma^q\epsilon_2 F_{mq} \\ \delta_1\delta_2 A_m &= i\delta_1\left(\epsilon\gamma_m\chi\right) = \frac{i}{2}\epsilon_2\gamma_{mpq}\epsilon_1 F^{pq} + i\epsilon_2\gamma^q\epsilon_1 F_{mq} \end{aligned} \tag{3.5}$$

posteriormente, repetimos el mismo procedimiento anterior y obtenemos

---

```
(I/2) GammaExpand[
   GammaProd[{m}, {p, q}]*
    Tensor[F, {p, q}]] \[Epsilon]2 ** \[Epsilon]1 // ExpandAll
```

---

finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \left[\delta_1, \delta_2\right] A_m &= \frac{i}{2}\epsilon_2\gamma_{mpq}\epsilon_1 F^{pq} - i\epsilon_1\gamma^q\epsilon_2 F_{mq} - \frac{i}{2}\epsilon_2\gamma_{mpq}\epsilon_1 F^{pq} - i\epsilon_1\gamma^q\epsilon_2 F_{mq} \\ &= -2i\left(\epsilon_1\gamma^q\epsilon_2\right) F_{mq} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Por otro lado, realizamos el mismo procedimiento con el conmutador para el campo F_{mn}

$$\begin{aligned} \delta_1\delta_2\left(F_{mn}\right) = \delta_1\delta_2\left(\partial_m A_n - \partial_n A_m\right) = \partial_m\left(\delta_1\delta_2 A_n\right) - \partial_n\left(\delta_1\delta_2 A_m\right) \\ \delta_2\delta_1\left(F_{mn}\right) = \delta_2\delta_1\left(\partial_m A_n - \partial_n A_m\right) = \partial_m\left(\delta_2\delta_1 A_n\right) - \partial_n\left(\delta_2\delta_1 A_m\right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

de igual forma se obtiene

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2] F_{mn} = \delta_1\delta_2 F_{mn} - \delta_2\delta_1 F_{mn} &= \partial_m (\delta_1\delta_2 A_n) - \partial_n (\delta_1\delta_2 A_m) - \partial_m (\delta_2\delta_1 A_n) + \\
&+ \partial_n (\delta_2\delta_1 A_m) \\
&= \partial_m ([\delta_1, \delta_2] A_n) - \partial_n ([\delta_1, \delta_2 A_m]) \\
&= 2i\epsilon_1\gamma^p\epsilon_2\partial_p F_{mn}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

vamos a denotar los generadores de las transformaciones 3.3 mediante Q_α, lo que indica

$$\delta_1 F_{mn} = \epsilon_1^\alpha Q_\alpha F_{mn} \tag{3.9}$$

esto nos permite reescribir el conmutador de las transformaciones $[\delta_1, \delta_2]$, como un anticonmutador de generadores de la forma $\epsilon_1^\alpha\epsilon_2^\beta \{Q_\alpha, Q_\beta\}$ y se escribe como

$$\begin{aligned}
[\delta_1, \delta_2] F_{mn} &= -\epsilon_1^\alpha\epsilon_2^\beta Q_\alpha Q_\beta F_{mn} - \left(-\epsilon_2^\beta\epsilon_1^\alpha Q_\beta Q_\alpha\right) F_{mn} \\
&= -\epsilon_1^\alpha\epsilon_2^\beta Q_\alpha Q_\beta F_{mn} + \epsilon_2^\beta\epsilon_1^\alpha Q_\beta Q_\alpha F_{mn} \\
&= -\epsilon_1^\alpha\epsilon_2^\beta \{Q_\alpha, Q_\beta\} F_{mn} \\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= -2i (\gamma^p)_{\alpha\beta} \partial_p F_{mn}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

se puede observar que la expresión anterior, transforma de acuerdo a las reglas de transformación del álgebra SUSY. Repitiendo el procedimiento anterior para el espinor de Majorana-Weyl, de manera similar se obtiene el inverso de la variación actuando sobre el espinor, como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
\delta_1\delta_2\chi^\alpha &= -\frac{i}{2}\epsilon_1^\beta\epsilon_2^\delta \left[(\gamma_n)_{\beta\lambda} (\gamma^m)^{\alpha\sigma} (\gamma^n)_{\sigma\delta} - (\gamma_n)_{\beta\lambda} (\gamma^n)^{\alpha\sigma} (\gamma^m)_{\sigma\delta}\right] \partial_m\chi^\lambda \\
\delta_2\delta_1\chi^\alpha &= -\frac{i}{2}\epsilon_2^\delta\epsilon_1^\beta \left[(\gamma_n)_{\delta\lambda} (\gamma^m)^{\alpha\sigma} (\gamma^n)_{\alpha\beta} - (\gamma_n)_{\delta\lambda} (\gamma^n)^{\alpha\sigma} (\gamma^m)_{\sigma\beta}\right] \partial_m\chi^\lambda
\end{aligned}$$

el siguiente paso es realizar nuevamente las reglas de conmutación sobre χ^α y se obtiene

$$
\begin{aligned}
\left[\delta_1, \delta_2\right] \chi^\alpha = -\frac{i}{2}\epsilon_1^\beta \epsilon_2^\delta \Big[& (\gamma_n)_{\beta\lambda} (\gamma^m)^{\alpha\sigma} (\gamma^n)_{\sigma\delta} - (\gamma_n)_{\beta\lambda} (\gamma^n)^{\alpha\sigma} (\gamma^n)_{\sigma\delta} + \\
& + (\gamma_n)_{\delta\lambda} (\gamma^m)^{\alpha\sigma} (\gamma^n)_{\sigma\beta} - (\gamma_n)_{\delta\lambda} (\gamma^m)^{\alpha\sigma} (\gamma^m)_{\sigma\beta} \Big] \partial_m \chi^\lambda \\
& = -\frac{i}{2}\epsilon_1^\beta \epsilon_2^\delta \left[-2 (\gamma^m)^{\alpha\sigma} (\gamma_n)_{\lambda\sigma} (\gamma^n)_{\beta\delta} - 2\delta^\alpha{}_\delta (\gamma^m)_{\beta\lambda} - 2\delta^\alpha{}_\beta (\gamma^m)_{\delta\lambda} \right] \partial_m \chi^\lambda
\end{aligned}
$$

lo que puede ser simplificado utilizando el álgebra de la matrices gamma $(\gamma^n)_{\alpha(\beta} (\gamma_n)_{\lambda\delta)}$, implementado en este trabajo con ayuda del software Cadabra [18], como se observa en el apéndice A

$$
\begin{aligned}
(\gamma_n)_{\beta\lambda} (\gamma^m)^{\alpha\sigma} (\gamma^n)_{\sigma\delta} + (\gamma_n)_{\delta\lambda} (\gamma^m)^{\alpha\sigma} (\gamma^n)_{\sigma\beta} &= (\gamma^m)^{\alpha\sigma} \left[(\gamma_n)_{\beta\lambda} (\gamma^n)_{\sigma\delta} + (\gamma_n)_{\delta\lambda} (\gamma^n)_{\sigma\beta} \right] \\
&= -4\delta_\lambda^\alpha (\gamma^m)_{\beta\delta} + 2 (\gamma_n)^{\alpha\sigma} (\gamma^m)_{\lambda\sigma} (\gamma^n)_{\beta\delta}
\end{aligned}
$$

Es importante recordar que consideramos los campos en la configuración on-shell de la forma $(\gamma^m_{\alpha\beta})\partial_m \chi^\beta = 0$, lo cual nos permite obtener el conmutador

$$
\left[\delta_1, \delta_2\right] \chi^\alpha = 2i\epsilon_1^\beta \epsilon_2^\delta (\gamma^m)_{\beta\delta} \partial_m \chi^\alpha \tag{3.11}
$$

es posible ahora escribir la variación en términos de los generadores SUSY ($\delta_1 \chi^\alpha = \epsilon_1^\lambda Q_\lambda (\chi^\alpha)$). Escritos de manera conveniente se tiene

$$
\{Q_\alpha, Q_\delta\} \chi^\alpha = -2i (\gamma^m)_{\beta\delta} \partial_m \chi^\alpha \tag{3.12}
$$

Por último, para el espinor de Weyl

$$
\delta\chi\gamma^m \partial_m \chi = \frac{1}{2} F_{mn} (\gamma^{mn})^\alpha{}_\lambda \epsilon^\lambda \gamma^p{}_{\alpha\beta} \partial_p \chi
$$

$$
\chi\gamma^p \partial_p (\delta\chi) = \chi^\alpha \gamma^p{}_{\alpha\beta} F_{mn} (\gamma^{mn})^\beta{}_\lambda \epsilon^\lambda
$$

y la magnitud del campo F_{mn}, se obtiene

$$
\begin{aligned}
-F_{mn}\epsilon\partial^m\chi\partial^n\chi\left(\frac{\gamma^n}{\partial^m\chi}+\frac{\gamma^m}{\partial^n\chi}\right) &= -F_{mn}\left(\epsilon\gamma^n\partial^m\chi\right)-F_{mn}\left(\epsilon\gamma^m\partial^n\chi\right)\\
&= -\frac{1}{2}F_{mn}\epsilon\gamma^{mn}
\end{aligned}
$$

Caso no-abeliano

Podemos generalizar el caso no-abeliano a partir del caso abeliano introduciendo las siguientes observaciones:

- Los campos A^m y χ^α adquieren valores en el gauge del álgebra de Lie, mediante la introducción de una base en la que se pueda expandir el campo de la forma $A^m = A_a^m T_a$
- La derivada ordinaria ∂_m ahora sera reemplazada por la derivada covariante $\nabla_m = \partial_m + [, A_m]$

La acción SYM en $D = 10$ de esta manera, toma la forma

$$
S = \int d^{10}xTr\left[-\frac{1}{4}F^{mn}F_{mn}+\frac{i}{2}\chi\gamma^m\nabla_m\chi\right] \tag{3.13}
$$

Para encontrar las ecuaciones de movimiento, se debe incluir las siguiente convenciones:

- $Tr(T^aT^b) = \delta^{ab}$, donde T^a es un generador hermitanio correspondiente a el álgebra de Lie y satisface la relación $\left[T^a, T^b\right] = f^{abc}T^c$
- Vamos a expandir los campos en términos del generador T^a de la siguiente forma $F_{mn} = F_{mn}^a T^a$, $A_m = A_m^a T^a$ y $\chi^\beta = \chi^{\beta a}T^a$

Por lo anterior la acción 3.13, toma la forma

$$
S = d^{10}x\left[-\frac{1}{4}F^{mna}F_{mn}^a+\frac{i}{2}\chi^{\alpha a}\left(\gamma^m\right)_{\alpha\beta}\partial_m\chi^{\beta a}+\frac{i}{2}\chi^{\alpha c}\left(\gamma^n\right)_{\alpha\beta}f^{abc}\chi^{\beta a}A_n^b\right] \tag{3.14}
$$

Utilizando la ecuación 3.2 se obtienen las ecuaciones de movimiento, escritas de forma compacta

$$
\begin{aligned}
\partial_m \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_m \chi^{\beta a} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi^{\beta a}} &= 0 \\
-\frac{i}{2}\gamma^m_{\alpha\beta}\partial_m \chi^{\alpha a} - \frac{i}{2}\gamma^m_{\alpha\beta}\partial_m \chi^{\alpha a} - \frac{i}{2}\left(\gamma^m_{\beta\alpha} f^{cba}\chi^{\alpha c}A^b_m - \chi^{\alpha b}\gamma^m_{\alpha\beta} f^{abc}A^c_m \right) &= 0 \\
\gamma^m_{\beta\alpha}\left(\partial_m \chi^{\alpha a} + f^{abc}\chi^{abc}\chi^{\alpha b}A^c_m \right) &= 0 \\
\left(\gamma^m\right)_{\alpha\beta} \nabla_m \chi^\beta &= 0
\end{aligned}
$$

Para el campo de gauge se sigue los mismos pasos anteriores

$$
\begin{aligned}
\partial_m \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_m A^a_n \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^a_n} &= 0 \\
-\partial_m F^{mna} + f^{abc}\left(\partial^n A^{mb} - \partial^m A^{nb} - f^{bde}A^{nd}A^{me} \right) A^c_m &= \frac{i}{2}\chi^{\alpha c}\left(\gamma^n\right)_{\alpha\beta} f^{bac}\chi^{\beta b} \\
-\nabla_m F^{mn} &= \frac{i}{2}\gamma^n_{\alpha\beta}\left\{ \chi^\beta, \chi^\alpha \right\}
\end{aligned}
$$

de esta manera obtenemos

$$
\nabla_m F^{mn} = -\frac{i}{2}\gamma^n_{\alpha\beta}\left\{ \chi^\beta, \chi^\alpha \right\} \tag{3.15}
$$

cuando aplicamos la invariancia de esta nueva acción bajo transformaciones 3.3 obtenemos el caso abeliano. Lo anterior es aplicable para los casos $D = 3, 4, 6$ y 10 debido a la proporcionalidad del termino $\left(\gamma^m\right)_{\alpha(\lambda}\left(\gamma_m\right)_{\beta\delta)} = 0$.

El álgebra de los generadores tipo on-shell satisfacen el caso abeliano para los valores de D y define su álgebra SUSY como

$$
\left\{ \nabla_\alpha, \nabla_\beta \right\} = -2i\left(\gamma^m\right)_{\alpha\beta}\nabla_m \tag{3.16}
$$

donde ∇_α y ∇_m son las derivadas covariantes fermiónica y bosónica, respectivamente

3.2 Formulación del superespacio de SYM en D=10

En este capítulo pretendemos realizar una descripción de las trasformaciones supersimétricas como una transformación de coordenadas en el superespacio y a partir de esto construir una teoría gauge correspondiente a nuestros objetivos.

Construcción de una teoría gauge en el superespacio

Los ingredientes necesarios para la construcción son:

- Definir una supervariedad X, parametrizada en el conjunto de coordenadas

$$Z^M = (x^m, \theta^\alpha)\,, \quad donde \;\; m = 0, \ldots, 9 \;\; \alpha = 1, \ldots, 16 \tag{3.17}$$

- Introducir vectores tangentes, a la supervariedad TX, el cual corresponde a la unión de los espacios tangentes a la variedad, con base coordenada $\{\partial_M\} = \{(\partial_M, \partial_\alpha)\}$
  - Definimos la 1-forma dual al vector tangente, denominado vector cotangente a la variedad dZ^M
- Tomar una sección s de TX, mediante el siguiente mapa $s : X \longrightarrow TX$ podemos tomar, de manera similar, r como una sección del espacio dual a TX, es decir $r : X \longrightarrow T * X$, donde

$$(s, r) \longrightarrow \underbrace{TX \otimes \cdots \otimes TX}_{s} \otimes \underbrace{T^*X \otimes \cdots \otimes T^*X}_{r} \tag{3.18}$$

- Generalizar el caso de las k-formas $\Omega^k(X, \mathbb{R})$, mediante la suma directa

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_0^+} \Omega^k(X, \mathbb{R}) \tag{3.19}$$

  donde hemos formado el conjunto del espacio de todas las k-formas
  - Una k-forma $p^{(k)}$ puede ser expandida en las siguiente base coordenada

$$p^{(k)} = \frac{1}{k!} dZ^{M_k} \cdots dZ^{M_1} P_{M_1} \cdots P_{M_k} \tag{3.20}$$

un ejemplo de esto, es el caso bosónico

$$dZ^M dZ^N = -(-1)^{|M||N|} dZ^N dZ^M \tag{3.21}$$

– El producto de una k-forma y una 1-forma esta dado por

$$p^{(k)} q^{(l)} = (-1)^{kl+|p||q|} q^{(l)} p^{(k)} \tag{3.22}$$

donde k y l son los grados de las formas $p^{(k)}$ y $q^{(l)}$, respectivamente

- Derivar exteriormente en la variedad X significa

$$\begin{aligned} d :& \Omega^k(X, \mathbb{R}) \longrightarrow \Omega^{k+1}(X, \mathbb{R}) \\ d =& dZ^M \partial_M \\ dp^{(k)} =& \frac{1}{k!} dZ^{M_k} \cdots dZ^{M_1} dZ^N \partial P_{M_1 \cdots M_k} \end{aligned} \tag{3.23}$$

– La principal característica de la derivada exterior es su nilpotencia

$$\begin{aligned} d^2 p^{(k)} &= d^2 \left(\frac{1}{k!} dZ^{M_k} \cdots dZ^{M_1} p_{M_1 \cdots M_k} \right) \\ &= \frac{1}{k!} d \left(dZ^{M_k} \cdots dZ^{M_1} dZ^N \partial_N p_{M_1 \cdots M_k} \right) \\ &= \frac{1}{k!} dZ^{M_k} \cdots dZ^{M_1} dZ^N dZ^M \partial_M \partial_N p_{M_1 \cdots M_k} \\ d^2 p^{(k)} &= 0 \end{aligned}$$

donde $dZ^N dZ^M = -(-1)^{|M||N|} dZ^M dZ^N$ y $\partial_M \partial_N = (-1)^{|M||N|} \partial_N \partial_M$

- Definir una métrica de la forma $g(p) : T_pX \times T_pX \to \mathbb{R}$, en nuestra base coordenada se tiene

$$g_{MN} = g\left(\partial_M, \partial_N\right) \tag{3.24}$$

donde es posible definir una base ortonormal $E^A = E^M{}_A \partial_M$

$$g_{AB} = g\left(E_A, E_B\right) = E_A{}^M g_{MN} E_B{}^N = \begin{pmatrix} \eta_{mn} & 0 \\ 0 & \delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

De esta forma nos acercamos a definir una teoría de gauge sobre el superespacio, en este caso, denominada teoría SYM, la cual posee curvatura nula. El último paso es describir un término asociado a las transformaciones locales de Lorentz y configurar una base ortonormal tangente al espacio mencionada anteriormente. El uso de las transformaciones SUSY, nos permite escoger un conjunto de coordenadas para la supervariedad donde el espacio tangente es la coordenada base.
Sea la base definida mediante

$$\begin{aligned} D_m &= \partial_m \\ D_\alpha &= \partial_\alpha + i\left(\gamma^m\right)_{\alpha\beta} \theta^\beta \partial_m \end{aligned}$$

donde utilizaremos los vectores tangente a la variedad X. Como consecuencia podemos escribir la base anterior en términos de la base coordenada $D_A = D_A{}^M \partial_M$, lo anterior nos permite definir una base para la 1-forma mediante $E^A = dZ^M E^A_M$, donde

$$D_A{}^M = \begin{pmatrix} \delta^m_n & 0 \\ +i\left(\gamma^m\right)_{\alpha\beta} \theta^\beta & \delta^\beta_\alpha \end{pmatrix}, \qquad E_M{}^A = \begin{pmatrix} \delta^n_m & 0 \\ -i\left(\gamma^n\right)_{\beta\alpha} \theta^\alpha & \delta^\alpha_\beta \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

observemos la importancia del trabajo con esta base por medio del siguiente ejemplo:
Supongamos que tenemos un campo escalar definido en el superespacio $\Phi(Z)$, si aplica-

mos transformaciones SUSY, el campo cambia mediante $\delta\Phi(Z) = \epsilon^{\alpha} Q_{\alpha} \Phi(Z)$, también es posible aplicar un cambio de coordenadas arbitrarias en el superespacio, es decir

$$\begin{aligned} Z'^{M} &= Z^{M} - \zeta^{M}(Z) \\ \Phi'(Z) &= \Phi(Z) + \zeta^{M}(Z)\partial_{M}\Phi(Z) \end{aligned}$$

de la misma manera, si deseamos realizar transformaciones SUSY como transformaciones de coordenadas en el superespacio, deberíamos obtener

$$\begin{aligned} \epsilon^{\alpha} Q_{\alpha} &= \zeta^{M}(Z)\partial_{M} \\ \delta Z^{M} &= -\zeta^{M}(Z) = -\epsilon^{\alpha} Q_{\alpha} Z^{M} \end{aligned}$$

donde los generadores Q_{α} y Q_{β} satisfacen el álgebra SUSY, $Q_{\alpha} = \partial_{\alpha} - i\left(\gamma^{m}\right)_{\alpha\lambda} \theta^{\lambda}\partial_{m}$ y $Q_{\beta} = \partial_{\beta} - i\left(\gamma^{n}\right)_{\beta\sigma} \theta^{\sigma}\partial_{n}$, es decir

$$\begin{aligned} \{Q_{\alpha}, Q_{\beta}\} &= Q_{\alpha}Q_{\beta} + Q_{\beta}Q_{\alpha} \\ &= \Big(\partial_{\alpha} - i\left(\gamma^{m}\right)_{\alpha\lambda} \theta^{\lambda}\partial_{m}\Big)\Big(\partial_{\beta} - i\left(\gamma^{n}\right)_{\beta\sigma} \theta^{\sigma}\partial_{n}\Big) + \\ &+ \Big(\partial_{\beta} - i\left(\gamma^{n}\right)_{\beta\sigma} \theta^{\sigma}\partial_{n}\Big)\Big(\partial_{\alpha} - i\left(\gamma^{m}\right)_{\alpha\lambda} \theta^{\lambda}\partial_{m}\Big) \\ &= -i\left(\gamma^{m}\right)_{\alpha\beta} \theta^{\beta}\partial_{m} - i\left(\gamma^{m}\right)_{\alpha\beta} \theta^{\beta}\partial_{m} \\ &= -2i\left(\gamma^{m}\right)_{\alpha\beta} \partial_{m} \end{aligned}$$

también se puede aplicar a cambios de coordenadas de la forma $\partial'_{M} = \frac{\partial Z^{N}}{\partial Z'^{M}}$
el cual introduce el álgebra SUSY, $D_{\alpha} = \partial_{\alpha} + i\left(\gamma^{m}\right)_{\alpha\beta} \theta^{\beta}\partial_{m}$ y $Q_{\beta} = \partial_{\beta} - i\left(\gamma^{n}\right)_{\beta\sigma} \theta^{\sigma}\partial_{n}$

$$
\begin{aligned}
\{D_\alpha, Q_\beta\} &= \left\{\left(\partial_\alpha + i\left(\gamma^m\right)_{\alpha\lambda}\theta^\lambda\partial_m\right), \left(\partial_\beta - i\left(\gamma^n\right)_{\beta\sigma}\theta^\sigma\partial_n\right)\right\} \\
&= i\left(\gamma^m\right)_{\alpha\lambda}\theta^\lambda\partial_m\partial_\beta + i\partial_\beta\left(\gamma^m\right)_{\alpha\lambda}\theta^\lambda\partial_m \\
&= -i\left(\gamma^m\right)_{\alpha\beta}\partial_m + i\left(\gamma^m\right)_{\alpha\beta}\partial_m \\
&= 0
\end{aligned}
$$

En este sentido podemos demostrar que $\delta D_A = 0$ bajo transformación de coordenada SUSY, mediante la definición del siguiente sistema coordenado

$$
\begin{aligned}
&x'^n = x^n - \epsilon^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\left(\gamma^m\right)_{\alpha\beta}\theta^\beta\frac{\partial}{\partial x^m}\right)x^n = x^n + i\epsilon^\alpha\left(\gamma^n\right)_{\alpha\beta}\theta^\beta \\
&\theta'^\beta = \theta^\beta - \epsilon^\beta \qquad \rightarrow \qquad \theta^\beta = \theta'^\beta + \epsilon^\beta
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

la pregunta que surge es, ¿qué sucede si a la base D_α realizamos una transformación de coordenadas de la forma 3.27?, lo anterior se puede observar en lo siguiente

$$
\begin{aligned}
D_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + i\left(\gamma^n\right)_{\alpha\beta}\theta^\beta\frac{\partial}{\partial x^n} \\
&= \frac{\partial\theta'^\lambda}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial\theta'^\lambda} + \frac{\partial x'^n}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial}{\partial x'^n} + i\left(\gamma^n\right)_{\alpha\beta}\left(\theta'^\beta + \epsilon^\beta\right)\left(\frac{\theta'^\sigma}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial\theta'^\sigma} + \frac{\partial x'^m}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial\theta'^\sigma} + \frac{\partial x'^m}{\partial x^n}\frac{\partial}{\partial x'^m}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta'^\alpha} - i\epsilon^\beta\left(\gamma^n\right)_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x'^n} + i\left(\gamma^n\right)_{\alpha\beta}\theta'^\beta\frac{\partial}{\partial x'^n} + i\epsilon^\beta\left(\gamma^n\right)_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x'^n} \\
&= \frac{\partial}{\partial\theta'^\alpha} + i\left(\gamma^n\right)_{\alpha\beta}\theta'^\beta\frac{\partial}{\partial x'^n} \\
&= D'_\alpha
\end{aligned}
$$

lo cual demuestra que las derivadas fermiónicas son aplicables a cambio de coordenadas bajo transformación tipo SUSY 3.3

El último paso es introducir una teoría tipo gauge en el superespacio definido previamente. Sea G el grupo de gauge (grupo de Lie), en orden a definir las cantidades covariantes a la conexión 1-forma del campo A, nos interesa la derivada covariante, donde se muestra la acción de la derivada covariante sobre la derecha del campo A.

$$\begin{aligned} \nabla_m &= \partial_m + A_m, & \nabla_m \Phi &= \partial_m \Phi + [\Phi, A_m] \\ \nabla_\alpha &= D_\alpha + A_m, & \nabla_\alpha \Phi &= D_\alpha \Phi + [\Phi, A_\alpha] \end{aligned} \tag{3.28}$$

con el propósito de proporcionar una generalización de la teoría, definimos la 2-forma del campo mediante $F = dA + A \wedge A$ y $A = E^C A_C$, de esta manera tenemos entonces

$$\begin{aligned} F &= dA + A \wedge A \\ \frac{1}{2} E^B E^C F_{CB} &= d\left(E^B A_B\right) + E^A \left(E^B A_B\right) \\ &= d\left(E^B\right) A_B + E^B E^C D_C A_B + (-1)^{AB} E^A E^B A_A A_B \\ &= E^B E^C D_C A_B + (-1)^{BC} E^B E^C A_B A_C + \frac{1}{2} E^B E^C T^D{}_{CB} A_D \end{aligned} \tag{3.29}$$

donde $A_A E^B = (-1)^{AB+0,1} E^B A_A$ y definimos la torsión mediante $dE^B = \frac{1}{2} E^C E^D T^B{}_{CD}$

$$F_{CB} = 2D_{[C} A_{B)} + 2\left(-1\right)^{BC} A_{[B} A_{C)} + T^D{}_{CB} A_D \tag{3.30}$$

lo anterior nos conduce a las siguientes expresiones donde se relacionan las magnitudes de los campos. La componente no nula de la torsión es $T^m{}_{\alpha\beta} = 2i(\gamma^m_{\alpha\beta})$, lo que nos permite escribir de forma más compacta las relaciones anteriores

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &= D_\alpha A_\beta + D_\beta A_\alpha - \{A_\alpha, A_\beta\} - 2i\left(\gamma^m\right)_{\alpha\beta} A_m = \{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} - 2i\left(\gamma^m\right)_{\alpha\beta} \nabla_m \\ F_{m\alpha} &= \partial_m A_\alpha - D_\alpha A_m - [A_m, A_\alpha] = [\nabla_m, \nabla_\alpha] \\ F_{mn} &= \partial_m A_n - \partial_n A_m - [A_m, A_n] = [\nabla_m, \nabla_n] \end{aligned}$$

de esta manera podemos demostrar que todas las componentes de la torsión son nulas excepto $T^m{}_{\alpha\beta} = -2i\,(\gamma^m)_{\alpha\beta}$, que corresponde a la dimensión 0. Al realizar el cálculo directo desde la definición de la intensidad de campo, obtenemos

$$\begin{aligned} s \wedge F = \nabla^2 = \nabla\,(\nabla_A + s \wedge A) = \nabla^2 s + \nabla s \wedge A + \nabla\,(s \wedge A) + s \wedge A \wedge A \\ = s \wedge \left(E^A \nabla_A s\right) \end{aligned} \tag{3.31}$$

donde s es una 0-forma (campo escalar), entonces en términos de la torsión, tenemos

$$F_{AB} = [\nabla_A, \nabla_B) + T^C{}_{BA} \nabla_C \tag{3.32}$$

Finalmente podemos obtener las identidades de Bianchi

$$\begin{aligned} dF &= d^2 A + A \wedge dA - dA \wedge A \\ dF &= A \wedge (F - A \wedge A) - (F - A \wedge A) \wedge A \\ dF &= A \wedge F - F \wedge A \\ dF + [F, A] &= 0 \\ \nabla F &= 0 \end{aligned} \tag{3.33}$$

en forma de componentes se tiene

$$\begin{aligned} \nabla F = \nabla \left(\frac{1}{2} E^A E^B F_{BA}\right) = 0 \\ \nabla_{[D} F_{CA)} + T^B{}_{[DC} F_{|B|A)} = 0 \end{aligned} \tag{3.34}$$

ahora podemos escribir nuestras expresiones en términos de las super identidades de Bianchi

$$\begin{aligned}\nabla_{(\alpha}F_{\beta\sigma)}(x,\theta) + 2i\,(\gamma^n)_{(\alpha\beta}\,F_{\sigma)n}(x,\theta) &= 0\\ \nabla_m F_{\alpha\beta}(x,\theta) + 2\nabla_{(\alpha}F_{\beta)m}(x,\theta) - 2i\,(\gamma^n)_{\alpha\beta}\,F_{\sigma)n}(x,\theta) &= 0\\ 2\nabla_{[m}F_{n]\alpha}(x,\theta) + \nabla_\alpha F_{mn}(x,\theta) &= 0\\ \nabla_{[m}F_{np]}(x,\theta) &= 0\end{aligned} \tag{3.35}$$

los campos $F_{AB} = (F_{mn}, F_{m\alpha}, F_{\alpha\beta})$ satisfacen las condiciones del álgebra de Bianchi en el superespacio.

Ligaduras convencionales y dinámicas

Ligaduras convencionales

Partimos de la noción de que los campos pueden ser expandidos de la siguiente forma:

- Para el campo biespinor simétrico $F_{\alpha\beta}(x,\theta)$, se tiene

$$F_{\alpha\beta}(x,\theta) = (\gamma^m)_{\alpha\beta}\,f_m(x,\theta) + (\gamma^{mnpqr})_{\alpha\beta}\,f_{mnpqr}(x,\theta) \tag{3.36}$$

  donde hemos asumido que los índices espinoriales poseen la misma quiralidad

- Para el vector-espinor $F_{m\alpha}(x,\theta)$, se tiene

$$F_{m\alpha}(x,\theta) = \tilde{f}_{m\alpha}(x,\theta) + (\gamma_m)_{\beta\alpha}\,\psi^\beta(x,\theta) \tag{3.37}$$

  el primer término corresponde a vector-espinor con traza nula

- El campo $f_m(x,\theta)$ se puede expandir en la base de Grassmaniana θ^α

$$f_m(x,\theta) = f_m^{(0)}(x) + \theta^\alpha f_{m\alpha}^{(1)} + \theta^\alpha\theta^\beta f_{m\alpha\beta}^{(2)} + \theta^{\alpha_1}\cdots\theta^{\alpha_{16}}\,f_{m\alpha_1\cdots\alpha_2}^{(16)}(x) \tag{3.38}$$

  donde el super índice de f representa el orden de la potencia asociada, la cual corresponde a la expansión en θ.

Lo anterior también nos permite comprender como puede ser expandido el vector-espinor $(f^{(1)}_{m\alpha}(x))$ de la ecuación 3.37 , esto lo podemos realizar mediante la expansión en representaciones irreducibles

$$f^{(1)}_{m\alpha} = \tilde{f}^{(1)}_{m\alpha}(x) + (\gamma_m)_{\alpha\beta}\,\lambda^{\beta}(x) \tag{3.39}$$

donde una vez más aparece un vector-espinor de traza nula $\tilde{f}^{(1)}_{m\alpha}(x)$ y además se puede observar la presencia de un campo espinorial $\psi^{\beta}(x,\theta)$ de igual dimensión al vector-espinor

$$\psi^{\beta}(x,\theta) = \left(\psi^{(0)}\right)^{\beta}(x) + \theta^{\alpha}\left(\psi^{(0)}\right)_{\alpha}^{\quad\beta} \tag{3.40}$$

es claro que al realizar nuevas expansiones sobre el campo espinorial se obtiene otro campo espinorial de igual dimensión al campo $F_{m\alpha}$, a este se le conoce como el campo espinorial asociado a SYM en $D = 10$ cuya dimensión física es $\frac{3}{2}$, de lo anterior podemos describir formas de expansión de los campos de la teoría a partir de una restricción que contenga las identidades de Bianchi actuando sobre el superespacio.

Ligaduras dinámicas

$$\begin{aligned} \left(\gamma^{mnpqr}\right)^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}(x,\theta) &= 0 \\ \left(\gamma^{mnpqr}\right)_{\alpha\beta} \left(\gamma_{mnpqr}\right)^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}\,(x,\theta) &= 0 \end{aligned} \tag{3.41}$$

este tipo de ligadura elimina la 5-forma en la expansión del campo $F_{\alpha\beta}$, en forma resumida las condiciones de ligadura cumplen la condición $F_{\alpha\beta}(x,\theta) = 0$.

si ahora reemplazamos esta condición en las identidades de Bianchi, obtenemos

$$
\begin{aligned}
(\gamma^n)_{(\alpha\beta}\, F_{\sigma)n}(x,\theta) &= 0 \\
(\gamma^n)_{(\alpha\beta}\left[\hat{f}_{\sigma)n}(x,\theta) + (\gamma_n)_{\sigma)\lambda}\, \psi^\lambda(x,\theta)\right] &= 0 \\
(\gamma^n)_{(\alpha\beta}\, \hat{f}_{\sigma)n}(x,\theta) + (\gamma^n)_{(\alpha\beta}\, (\gamma_n)_{\sigma)\lambda}\, \psi^\lambda(x,\theta) &= 0 \\
(\gamma^n)_{(\alpha\beta}\, \hat{f}_{\sigma)n}(x,\theta) &= 0 \\
\hat{f}_{\sigma n}(x,\theta) &= 0 \\
\nabla_{(\alpha} F_{\beta)m}(x,\theta) - i\,(\gamma^n)_{\alpha\beta}\, F_{nm}(x,\theta) &= 0 \\
(\gamma_s)^{\alpha\beta}\left(\nabla_{(\alpha} F_{\beta)m}(x,\theta) - i\,(\gamma^n)_{\alpha\beta}\, F_{nm}(x,\theta)\right) &= 0 \\
(\gamma_{pqrst})^{\alpha\beta}\left(\nabla_{(\alpha} F_{\beta)m}(x,\theta) - i\,(\gamma^n)_{\alpha\beta}\, F_{nm}(x,\theta)\right) &= 0 \\
\nabla_{[m} F_{np]}(x,\theta) &= 0
\end{aligned}
\tag{3.42}
$$

en este sentido

$$
F_{m\alpha} = (\gamma_m)_{\alpha\beta}\, \psi^\beta \tag{3.43}
$$

utilizando las propiedades de ortogonalidad de las matrices gamma y la identidad $\left(\gamma^{(m}\right)_{\alpha\beta}\left(\gamma^{n)}\right)^{\beta\lambda} = \eta^{mn}\delta_\alpha^\lambda$, como se muestra en el apéndice A, podemos obtener

$$
\begin{aligned}
-\,(\gamma_s)^{\alpha\beta}\,(\gamma_m)_{(\beta|\lambda|}\,\nabla_{\alpha)}\psi^\lambda(x,\theta) - i\,(\gamma_s)^{\alpha\beta}\,(\gamma^n)_{\alpha\beta}\,F_{nm}(c,\theta) &= 0 \\
-\,(\gamma_s)^{\alpha\beta}\,(\gamma_m)_{\beta\lambda}\,\nabla_\alpha\psi^\lambda(x,\theta) - 16iF_{sm}(x,\theta) &= 0 \\
-\,(\eta_{sm}\delta_\lambda^\alpha + (\gamma_{sm})^\alpha{}_\lambda)\,\nabla_\alpha\psi^\lambda(x,\theta) - 16iF_{sm}(x,\theta) &= 0 \\
-\,(\gamma_{sm})^\alpha{}_\lambda\,\nabla_\alpha\psi^\lambda(x,\theta) - 16iF_{sm}(x,\theta) - \eta_{sm}\delta_\lambda^\alpha\nabla_\alpha\psi^\lambda(x,\theta) &= 0
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

donde identificamos la antisimetría de los índices s y m en los dos primero términos y la simetría en los dos últimos índices, entonces

$$\begin{aligned}
16iF_{sm}(x,\theta) = -\left(\gamma_{sm}\right)^{\alpha}{}_{\lambda}\nabla_{\alpha}\psi^{\lambda}(x,\theta) \rightarrow F_{sm}(x,\theta) &= \frac{i}{16}\left(\gamma_{sm}\right)^{\alpha}{}_{\lambda}\nabla_{\alpha}\psi^{\lambda}(x,\theta) \\
F_{sm}(x,\theta) &= \frac{i}{16}\left(\gamma_{sm}\right)^{\alpha}{}_{\lambda}\left(\gamma_{pq}\right)^{\lambda}{}_{\alpha}C^{[pq]}(x,\theta) \\
F_{sm}(x,\theta) &= \frac{i}{16}Tr\left(\gamma_{sm}\gamma_{pq}\right)C^{[pq]}(x,\theta) \\
F_{sm}(x,\theta) &= -2iC_{[sm]}(x,\theta)
\end{aligned}$$

$$\delta^{\alpha}_{\lambda}\nabla_{\alpha}\psi^{\lambda}(x,\theta) = 0$$

son las ecuaciones asociadas, mediante el uso de la ortogonalidad de las matrices gamma entre la 1-forma y la 5-forma. Ahora es fácil determinar la expansión del coespinor $\nabla_{\alpha}\psi^{\lambda}(x,\theta)$, donde los índices contienen quiralidad opuesta

$$\nabla_{\alpha}\psi^{\lambda}(x,\theta) = \delta^{\lambda}_{\alpha}C^{(0)}(x,\theta) + \left(\gamma_{mn}\right)^{\lambda}{}_{\alpha}C^{[mn]}(x,\theta) + \left(\gamma_{mnpq}\right)^{\lambda}{}_{\alpha}C^{[mnpq]}(x,\theta) \quad (3.45)$$

y al reemplazar en la expresión 3.44, se obtiene

$$\begin{aligned}
F_{sm}(x,\theta) &= \frac{i}{16}\left(\gamma_{sm}\right)^{\alpha}{}_{\lambda}\left(\gamma_{pq}\right)^{\lambda}{}_{\alpha}C^{[pq]}(x,\theta) \\
&= \frac{i}{16}Tr\left(\gamma_{sm}\gamma_{pq}\right)C^{[pq]}(x,\theta) \\
&= -2iC_{[sm]}(x,\theta)
\end{aligned} \quad (3.46)$$

este es el punto que más no interesa observar, debido a las reglas de operación entre los campos

$$\begin{aligned}
(\gamma_{pqrs})^{\alpha\beta}\left(\nabla_{(\alpha}F_{\beta)m}(x,\theta)\right) &= 0\\
(\gamma_{pqrst})^{\alpha\beta}(\gamma_m)_{(\beta|\lambda|}\left(\nabla_{\alpha)}\psi^{\lambda}(x,\theta)\right) &= 0\\
(\gamma_{pqrst})^{\alpha\beta}(\gamma_m)_{\beta\lambda}\left(\nabla_{\alpha}\psi^{\lambda}(x,\theta)\right) &= 0\\
\frac{i}{2}Tr\left(\gamma_{pqrst}\gamma_m\gamma_{lk}\right)F^{lk}(x,\theta) + Tr\left(\gamma_{pqrst}\gamma_m\gamma_{lkuv}\right)C^{[lkuv]}(x,\theta) &= 0\\
16\cdot 5\delta^{mlkuv}_{pqrst}C_{[lkuv]}(x,\theta) &= 0\\
C_{[qrst]}(x,\theta) &= 0
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\nabla_{\alpha}\psi^{\lambda}(x,\theta) = \frac{i}{2}(\gamma_{mn})^{\lambda}{}_{\alpha}F^{mn}(x,\theta) \tag{3.48}$$

expandiendo los campos de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\psi^{\lambda}(x,\theta) &= \chi^{\lambda}(x) + \theta^{\alpha}\left(\psi^{(1)}\right)_{\alpha}{}^{\lambda}(x) + \dots\\
F^{mn}(x,\theta) &= F^{mn}(x) + \theta^{\alpha}\left(F^{(1)}\right)_{\alpha}{}^{mn}(x) + \dots
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\psi^{\lambda}(x,\theta) = \frac{i}{2}(\gamma_{mn})^{\lambda}{}_{\beta}\nabla_{\alpha}F^{mn}(x,\theta) \tag{3.50}$$

donde se obtiene

$$\begin{aligned}
\nabla_{\alpha}F_{mn}(x,\theta) + 2\nabla_{[m}F_{n]\alpha}(x,\theta) &= 0\\
\nabla_{\alpha}F_{mn}(x,\theta) + 2\nabla_{[m}\left(\gamma_{n]}\right)_{\alpha\delta}\psi^{\delta}(x,\theta) &= 0\\
\nabla_{\alpha}F_{mn}(x,\theta) + 2\left(\gamma_{[n}\right)_{|\alpha\delta|}\nabla_{m]}\psi^{\delta}(x,\theta) &= 0
\end{aligned} \tag{3.51}$$

de la misma manera

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla_\beta \psi^\lambda(x,\theta) &= \frac{i}{2} \left(\gamma^{mn}\right)^\lambda{}_\beta \left[-2 \left(\gamma_{[n}\right)_{|\alpha\delta|} \nabla_{m]} \psi^\delta(x,\theta) \right] \\ &= -i \left(\gamma^{mn}\right)^\lambda{}_\beta \left[\left(\gamma_n\right)_{\alpha\delta} \nabla_m \psi^\delta(x,\theta) \right] \end{aligned} \tag{3.52}$$

lo cual cumple con la condición

$$\nabla_{[m} F_{np]}(x) = 0 \tag{3.53}$$

finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\gamma^m\right)_{\alpha\beta} \nabla_m \psi^\beta(x,\theta) &= -\frac{i}{2} \left\{ \nabla_\alpha, \nabla_\beta \right\} \psi^\beta(x,\theta) \\ &= -\left(\gamma^{mn}\right)^\beta{}_{(\alpha} \left[\left(\gamma_{|n|}\right)_{\beta)\delta} \nabla_m \psi^\delta(x,\theta) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\left(\gamma^{mn}\right)^\beta{}_\alpha \left(\gamma_n\right)_{\beta\delta} \nabla_m \psi^\delta(x,\theta) + \left(\gamma^{mn}\right)^\beta{}_\beta \left(\gamma_n\right)_{\alpha\delta} \nabla_m \psi^\delta(x,\theta) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left(\gamma_n \gamma^{mn}\right)_{\delta\alpha} \nabla_m \psi^\delta(x,\theta) \\ &= \frac{7}{2} \left(\gamma^m\right)_{\alpha\beta} \nabla_m \psi^\beta(x,\theta) \end{aligned} \tag{3.54}$$

donde el término de la 1-forma de la matrices gamma sigue

$$\left(\gamma^m\right)_{\alpha\beta} \nabla_m \chi^\beta(x) = 0 \tag{3.55}$$

por último se obtiene la expansión

$$
\begin{aligned}
(\gamma^m)_{\alpha\beta}\,\nabla_\sigma\nabla_m\psi^\beta(x,\theta) &= 0\\
(\gamma^m)_{\alpha\beta}\,[\nabla_\sigma,\nabla_m]\,\psi^\beta(x,\theta) + (\gamma^m)_{\alpha\beta}\,\nabla_m\nabla_\sigma\psi^\beta(x,\theta) &= 0\\
(\gamma^m)_{\alpha\beta}\left[F_{\sigma m}(x,\theta)\psi^\beta(x,\theta) + \psi^\beta(x,\theta)F_{\sigma m}(x,\theta)\right] + \frac{i}{2}(\gamma^m)_{\alpha\beta}\,(\gamma_{pq})^\beta{}_\sigma\,\nabla_m F^{pq}(x,\theta) &= 0\\
-(\gamma^m)_{\alpha\beta}\,(\gamma_m)_{\sigma\lambda}\left(\psi^\lambda,\psi^\beta\right)(x,\theta) + \frac{i}{2}(\gamma^m)_{\alpha\beta}\,(\gamma_{pq})^\beta{}_\sigma\,\nabla_m F^{pq}(x,\theta) &= 0\\
-(\gamma^m)_{\alpha\beta}\,(\gamma^n)^{\alpha\sigma}\,(\gamma_m)_{\sigma\lambda}\left(\psi^\lambda,\psi^\beta\right)(x,\theta) - \frac{i}{2}(\gamma^m)_{\alpha\beta}\,(\gamma^n)^{\alpha\sigma}\,(\gamma_{pq})_\sigma{}^\beta\,\nabla_m F^{pq}(x,\theta) &= 0\\
-(\gamma^m\gamma^n\gamma_m)_{\beta\lambda}\left(\psi^\lambda,\psi^\beta\right)(x,\theta) - \frac{i}{2}Tr\,(\gamma^m\gamma^n\gamma_{pq})\,\nabla_m F^{pq}(x,\theta) &= 0\\
8\,(\gamma^n)_{\beta\lambda}\left(\psi^\lambda,\psi^\beta\right)(x,\theta) + 16i\delta^{mn}_{pq}\nabla_m F^{pq}(x,\theta) &= 0
\end{aligned}
\tag{3.56}
$$

donde el campo físico F^{mn} al aplicarle la identidades de super bianchi, toma la forma

$$
\nabla_m F^{mn}(x,\theta) = \frac{i}{2}(\gamma^n)_{\beta\lambda}\left(\psi^\lambda,\psi^\beta\right)(x,\theta) = \frac{i}{2}(\gamma^n)_{\beta\lambda}\left(\chi^\lambda,\chi^\beta\right)(x) \tag{3.57}
$$

Teoría Gauge y transformaciones SUSY en el superespacio

Las ligaduras convencionales nos muestran como se relacionan los campos A_m y A_α

$$
\begin{aligned}
(\gamma^p)^{\alpha\beta}\,F_{\alpha\beta}(x,\theta) &= 0\\
(\gamma^p)^{\alpha\beta}\left(D_\alpha A_\beta + D_\beta A_\alpha - (A_\alpha,A_\beta) - 2i\,(\gamma^m)_{\alpha\beta}\,A_m\right)(x,\theta) &= 0\\
(\gamma^p)^{\alpha\beta}\left(D_\alpha A_\beta - A_\alpha A_\beta - i\,(\gamma^m)_{\alpha\beta}\,A_m\right)(x,\theta) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
A^p(x,\theta) = -\frac{i}{16}(\gamma^p)^{\alpha\beta}\left(D_\alpha A_\beta(x,\theta) - A_\alpha(x,\theta)A_\beta(x,\theta)\right) \tag{3.58}
$$

el supercampo $A_p(x,\theta)$ es determinado mediante el supercampo $A_\alpha(x,\theta)$. Sin embargo nuestro trabajo se enfoca principalmente en el campo $A_\alpha(x,\theta)$. El cual satisface la invariancia de gauge por medio de la super-conexión, donde el índice $A = (m,\alpha)$ y Λ es un supercampo escalar bosónico. Tenemos en particular $\delta A_A(x,\theta) = \nabla_A \Lambda(x,\theta)$

$$\begin{aligned} \delta A_\alpha(x,\theta) &= \nabla_\alpha \Lambda(x,\theta) \\ \delta A_\alpha &= D_\alpha \Lambda(x,\theta) + \left[\nabla, A_\alpha\right](x,\theta) \\ &= \partial_\alpha \Lambda(x,\theta) + i\left(\theta\gamma^m\right)_\alpha \partial_m \Lambda(x,\theta) + \left[\Lambda, A_\alpha\right](x,\theta) \end{aligned} \tag{3.59}$$

podemos expandir los supercampos de la siguiente manera

$$A_\alpha(x,\theta) = A_\alpha^{(0)}(x) + \theta^{\beta_1} A^{(1)}_{\alpha\beta_1}(x) + \theta^{\beta_1\beta_2} A^{(2)}_{\alpha\beta_1\beta_2} + \ldots \tag{3.60}$$

$$\Lambda(x,\theta) = \Lambda^{(0)}(x) + \theta^{\beta_1}\Lambda_{\beta_1}\Lambda^{(1)}_{\beta_1}(x) + \theta^{\beta_1\beta_2}\Lambda^{(2)}_{\beta_1\beta_2} + \ldots \tag{3.61}$$

reemplazando estas expresiones en la ecuación 3.59 y luego aplicando la invariancia de gauge a cada nivel de θ, se obtiene

$$\begin{aligned} \delta A_\alpha^{(0)}(x) &= \Lambda_\alpha^{(1)}(x) + i\left(\theta\gamma^m\right)_\alpha \partial_m \Lambda^{(0)}(x) + \left[\Lambda^{(0)}, A_\alpha^{(0)}\right](x) \\ \theta^{\beta_1}\delta A^{(1)}_{\alpha\beta_1}(x) &= 2\theta^{\beta_1}\Lambda^{(2)}_{\alpha\beta_1}(x) + i\left(\theta\gamma^m\right)_\alpha \theta^{\beta_1}\partial_m\Lambda^{(1)}_{\beta_1}(x) + \theta^{\beta_1}\left[\Lambda^{(0)}, A_{\alpha\beta_1\beta_2}\right](x) + \\ &+ \theta^{\beta_1}\left\{\Lambda^{(1)}_{\beta_1}, A_\alpha^{(0)}\right\}(x) \\ \theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\delta A^{(2)}_{\alpha\beta_1\beta_2}(x) &= 3\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\Lambda^{(3)}_{\alpha\beta_1\beta_2}(x) + i\left(\theta\gamma^m\right)_\alpha \theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\partial_m\Lambda^{(2)}_{\beta_1\beta_2}(x) + \\ &+ \theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\left[\Lambda^{(1)}_{\beta_2}, A^{(1)}_{\alpha\beta_1}\right](x) + \theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\left[\Lambda^{(2)}_{\beta_1\beta_2}, A_\alpha^{(0)}\right](x) \\ &= \ldots \end{aligned}$$

lo que es igual

$$\begin{aligned} \delta A_\alpha^{(0)}(x) &= \Lambda_\alpha^{(1)}(x) + \left[\Lambda^{(0)}, A_\alpha^{(0)}\right](x) \\ \delta A^{(1)}_{\alpha\beta_1}(x) &= 2\Lambda^{(2)}_{\alpha\beta_1} + i\left(\gamma^m\right)_{\alpha\beta}\partial_m\Lambda^{(0)}(x) + \left[\Lambda^{(0)}, A^{(1)}_{\alpha\beta_1}\right](x) + \left(\Lambda^{(1)}_{\beta_1}, A_\alpha^{(0)}\right](x) \end{aligned}$$

$$\delta A^{(2)}_{\alpha\beta_1\beta_2}(x) = 3\Lambda^{(3)}_{\alpha\beta_1\beta_2} + i\,(\gamma^m)_{\alpha\beta}\,\partial_m\Lambda^{(1)}_{\beta_2}(x) + \left[\Lambda^{(0)}, A^{(2)}_{\alpha\beta_1\beta_2}\right](x) + \left[\Lambda^{(1)}_{\beta_1}, A^{(1)}_{\alpha\beta_1}\right](x) + \\ + \left[\Lambda^{(2)}_{\beta_1\beta_2}, A^{(0)}_{\alpha}\right](x)$$

Para nuestras intenciones de obtener la expansión de los supercampos y su respectiva cohomología es importante introducir lo siguiente:

Análisis de la invariancia de gauge

En esta parte del trabajo vamos a realizar un análisis detallado de la simplificación de las expresiones de los supercampos en términos de la base de la matrices gamma y de las ligaduras que proporcionan la identidades de bianchi en el superespacio, es así como obtenemos

- Nivel cero de θ, componente $A^{(0)}_{\alpha}(x)$

$$\Lambda^{(1)}_{\alpha} = -A^{(0)}_{\alpha}(x) - \left[\Lambda^{(0)}, A^{(0)}_{\alpha}\right](x) \tag{3.62}$$

  para este caso es fácil determinar el correspondiente nivel de gauge, debido a que no existe relación entre los índices.

- Primer nivel de θ, componente $A^{(1)}_{\alpha\beta}(x)$, para este caso tenemos antisimetría entre los índices α y β, la descomposición en representaciones irreducibles

$$\begin{aligned} (00010)\otimes(00010) &= (00020)\oplus\cancel{(00100)}\oplus(10000) \\ (00010)^{\otimes_A 2} &= \cancel{(00100)} \end{aligned} \tag{3.63}$$

  se puede identificar que los índices antisimétricos son proporcionales a la 3-forma de las matrices gamma, así podemos descartar la 3-forma y expandir el campo en la 5-forma, mediante el uso de las ligaduras dinámicas, como sigue

$$
\begin{aligned}
\left(\gamma^{mnpqr}\right)^{\alpha\beta}\left(D_\alpha A_\beta - A_\alpha A_\beta - i\gamma^m_{\alpha\beta}A_m\right)(x) = 0\\
\left(\gamma^{mnpqr}\right)^{\alpha\beta}\left(\partial_\alpha A_\beta + i\left(\theta\gamma^m\right)_\alpha \partial_m A_\beta - A_\alpha A_\beta\right)(x) = 0\\
\left(\gamma^{mnpqr}\right)^{\alpha\beta} A^{(1)}_{\alpha\beta}(x) = 0
\end{aligned}
\tag{3.64}
$$

por lo tanto, ahora solo nos queda el término de la 1-forma la cual corresponde a la invariancia de gauge para el primer nivel de θ, es decir $A^{(1)}_{\alpha\beta}(x) = i(\gamma^m)_{\alpha\beta}a_m(x)$, donde $a_m(x)$ es un potencial de gauge para SYM en $D = 10$ y puede ser escrito en términos de los supercampos como

$$
\begin{aligned}
A_m(x,\theta) &= -\frac{i}{16}\left(\gamma_m\right)^{\alpha\beta}\left(D_\alpha A_\beta - A_\alpha A_\beta\right)(x,\theta)\\
A_m(x,\theta)|_{\theta=0} &= -\frac{i}{16}\left(\gamma_m\right)^{\alpha\beta}\partial_\alpha\left(i\theta^{\beta_2}\left(\gamma^n\right)_{\beta_1\beta_2}a_n(x)\right)\\
A_m(x,\theta)|_{\theta=0} &= \frac{1}{16}\left(\gamma_m\right)^{\alpha\beta}\left(\gamma^n\right)_{\beta\alpha}a_n(x)\\
A_m(x,\theta) &= a_m(x)
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

donde se satisface las transformaciones de gauge 3.59

$$
\begin{aligned}
\delta A^{(1)}_{\alpha\beta} &= i\left(\gamma^m\right)_{\alpha\beta_1}\partial_m\Lambda^{(0)}(x) + \left[\Lambda^{(0)}, A^{(1)}_{\alpha\beta_1}\right](x)\\
i\left(\gamma^m\right)_{\alpha\beta_1}\delta a_m &= i\left(\gamma^m\right)_{\alpha\beta_1}\partial_m\Lambda^{(0)}(x) + i\left(\gamma^m\right)_{\alpha\beta_1}\left[\Lambda^{(0)}, a_m\right](x)\\
\delta a_m(x) &= \partial_m\Lambda^{(0)}(x) + \left[\Lambda^{(0)}, a_m\right](x)
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

- Segundo nivel de θ, componente $A^{(2)}_{\alpha\beta_1\beta_2}$, una vez más para este caso tenemos que utilizar la descomposición en representaciones irreducibles

$$\begin{aligned}(00010) \otimes (00010)^{\otimes_S 2} = \underbrace{(00020) \oplus (10000)}_{\otimes(00010)} &= \cancel{(00030)} \oplus (01001) \oplus \\ &\oplus \cancel{(10010)} \oplus (00001) \\ (00010)^{\otimes_A 3} &= \cancel{(00030)} \oplus \cancel{(10010)}\end{aligned} \tag{3.67}$$

utilizando las ligaduras dinámicas para la 5-forma de las matrices gamma se tiene

$$\begin{aligned}(\gamma^{mnpqr})^{\alpha\beta} \left(\partial_\alpha A_\beta + i \left(\theta\gamma^m\right)_\alpha \partial_m A_\beta - A_\alpha A_\beta\right)(x,\theta) = 0 \\ (\gamma^{mnpqr})^{\alpha\beta} \theta^{\beta_1} A^{(2)}_{\alpha\beta_1\beta_2}(x) = 0 \\ A^{(2)}_{\alpha\beta_1\beta_2}(x) = (\gamma^{mnp})_{\beta\beta_1} f_{mnp\alpha}(x)\end{aligned} \tag{3.68}$$

donde $f_{mnp\alpha} = (\gamma_{mnp})_{\alpha\sigma} \zeta^\sigma$ es antisimétrico en m, n y p. Así $A^{(2)}_{\alpha\beta_1\beta_2}(x)$ toma la forma

$$A^{(2)}_{\alpha\beta_1\beta_2}(x) = (\gamma)_{\beta_1\beta_2} (\gamma_{mnp})_{\alpha\sigma} \zeta^\sigma \tag{3.69}$$

$$\left(\gamma^{rstuv}\right)^{\alpha\beta} \theta^{\beta_1} (\gamma^{mnp})_{\beta_1\beta_2} (\gamma_{mnp})_{\alpha\sigma} \zeta^\sigma \rightarrow -\theta\gamma^{mnp}\gamma^{rstuv}\gamma_{mnp}\zeta = 0 \tag{3.70}$$

donde también se puede observar la expansión del supercampo $A_m(x,\theta)$ en el primer nivel como (utilizando ligaduras convencionales)

$$\begin{aligned}\theta^{\beta_1} A^{(1)}_{r\beta_1}(x) &= -\frac{i}{16} (\gamma_r)^{\alpha\beta} \left(2\theta^{\beta_1} A_{\alpha\beta\beta_1}\right)(x) \\ &= -\frac{i}{8} (\gamma_r)^{\alpha\beta} \theta^{\beta_1} (\gamma^{mnp})_{\beta\beta_1} (\gamma_{mnp})_{\alpha\sigma} \zeta^\sigma(x) \\ &= -\frac{48i \cdot 3!}{8} \theta^{\beta_1} (\gamma_r)_{\beta_1\sigma} \zeta^\sigma(x) \\ &= -36i (\gamma_r)_{\beta_1\sigma} \zeta^\sigma(x)\end{aligned} \tag{3.71}$$

y nos permite escribir las expansiones de los campos correspondientes, como sigue

$$
\begin{aligned}
A_m(x,\theta) &= a_m(x) + i\theta\gamma_m\chi + \dots \\
A_\alpha(x,\theta) &= i\,(\gamma^m\theta)_\alpha\,a_m - \frac{1}{36}\,(\theta\gamma^{mnp}\theta)\,(\gamma_{mnp}\chi)_\alpha + \\
&\quad + \frac{1}{24}\,(\gamma^{mnpqr}\theta)_\alpha\,(\theta\gamma_{mnp}\theta)\,(\partial_m a_n + a_r a_q) + \dots
\end{aligned}
\tag{3.72}
$$

3.3 Cálculo de la cohomología del operador Q

En esta parte del trabajo obtenemos las ecuaciones de movimiento y la invariancia de gauge de los campos físicos emergentes de la expansión de los supercampos mediante la aplicación del operador Q. Este operador es construido a partir de un tipo de espinores, denominados espinores puros. La aproximación al formalismo de los espinores puros a SYM fue introducido por N. Berkovits quién desarrolló la idea de cuantizar covariantemente la supercuerda de Green-Schwarz [15] y ajustar la teoría de gauge a los campos adicionales tipo "ghost"[1], con el objetivo de obtener los grados de libertad correspondientes al sistema.

Para obtener super Yang-Mills, N. Berkovits trabajo en el formalismo espinorial puro λ^α en $D = 10$, que satisface la condición del espinor de Majorana-Weyl y demuestra los campos contenidos en la configuración on-shell mediante la ligadura espinorial pura

$$
(\lambda^\alpha\gamma^m\lambda^\beta) = 0 \tag{3.73}
$$

donde se desarrolla mediante el parámetro bosónico λ^α y el fermiónico λ^β y se puede observar que las ligaduras se encuentran definidas covariantemente en las representaciones del grupo de Lorentz, lo cual desarrolla transformaciones espinoriales puras. Como se va a mostrar más adelante las ligaduras de los espinores puros reducen el número de componentes independientes a 11. Lo anterior es posible simplemente rompiendo la simetría manifiesta de Lorentz y escogiendo una base de matrices gamma apropiadas.

3.3.1 Primera potencia de λ

Para alcanzar una correcta descripción, empezamos definiendo los campos asociados en la teoría, en términos de las representaciones irreducibles del grupo $SO(1,9) \approx D_5$ [5], los campos transforman

$$A_\alpha \sim (00010); \qquad \lambda^\alpha \sim (00001); \qquad D_{\delta_1} \cdots D_{\delta_n} \lambda \sim (n0001). \tag{3.74}$$

con base en lo anterior, podemos ahora definir el operador Q, mediante

$$Q = \lambda^\alpha D_\alpha = \lambda^\alpha \left(\partial_\alpha - i \left(\gamma^m \theta\right)_\alpha \partial_m\right) \tag{3.75}$$

donde λ^α es un espinor puro. Q es un operador BRST diferente al generador del álgebra SUSY (Q_α). Para demostrar que Q es nilpotente cuando actúa sobre un campo ordinario tenemos

$$\begin{aligned} Q^2\Psi &= (\lambda^\alpha\partial_\alpha - i(\lambda\gamma^m\theta)\partial_m)(\lambda^\beta\partial_\beta - i(\lambda\gamma^n\theta)\partial_n)\Psi \\ &= \lambda^\alpha\lambda^\beta\partial_\alpha\partial_\beta\Psi - i(\lambda\gamma^n\lambda)\partial_n\Psi + i\lambda^\alpha(\lambda\gamma^n\theta)\partial_n\partial_\alpha\Psi - \\ &- i\lambda^\beta(\lambda\gamma^m\theta)\partial_m\partial_\beta\Psi - i(\lambda\gamma^m\theta)(\lambda\gamma^\beta\theta)\partial_\alpha\partial_\beta\Psi \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.76}$$

el primer término de la segundo linea de la ecuación 3.76 es cero debido al producto de los espinores puros es simétrico, mientras que las dos derivadas son anticonmutativas. el segundo término es cero por las ligaduras de los espinores puros 3.73. Por último los dos siguientes términos se cancelan entre sí y el último es nulo debido a la simetría opuesta de los indices α y β de los matrices gamma comparado a sus derivadas.

Es importante tener en cuenta el calculo del operador Q para esta cohomología. Para el operador Q actuando sobre un espacio vectorial ($Q : \Lambda \to \Lambda$), se tiene que la cohomología es un espacio vectorial cociente $H\left(Q\right) = \frac{Ker(Q)}{Im(Q)}$, en otras palabras los elementos del espacio vectorial cerrado a Q no son exactos. El espacio Λ es el espacio de funciones de las variables x^m, θ^α y λ^α. Específicamente nos restringimos a las funciones que pueden ser expandidas en series de potencia de θ y λ. Lo anterior es debido a la antisimetría de orden superior de θ. Una función general en el espacio Λ puede ser expandida, apéndice B

$$
\begin{aligned}
Q\Psi = Q\Big(&\lambda^{\alpha_1}A^{(0)}_{\alpha_1}(x) + \lambda^{\alpha_1}\theta^{\beta_1}A^{(1)}_{\alpha_1\beta_1}(x) + \lambda^{\alpha_1}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}A^{(2)}_{\alpha_1\beta_1\beta_2}(x) + \cdots \\
&+\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}A^{(0)}_{\alpha_1\alpha_2\beta_1}(x) + \lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\theta^{\beta_1}A^{(1)}_{\alpha_1\lambda_2\beta_1}(x) + \lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}A^{(2)}_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}(x) + \\
&+ \lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\theta^{\beta_3}A^{(3)}_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_1\beta_3}(x) + \cdots \\
&+\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3}A^{(0)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(x) + \lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3}\theta^{\beta_1}A^{(1)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1} + \lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}A^{(2)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2}(x) + \\
&+ \lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\theta^{\beta_3}A^{(3)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3}(x) + \lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3}\theta^{\beta_1}\cdots\theta^{\beta_4}A^{(3)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\cdots\beta_4}(x) + \\
&+ \lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3}\theta^{\beta_1}\cdots\theta^{\beta_5}A^{(5)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\cdots\beta_5}(x)\Big)
\end{aligned}
\tag{3.77}
$$

más adelante vamos a observar como el operador Q actua sobre el subespacio vectorial de la forma

$$
Q : \Lambda^{(i,j)} \to \Lambda^{(i+1,j-1)} \bigoplus \Lambda^{(i+1,j+1)} \tag{3.78}
$$

El efecto de que Q no incluya diferentes niveles de λ indica que la cohomología en cada subespacio proporciona una específica potencia de λ. Si ahora definimos el subespacio $\Lambda^{(i)} = \bigoplus_{j=1}^{16}\Lambda^{(i,j)}$ y asignamos $Q_{(i)}$ al subespacio $\Lambda^{(i)}$, la cohomología para una potencia dada (i) de λ es $H^{(i)}(Q) = H(Q_{(i)}) = Ker(Q_{(i)})/Im(Q_{i-1})$, es así entonces que podemos obtener la cohomología completa a partir de

$$
H(Q) = \bigoplus_i H^{(i)}(Q) \tag{3.79}
$$

ahora nos podemos disponer al realizar los cálculos de la cohomología Q, considerando el primer nivel de λ, es decir $H^{(1)}(Q)$. Para esta caso tenemos el espacio de los campos dados por las funciones de la forma $\lambda^\alpha A_\alpha(x,\theta)$, donde A_α puede ser expandido, apéndice B

$$A_{\alpha_1}(x,\theta) = a^{(0)}_{\alpha_1}(x) + \theta^{\beta_1} a^{(1)}_{\alpha_1\beta_1}(x) + \cdots + \theta^{\beta_1}\cdots\theta^{\beta_{16}} a^{(16)}_{\alpha_1\beta_1\cdots\beta_{16}}(x) \tag{3.80}$$

para un campo particular A_α la cohomología debería satisfacer

$$Q\lambda^{\alpha_1} A_{\alpha_1} = \lambda^\delta D_\delta \lambda^{\alpha_1} A_{\alpha_1} = \lambda^\delta \lambda^{\alpha_1} D_\delta A_{\alpha_1} \tag{3.81}$$

donde la última igualdad no contiende derivadas con respecto λ^α. Ahora los dos índices de los espinores puros pueden ser expandidos en matrices gamma, debido a que los espinores puros conmutan con solo los términos proporcionales a $\gamma^{(1)}$ y $\gamma^{(5)}$,

$$\lambda^\delta \lambda^{\alpha_1} = \frac{1}{16\cdot 5!} \left(\gamma_{a_1\cdots a_5}\right)^{\delta\alpha_1} \left(\lambda\gamma^{a_1\cdots a_5}\lambda\right) \tag{3.82}$$

así, la ecuación de movimiento de los elementos cerrados de Q son equivalentes a $\left(\gamma^{(5)}\right)^{\alpha\beta} D_\alpha A_\beta = 0$ [19]. Sin embargo, todavía no se ha identificado los campos exactos asociados Q, lo cual puede ser interpretado mediante la siguiente invariancia de gauge $\lambda^\alpha \delta A_\alpha = Q\Omega = \lambda^\alpha D_\alpha \Omega$, donde $\Omega \in \Lambda^{(0)}$ puede expandirse, apéndice B

$$\Omega(x,\theta) = \omega^{(0)}(x) + \theta^{\beta_1}\omega^{(1)}_{\beta_1}(x) + \cdots + \theta^{\beta_1}\cdots\theta^{\beta_{16}}\omega^{(16)}_{\beta_1\cdots\beta_{16}}(x) \tag{3.83}$$

de esta manera tenemos para los diferentes niveles de la expansión

Invariancia de gauge y ecuación de movimiento

Encontramos la ecuación de movimiento y la invariancia de gauge respectivamente, de los términos de la expansión 3.77

- Nivel cero de θ (invariancia de gauge)

$$
\begin{aligned}
\lambda^{\alpha_1}\delta A_{\alpha_1} &= \lambda^{\alpha_1} D_{\alpha_1}\Omega \\
\lambda^{\alpha_1}\delta a^{(0)}_{\alpha_1} &= \lambda^{\alpha_1}\left(\partial_{\alpha_1} - i\left(\gamma^m\theta\right)_{\alpha_1}\partial_m\right)\omega^{(0)}(x) \\
&= \lambda^{\alpha_1}\left(\partial_{\alpha_1}\omega^{(0)} - i\left(\gamma^m\theta\right)_{\alpha_1}\partial_m\omega^{(0)}\right)(x) \\
&= \omega^{(1)}_{\alpha_1}(x)
\end{aligned}
\tag{3.84}
$$

Para esta cohomología, no existe correspondencia entre los índices de la invariancia de gauge y la ecuación de movimiento, debido a esto la invariancia de gauge para el supercampo, esta dada por

$$
a^{(0)}_{\alpha_1} = \omega^{(1)}_{\alpha_1}
\tag{3.85}
$$

- Nivel cero de θ (ecuación de movimiento)

$$
\begin{aligned}
\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\delta} D_{\delta} a^{(0)}_{\alpha_1} &= \lambda^{\alpha_1}\lambda^{\delta}\left(\partial_\delta - i\left(\gamma^m\theta\right)_\delta\partial_m\right) a^{(0)}_{\alpha_1}(x) \\
&= \left(\gamma^{(5)}\right)^{\alpha_1\delta}\left(\partial_\delta a^{(0)}_{\alpha_1} - i\left(\gamma^m\theta\right)_\delta\partial_m a^{(0)}_{\alpha_1}\right)(x) \\
&= \left(\gamma^{(5)}\right)^{\alpha_1\delta} a^{(1)}_{\alpha_1\delta}(x) = 0
\end{aligned}
\tag{3.86}
$$

- Primer nivel de θ (invariancia de gauge)

$$
\begin{aligned}
\theta^{\beta_1}\lambda^{\alpha_1}\delta a^{(1)}_{\alpha_1\beta_1}(x) &= \theta^{\beta_1}\lambda^{\alpha_1}\left(\partial_{\alpha_1} - i\left(\gamma^m\theta\right)_{\alpha_1}\partial_m\right)\omega^{(1)}_{\beta_1}(x) \\
&= \theta^{\beta_1}\lambda^{\alpha_1}\left(\partial_{\alpha_1}\omega^{(1)}_{\beta_1} - i\left(\gamma^m\theta\right)_{\alpha_1}\partial_{\alpha_1}\omega^{(1)}_{\beta_1}\right)(x) \\
&= \left(2\omega^{(2)}_{\alpha_1\beta_1} - i\left(\gamma^m\right)_{\alpha_1\beta_1}\partial_m\omega^{(0)}\right)(x)
\end{aligned}
\tag{3.87}
$$

  - Descomposición en representaciones irreducibles ____________________

$$a^{(1)}_{\alpha_1\beta_1}(x)$$

$$(00010) \otimes (00010) = (00020) \oplus \cancel{(00100)} \oplus (10000)$$

$$\omega^{(2)}_{\alpha_1\beta_1}(x)$$

$$(00010)^{\otimes_A 2} = \cancel{(00100)}$$

Para determinar esta cohomología, principalmente nos fijamos en la antisimetría de los índices α_1 y β_1 de $a^{(1)}_{\alpha_1\beta_1}$ (igual que en la sección anterior) e identificamos los términos en la expansión proporcionales a las matrices gamma antisimétricas ($\gamma^{(1)}, \gamma^{(3)}$ y $\gamma^{(5)}$). Por otro lado, los índices de la invariancia de gauge $\omega^{(2)}_{\alpha_1\beta_1}$, son antisimétricos; al realizar la descomposición en representaciones irreducibles, como se muestra aquí, se simplifica la 3-forma de la ecuación de movimiento, además las ligaduras dinámicas nos indican que la 5-forma de la matrices gamma es cero 3.41, es decir $(\gamma^{(5)})^{\alpha_1\beta_1} a^{(1)}_{\alpha_1\beta_1}(x) = 0$, es por esto que la única solución posible es la 1-forma, que se puede escribir como

$$a^{(1)}_{\alpha_1\beta_1} = -i(\gamma^m)_{\alpha_1\beta_1} a_m(x) \tag{3.88}$$

Hasta ahora, los cálculos han sido relativamente fáciles, sin embargo a medida que aumenta el nivel de la expansión de θ, es necesario implementar el método propuesto por [8], para simplificar las expresiones de los supercampos mediante la descomposición en representaciones irreducibles, presentes en la invariancia de gauge y la ecuación de movimiento; también vamos a poder observar como funciona este método sistemático para obtener los valores asociados a la primera expansión en potencia de λ. Nuestro análisis se limita a la expansión de la potencia tres de θ y a partir de lo aprendido, implementar las expansión en el orden de $\lambda^3\theta^5$, lo que corresponde a nuestro principal objetivo

- Primer nivel θ (ecuación de movimiento)

$$\begin{aligned}\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\delta}\theta^{\beta_1}D_{\delta}a^{(1)}_{\alpha_1\beta_1} &= \lambda^{\alpha_1}\lambda^{\delta}\theta^{\beta_1}\left(\partial_{\alpha_1} - i\left(\gamma^m\theta\right)_{\delta}\partial_m\right)a^{(1)}_{\alpha_1\beta_1}(x) \\ &= \left(\gamma^{(5)}\right)^{\alpha_1\delta\beta_1}\theta^{\beta_1}\left(2a^{(2)}_{\delta\alpha_1} - i\left(\gamma^m\right)_{\alpha_1\beta_1}\partial_m a^{(0)}_{\delta}\right)(x) = 0\end{aligned} \tag{3.89}$$

– Descomposición en representaciones irreducibles

$\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\delta}\theta^{\beta_1}$

$$\underbrace{(00001)\otimes(00001)}_{\otimes(00001)} = \underbrace{(00002)\oplus(00100)\oplus(10000)}_{\otimes(00001)} =$$

$$= (00002)\oplus(00001) = (00003)\oplus(00101)\oplus(10001)$$

$a^{(2)}_{\alpha_1\delta\beta_1}$

$$(00010)^{\otimes 2A}\otimes(00010) = (00100)\otimes(00010) = \cancel{(00110)}\oplus$$

$$(01001)\oplus(10010)\oplus(00001)$$

$(\gamma^m)_{\alpha_1\beta_1}\partial_m a^{(0)}_{\delta}$

$$\underbrace{(00010)\otimes(00010)}_{\otimes(00010)} = (10000)\otimes(00010) = (10010)\oplus(00001)$$

- Segundo nivel de θ (Invariancia de gauge)

$$\begin{aligned}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\lambda^{\alpha_1}\delta a^{(2)}_{\alpha_1\beta_1\beta_2}(x) &= \theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\lambda^{\alpha_1}\left(\partial_{\alpha_1} - i\left(\gamma^m\theta\right)_{\alpha_1}\partial_m\right)\omega^{(2)}_{\beta_1\beta_2}(x) \\ &= \theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\lambda^{\alpha_1}\left(\partial_{\alpha_1}\omega^{(2)}_{\beta_1\beta_2} - i\left(\gamma^m\theta\right)_{\alpha_1}\partial_m\omega^{(2)}_{\beta_1\beta_2}\right)(x) \\ &= \left(3\omega^{(3)}_{\alpha_1\beta_1\beta_2} - i\left(\gamma^m\right)_{\alpha_1\beta_1}\partial_m\omega^{(1)}_{\beta_2}\right)(x)\end{aligned} \tag{3.90}$$

– Descomposición en representaciones irreducibles

$$\lambda^{\alpha_1}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}$$

$$(00001) \otimes (00001)^{\otimes_A 2} = (00001) \otimes (00100) = (00101) \oplus$$

$$\oplus (01010) \oplus (10001) \oplus (00010)$$

$$a^{(2)}_{\alpha_1\beta_1\beta_2}$$

$$(00010)^{\otimes_A 2} \otimes (00010) = (00100) \otimes (00010) = (00110) \oplus$$

$$\oplus (01001) \oplus \cancel{(10010)} \oplus (00001)$$

$$\omega^{(3)}_{\alpha_1\beta_1\beta_2}$$

$$(00010)^{\otimes_A 3} = \cancel{(01001)}$$

$$(\gamma^m)_{\alpha_1\beta_1}\partial_m\omega^{(1)}_{\beta_2}$$

$$\underbrace{(00010) \otimes (00010)}_{\otimes(00010)} = \underbrace{(00020) \oplus (00100) \oplus (10000)}_{\otimes(00010)} =$$

$$= (10010) \oplus (00001)$$

Para esta cohomología, expandimos el campo $a^{(2)}_{\alpha_1\beta_1\beta_2}$ en representaciones irreducibles, teniendo en cuenta la antisimetría de los índices $\beta_\#$. Donde podemos observar que son proporcionales a la 3-forma de las matrices gamma ($\gamma^{(3)}$) y puede ser escrito $a^{(2)}_{\alpha_1\beta_1\beta_2} = (\gamma^{m_1m_2m_3})_{\beta_1\beta_2}k_{\alpha_1m_1m_2m_3}$, denominado espinor 3-forma y puede ser expandido como 3.37, es decir

$$k_{\alpha_1m_1m_2m_3} = \tilde{k}_{\alpha_1m_1m_2m_3} + \left(\gamma_{[m_1}\tilde{s}_{m_2m_3]}\right)_{\alpha_1} + \left(\gamma_{[m_1m_2}\tilde{s}_{m_3]}\right)_{\alpha_1} + (\gamma_{m_1m_2m_3}s)_{\alpha_1} \tag{3.91}$$

donde $\tilde{k}$ es un espinor 3-forma, $\tilde{s}$ es un coespinor 2-forma y un vector espinor y s es un coespinor, todos tienen en común que no poseen traza con respecto a las matrices gamma A.1.

Para la invariancia de gauge $\omega^{(3)}_{\alpha_1\beta_1\beta_2}$ tenemos antisimetría en todos lo índices. Así la expansión esta dada por

$$\omega^{(3)}_{\alpha_1\beta_1\beta_2} = (\gamma^{m_1m_2m_3})_{\beta_1\beta_2}\Big[\tilde{m}_{am_1m_2m_3} + \left(\gamma_{[m_1}\tilde{r}_{m_2m_3]}\right)_{\alpha_1} + \left(\gamma_{[m_1m_2}\tilde{r}_{m_3]}\right)_{\alpha_1} + \\ + (\gamma_{m_1m_2m_3}r)_{\alpha_1}\Big]$$

nuestro trabajo ahora es obtener la proyección de los términos asociados en la base de las matrices gamma, para esto utilizamos GAMMA, apéndice B

$$(\gamma^{m_1m_2m_3})_{\beta_1\beta_2}\tilde{m}_{\alpha_1m_1m_2m_3}(\gamma_{[m_1}\tilde{r}_{m_2m_3]})_{\alpha_1} = -(\gamma^{n_1n_2n_3})_{\beta_1\alpha_1}(\gamma_{[n_1}r_{n_2n_3]})_{\beta_2}$$

este término posee la antisimetría deseada, así el espinor 2-forma en la expansión de los campos, es el único término no necesariamente igual a cero $\omega^{(3)}_{\alpha_1\beta_1\beta_2} = (\gamma^{m_1m_2m_3})_{\beta_1\beta_2}(\gamma_{[m_1}r_{m_2m_3]})_{\alpha_1}$. Lo anterior nos indica que el término de la invariancia de gauge correspondiente al campo $a^{(2)}_{\alpha_1\beta_1\beta_2}$ es $\tilde{s}_{\alpha_1m_1m_2} = 0$

El siguiente paso, es fijarnos en la expansión de la ecuación de movimiento $a^{(2)}_{\alpha_1\delta\beta_1}$ y luego aplicando la restricción de la 5-forma de las matrices gamma, apéndice B

$$\begin{aligned}(\gamma^{m_1m_2m_3}\gamma^{n_1\cdots n_5}\tilde{k}_{m_1m_2m_3})_{\beta_2} &= -480(\gamma^{[n_1n_2}\tilde{k}^{n_3n_4n_5)})_{\beta_2} \\ (\gamma^{m_1m_2m_3}\gamma^{n_1\cdots n_5}\gamma_{m_1m_2}\tilde{s}_{m_3})_{\beta_2} &= 80(\gamma_{[n_1\cdots n_4}\tilde{s}_{n_5]})_{\beta_2} \\ ((\gamma^{m_1m_2m_3}\gamma^{n_1\cdots n_5}\gamma_{m_1m_2m_3}s)_{\beta_2} &= 0\end{aligned} \tag{3.92}$$

donde $\tilde{k}_{\alpha_1m_1m_2m_3}$ y $\tilde{s}_{\alpha_1m_1}$ son iguales a cero, debido a que el espacio vectorial en la cohomología no es cerrado y los términos de la expansión no pertenecen a la expansión de los representaciones irreducibles. Por lo tanto, el término del segundo nivel de θ del supercampo A_{α_1} es

$$a^{(2)}_{\alpha_1\beta_1\beta_2} = -\frac{i}{36}\left(\gamma^{m_1m_2m_3}\right)_{\beta_1\beta_2}\left(\gamma_{m_1m_2m_3}\chi\right)_{\alpha_1} \tag{3.93}$$

Los pasos anteriores, nos permiten realizar una generalización de la expansión de los supercampos a la potencia deseada ($\lambda^3\theta^5$), es así que en esta parte del trabajo podemos trabajar de manera simplificada y obtener

3.3.2 Segunda potencia de λ

$$\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}A^{(0)}_{\alpha_1\alpha_2\beta_1}(x) \sim (10001)^{\otimes_A 2}$$

$$\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\theta^{\beta_1}A^{(1)}_{\alpha_1\alpha_2\beta_1}(x) \sim (00001)\otimes(10002)\otimes(00010) \sim (\lambda\gamma^{m_1}\theta)_\alpha(\lambda\gamma_{m_1}\lambda)$$

$$\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}A^{(2)}_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}(x) \sim (00001)\otimes(10002)\otimes(00010)^{\otimes_A 2} \sim$$

$$\sim (\theta\gamma^{m_1}\theta)_\alpha(\lambda\gamma^{m_2}\theta)_\beta(\lambda\gamma_{m_1m_2}\lambda)$$

$$\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\theta^{\beta_3}A^{(3)}_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_1\beta_3}(x) \sim (00001)\otimes(10002)\otimes(00010)^{\otimes_A 3} \sim$$

$$\sim (\theta\gamma^{m_1})_\alpha(\theta\gamma^{[m_2}\lambda)_\beta(\theta\gamma^{m_3}\lambda)_\delta(\lambda\gamma_{m_2m_3}{}^{m_1]}\lambda)$$

3.3.3 Tercera potencia de λ

$$\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3}A^{(0)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(x) \sim (00001)\otimes(10003)^{\otimes_A 3}$$

$$\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3}\theta^{\beta_1}A^{(1)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1}(x) \sim (00001)\otimes(10003)\otimes(00010) \sim$$

$$\sim (\lambda\gamma^{m_1}\theta)_\alpha(\lambda\gamma^{m_2})_\beta(\lambda\gamma_{m_1m_2}\lambda)$$

$$\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}A^{(2)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2}(x) \sim (00001)\otimes(10003)\otimes(00010)^{\otimes_A 2} \sim$$

$$\sim (\theta\gamma^{m_1}\theta)_\alpha(\lambda\gamma^{[m_2})_\beta(\lambda\gamma^{m_3})_\delta(\lambda\gamma_{m_2m_3}{}^{m_1]}\lambda)$$

$$\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\theta^{\beta_3}A^{(3)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3}(x) \sim (00001)\otimes(10003)\otimes(00010)^{\otimes_A 3} \sim$$

$$\sim (\theta\gamma^{m_1}\theta)_\alpha(\lambda\gamma^{m_2}\theta)_\beta(\lambda\gamma^{[m_3})_\delta(\lambda\gamma_{m_3}{}^{m_1m_2]}\lambda)$$

$$\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3}\theta^{\beta_1}\cdots\theta^{\beta_4}A^{(4)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\cdots\beta_4}(x) \sim (00001)\otimes(10003)\otimes(00010)^{\otimes_A 4} \sim$$
$$\sim (\theta\gamma^{m_1}\theta)_\alpha(\lambda\gamma^{m_2}\theta)_\beta(\lambda\gamma^{[m_3}\theta)_\delta(\lambda\gamma_{m_2m_3}{}^{m_1]}\lambda)$$
$$\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3}\theta^{\beta_1}\cdots\theta^{\beta_5}A^{(5)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\cdots\beta_5}(x) \sim (00001)\otimes(10003)\otimes(00010)^{\otimes_A 5} \sim$$
$$\sim (\theta\gamma^{m_1}\theta)_\alpha(\theta\gamma^{m_2}\theta)_\beta(\lambda\gamma^{m_3}\theta)_\delta(\lambda\gamma_{m_1m_3}^{\;\;m_2}\lambda)$$

Por último escribimos la expansión de los supercampos bajo la cohomología del operador Q, en el formalismo espinorial puro se escribe:

$$\begin{aligned}
Q\Psi(\lambda,\theta) &= (\lambda\theta)^m a_m + (\lambda\theta^2)_\alpha\chi^\alpha + \lambda\theta^3 + \cdots + \\
&+ \lambda^2\theta + \lambda^2\theta^2 + (\lambda^2\theta^3)^\alpha\bar{\chi}_\alpha + (\lambda^2\theta^4)^m a^*_m \cdots + \\
&+ \lambda^3\theta + \lambda^3\theta^2 + \lambda^3\theta^4 + (\lambda^3\theta^5)c^* \\
&= i(\theta\gamma^m)_{\alpha_1\beta_1}a_m(x) + \frac{i}{36}(\theta\gamma^{m_1m_2m_3}\theta)_{\beta_1\beta_2}(\gamma_{m_1m_2m_3}\chi)_{\alpha_1} + \\
&+ (\lambda\gamma^{m_1\cdots m_5}\lambda)_{\alpha_1[\beta_1}(\theta\gamma_{m_1m_2m_3}\theta)_{\beta_2\beta_3]} + \cdots + \\
&+ (\lambda\gamma^{m_1m_2m_3}\theta)_\alpha(\lambda\gamma_{m_1\cdots m_5}\lambda) + (\theta\gamma^{m_1})_\alpha(\lambda\gamma^{m_2}\theta)_\beta(\lambda\gamma^{m_1\cdots m_5}\lambda) + \\
&+ (\theta\gamma^{m_1\cdots m_5}\theta)_\alpha(\theta\gamma_{m_1m_2m_3}\theta)_{\beta_1}(\theta\gamma_{m_4m_5}\bar{\chi})_\delta(x) + \\
&+ (\lambda\gamma_{m_1\cdots m_5}\lambda)(\theta\gamma^{m_1m_2m_3}\theta)(\theta\gamma^{m_4m_5}\theta)^m a^*_m(x) + \cdots + \\
&+ (\lambda\gamma^{m_1\cdots m_5}\lambda)(\lambda\gamma_{m_1m_2}\theta)_\alpha(\lambda\gamma_{m_3})_{\beta_1} + (\theta\gamma^{m_1}\theta)(\lambda\gamma^{[m_2})_{\alpha_1\beta_1}(\lambda\gamma^{m_3})_\delta(\lambda\gamma_{m_2\cdots m_4}{}^{m_1]}\lambda) + \\
&+ (\theta\gamma^{m_1}\theta)_\alpha(\lambda\gamma^{m_2}\theta)_\beta(\lambda\gamma^{[m_3})_\delta(\lambda\gamma_{m_3}{}^{m_1m_2]}\lambda) + \\
&+ (\theta\gamma^{m_1}\theta)_\alpha(\lambda\gamma^{m_2}\theta)_\beta(\lambda\gamma^{[m_3}\theta)_\delta(\lambda\gamma_{m_2m_3}{}^{m_1]}\lambda) + \\
&+ (\lambda\gamma^{m_1}\theta)_\alpha(\lambda\gamma^{m_2}\theta)_\beta(\lambda\gamma^{m_3}\theta)_\delta(\theta\gamma_{m_1m_2m_3}\theta)c^*(x)
\end{aligned} \tag{3.94}$$

La ecuación anterior muestra la expansión de los supercampos hasta el nivel $\lambda^3\theta^5$. note que asignamos campos a las correspondientes expansiones, esto es debido a que no todos los términos de la expansión proporcionan información respecto a la cohomología.

Capítulo 4

Teoría de Supergravedad en $D = 11$, utilizando espinores puros

El principal objetivo en este capitulo, es analizar las herramientas que desarrolla M. Cederwall en teoría de grupos [7] , para simplificar las expresiones de los supercampos, mediante identificación de *singlets*. Este método permite trabajar solo con los términos que proporcionan información de la cohomología. Es por lo anterior que nuestro análisis se reduce a plantear los códigos en LieART de Mathematica, apéndice C, para obtener las expresiones simplificadas.

4.1 Formulación en componentes de SG en D=11

En esta sección proponemos desarrollar la acción propuesta por E. Cremmer, B. Julian y J. Scherk [7] para supergravedad $N = 1$ $D = 11$. La acción propuesta en invariante bajo transformaciones supersimétricas (on-shell) y es obtenida con la ayuda del paquete GAMMA y xAct de Mathematica, como se muestra en el apéndice C

4.1.1 SG en D=11 de la forma Cremmer-Julia-Scherk

Cremmer, Julia y Scherk derivaron el lagrangiano de la teoría supergravitatoria en $D = 11$, conocida hoy en día como el limite de baja energía de la teoría M. Esta teoría de once dimensiones incluye un conjunto de campos no masivos que possen una representación en el álgebra supersimétrica, es decir, a cada grado de libertad bosónico le corresponde una grado de libertad fermionico y viceversa, para campos bosónicos y fermiónicos. Estos grados de libertad pueden ser ajustados mediante una teoría de gauge apropiada, la cual corresponde a representaciones en el grupo $SO(9)$ [19]. Para empezar a validar la teoría de gravedad propuesta, la métrica g_{mn} debería ser parte del conjunto de campos, de la misma forma para el gravitino ψ_m^μ, el cual es el supercompañero de la métrica. En orden de asignar los grados de libertad correspondientes a la métrica y al gravitino, obtenemos las formas de las representaciones irreducibles del producto tensorial de $SO(9)$, en su representación de Dynkin, obtenidas mediante el uso del software LiE [14]

$$(1000)^{2\otimes_S} = (0000) \oplus (2000) \tag{4.1}$$

donde (0000) corresponde a la traza y (2000) al tensor simétrico sin traza. Es común que se asocie a (2000) con la métrica y a la vez (0000) con el dilaton. El producto tensorial de la representación vectorial y espinorial del grupo $SO(9)$, se puede descomponer en componentes irreducibles y obtenerse el gravitino

$$(1000) \otimes (0001) = (1000) \oplus (1001) \tag{4.2}$$

(1001) es el gravitino. La supersimétria requiere de asignar los grados de libertad bosónicos y fermiónicos en la configuración on-shell. El problema que subyace es que entre la métrica (2000) y el gravitino (1001) se requiere de introducir otro campo bosónico que reajuste la teoría gauge. Lo anterior se puede alcanzar mediante una representación vectorial que contenga a la representación (0010) y su parte antisimétrica

$$(1000)^{3\otimes_A} = (0010) \tag{4.3}$$

Utilizando la 3-forma de la relación bosón-fermión, se tiene

$$(2000) \oplus (0010) = (1001)$$

desde el punto de vista de los grados de libertad, existe una posible transformación, para encontrar la teoria supersimétrica que contenga la métrica, el gravitino y una 3-forma del campo tensorial antisimétrico de C_{mnp}, sujeto a posibles ligaduras (como se pudo observar en el cápitulo anterior) en orden a obtener los grados de libertad deseados.

Para empezar a realizar la construcción de la teoría, como en la mayoría de los artículos de revisión [16], utilizamos las siguientes definiciones

- $\kappa = 1; \qquad F_{mnpu} = \frac{1}{2} G_{mnpu}$
- $\Gamma^a \to i\Gamma^a$

de esta manera, el lagrangiano queda

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\frac{1}{4} e^a_m R + \frac{1}{2} e^a_m \bar{\psi}_m \Gamma^{mnp} D_n \left(\frac{\omega + \hat{\omega}}{2}\right) \psi_p - \frac{1}{4 \cdot 48} e^a_m G_{mnpq} G^{mnpq} - \\ &- \frac{1}{4 \cdot 48} e^a_m \left(\bar{\psi}_m \Gamma^{mnqrst} \psi_n + 12 \bar{\psi}^q \Gamma^{st} \psi^r\right) \left(\frac{G_{qrst} + \bar{G}_{qrst}}{2}\right) + \\ &+ \frac{1}{4 \cdot 144^2} \epsilon^{q_1 \ldots q_4 r_1 \ldots r_4 mnp} G_{q_1 \ldots q_4} G_{r_1 \ldots r_4} C_{mnp}\end{aligned} \tag{4.4}$$

La acción tiene que ser invariante bajo las reglas de transformación SUSY

$$\begin{aligned}\delta_Q e_m{}^a = \bar{\epsilon} \Gamma^a \psi_m; \qquad \delta_Q C_{mnp} = 3 \bar{\epsilon} \Gamma_{[mn} \psi_{p]} \\ \delta_Q \psi_m = D_m (\hat{\omega}) \epsilon - \frac{1}{2 \cdot 144} \left(\Gamma^{qrst}{}_m - 8 \Gamma^{rst} \delta^q_m\right) \epsilon \hat{G}_{qrst} = \hat{D}_m \epsilon\end{aligned} \tag{4.5}$$

El signo de la métrica utilizada es $\eta_{ab} = (-1, 1, \ldots, 1)$ y la matrices gamma son reales en la representación del álgebra de Clifford (capitulo 2). Además de los campos elementales de la teoría, presentes en el lagrangiano anterior, podemos asociar el significado de algunos de lo términos del lagrangiano

$$
\begin{aligned}
D_\nu(\omega) &= \partial_\nu \psi_\mu + \frac{1}{4}\omega_{\nu ab}\Gamma^{ab}\psi_\mu \\
G_{mnpu} &= 4\partial_{[m}C_{npu]}; \qquad \hat{G}_{mnpu} = F_{mnpu} + 6\bar{\psi}_{[m}\Gamma_{np}\psi_{u]} \\
K_{mab} &= \frac{1}{4}\left[\bar{\psi}_q \Gamma_{mab}^{\;\;qr}\psi_r - 2(\bar{\psi}_m\Gamma_b\psi_a - \bar{\psi}_m\Gamma_a\psi_b + \bar{\psi}_b\Gamma_m\psi_a)\right] \\
\omega_{mab} &= \omega_{mab}^{(0)} + K_{mab} \\
\hat{\omega}_{mab} &= \omega_{mab} - \frac{1}{4}\bar{\psi}_q\Gamma_{mab}^{\;\;qr}\psi_r
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Con base a lo anterior procedemos a construir una versión supersimétrica para la acción SG en $D = 11$, mediante la programación en Mathematica, como se muestra en el apéndice C y obtenemos

Ecuación de movimiento

Para ψ_m

Realizando los cálculos correspondiente, obtenemos

$$
\mathcal{L} = \frac{1}{2}\bar{\psi}_m D_n\left(\frac{\omega + \hat{\omega}}{2}\right)\psi_p - \frac{1}{4\cdot 48}\left(\bar{\psi}_m\Gamma^{mnqrst}\psi_n + 12\bar{\psi}^q\Gamma^{st}\psi^r\right)\left(\hat{G}_{qrst} - 3\bar{\psi}_{[q}\Gamma_{qs}\psi_{t]}\right)
$$

aplicando ecuaciones Euler-Lagrange

$$
0 = \frac{\mathcal{L}}{\partial\overline{\psi}_\zeta^n} - \frac{\partial}{\partial x^\omega}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\omega\overline{\psi}_\zeta^n\right)}\right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overline{\psi}_\zeta^n}
$$

finalmente se obtiene al realizar las correspondientes identidades de Fierz

$$
\Gamma^{mnp}\bar{\nabla}_n\psi_p = 0 \tag{4.7}
$$

Para g_{mn}

La acción se compone de una acción de Einstein-Hilbert acoplada a un campo 4-forma de magnitud G.

$$S = \int d^D x \underbrace{\sqrt{g}R}_{(I)} - \frac{1}{48}\int d^D x \underbrace{\sqrt{g}G_{mnpu}G^{mnpu}}_{(II)} \tag{4.8}$$

en el estudio de la primera parte, el escalar de Ricci tiene la forma $R = g^{mn}R_{mn}$ y realizamos la variación en el primer nivel, con respecto a la métrica g^{mn}.

$$\delta S_{(I)} = \int d^D x \left[\delta\sqrt{g}g^{mn}R_{mn} + \sqrt{g}\delta g^{mn}R_{mn} + \sqrt{g}g^{mn}\delta R_{mn}\right] \tag{4.9}$$

y obtenemos, como se muestra en el apéndice C

$$\delta S_{(I)} = \int d^D x\sqrt{g}\left[R_{mn} - \frac{1}{2}g_{mn}R\right]\delta g^{mn} \tag{4.10}$$

Para la segunda parte tenemos la acción escrita en términos de la variación

$$\begin{aligned}\delta S_{(II)} &= -\frac{1}{48}\int d^D x\Big[\delta\sqrt{g}G_{mnpu}G^{mnpu} + \sqrt{g}\delta(G_{mnpu}G^{mnpu})\Big] \\ &= -\frac{1}{48}\int d^D x\Big[-\frac{1}{2}\sqrt{g}g_{\alpha\beta}G_{mnpu}G^{mnpu} + 4\sqrt{g}G_{\alpha npu}G_{\beta}{}^{npu}\Big]\delta g^{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{4.11}$$

al resolver obtenemos, como se muestra en el apéndice C

$$R_{vw} = \frac{1}{12}\left(G_{vnpu}G_{w}{}^{npu} - \frac{1}{12}g_{vw}G_{mnpu}G^{mnpu}\right) \tag{4.12}$$

Para C_{mnp}

Por último, calculamos la ecuación de movimiento para el campo C_{mnp}

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{48}G_{mnpu}G^{mnpu} + \frac{1}{144^2}\epsilon^{q_1\cdots q_4 r_1\cdots r_4 s_1 s_2 s_3}G_{q_1\cdots q_4}G_{r_1\cdots r_4}C_{s_1 s_2 s_3}$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\xi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\xi \phi)} \right)$$

sea $\phi = C_{ijk}$, utilizando las identidades

$$\frac{\partial G_{mnpu}}{\partial(\partial_\xi C_{ijk})} = \delta^{\xi ijk}_{mnpu}; \qquad \delta^{q_1 \cdots q_4}_{r_1 \cdots r_4} G^{r_1 \cdots r_4} = 4! \cdot G^{q_1 \cdots q_4} \tag{4.13}$$

se obtiene al final

$$\partial_\xi G^{\xi ijk} + \frac{1}{2(4!)^2} \epsilon^{q_1 \cdots q_4 r_1 \cdots r_4 ijk} G_{q_1 \cdots q_4} G_{r_1 \cdots r_4} \tag{4.14}$$

Así la acción para SG en $D = 11$, toma la forma

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^{11}x \{ det(e^a_m) \Big[R(\omega) - 2i\bar{\psi}_m \Gamma^{mnp} \nabla_n \left(\frac{\omega + \hat{\omega}}{2} \right) \psi_p - \frac{1}{48} G_{mnpq} G^{mnpq} + \\ + \frac{i}{96} \left(\bar{\psi}_m \Gamma^{mnqrst} \psi_n + 12 \bar{\psi}^p \Gamma^{st} \psi^r \right) \left(G_{qrst} + \hat{G}_{qrst} \right) \Big] + \\ + \frac{1}{6 \cdot 3!(4!)^2} \epsilon^{q_1 \cdots q_4 r_1 \cdots r_4 mnp} G_{q_1 \cdots q_4} G_{r_1 \cdots r_4} C_{mnp} \} \end{aligned} \tag{4.15}$$

4.2 Formulación del superespacio de SG en D=11

El primer paso para lograr una formulación del superespacio para SG en $D = 11$, es definir la 1-forma

$$E^A = dZ^M E^A_M; \qquad A = (a, \alpha) \tag{4.16}$$

$$\Omega_A{}^B = dZ^M \Omega_{MA}{}^B \tag{4.17}$$

donde $E_M{}^A$ es la vielbeien y $\Omega_{MA}{}^B$ es la conexión tipo espín. Ahora queremos realizar algunas suposiciones del álgebra de Lorentz

$$\Omega_{ab} = -\Omega_{ba}, \quad \Omega_{\alpha b} = 0 \tag{4.18}$$

$$\Omega_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{1}{4}\left(\Gamma^{ab}\right)_{\alpha}{}^{\beta}\Omega_{ab}, \quad \Omega_{a\beta} = 0 \tag{4.19}$$

definiendo la torsión:

$$T^A = DE^A = dE^A + E^B\Omega_B{}^A \tag{4.20}$$

la cual se puede convertir en una 2-forma,

$$T^A = \frac{1}{2}E^C E^B T_{BC}{}^A \tag{4.21}$$

también podemos la curvatura, la cual es una 2-forma y se puede escribir de la forma

$$R_A{}^B = d\Omega_A{}^B + \Omega_A{}^C\Omega_C{}^B; \qquad R_A{}^B = \frac{1}{2}E^D E^C R_{CDA}^{B} \tag{4.22}$$

Ahora podemos encontrar las identidades de Bianchi, para la torsión T^A

$$\begin{aligned} DT^A &= d\left(dE^A + E^B\Omega_B{}^A\right) + \left(dE^B + E^C\Omega_C{}^B\right)\Omega_B{}^A \\ &= E^B\left(d\Omega_B{}^A + \Omega_B{}^C\Omega_C{}^A\right) \end{aligned}$$

donde $\Omega_B{}^A$ es una 1-forma y la derivada exterior actúa sobre la torsión como

$$DT^A = E^B R_B{}^A = \frac{1}{2}E^C E^B E^F D_F T_{BC}{}^A + \frac{1}{2}E^C E^F E^G T_{GF}{}^B T_{BC}{}^A = 0 \tag{4.23}$$

ahora es posible introducir una nueva 3-forma para el supercampo X, el cual contiene la 3-forma bosónica X_{mnp} y se define de la siguiente manera, además de la invariancia de gauge

$$X = \frac{1}{3!} E^C E^B E^A X_{ABC}; \qquad \delta X = dY = d\left(\frac{1}{2} E^B E^A Y_{AB}\right) \tag{4.24}$$

donde Y es una 2-forma. Lo anterior nos conduce a la correspondiente magnitud del campo, denotada por H, lo cual corresponde a una 4-forma

$$H = dX = d\left(\frac{1}{4!} E^D E^C E^B E^A H_{ABCD}\right) = 0 \tag{4.25}$$

Un tratamiento completo de la teoría SG en $D = 11$, requiere de encontrar el funcionamiento de las ligaduras convencionales y dinámicas, de forma análoga como se realizo en la teoría SYM en $D = 10$. Este análisis no se incluye debido a que es exactamente igual al trabajado en el capítulo 3. Sin embargo nos interesa la descripción dimensional de la torsión ($T_{AB}{}^{C}$) y el tensor H_{ABCD}, este último nos proporciona información de las magnitudes del potencial 3-forma X_{mnr}, el gravitino y el graviton. Cuyas dimensiones físicas son -1, $-\frac{3}{2}$ y -2, respectivamente.

$$T_{\alpha\beta}{}^{c} = -i(\Gamma^{c}_{\alpha\beta}) \quad , \quad dim : 0 \tag{4.26}$$

$$T_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 0 \quad , \quad dim : -\frac{1}{2} \tag{4.27}$$

$$T_{\alpha b}{}^{c} = 0 \quad , \quad dim : -\frac{1}{2} \tag{4.28}$$

$$H_{\alpha abc} = 0 \quad , \quad dim : -\frac{1}{2} \tag{4.29}$$

$$H_{\alpha\beta\gamma c} = 0 \quad , \quad dim : 1 \tag{4.30}$$

$$H_{\alpha\beta cd} = i(\Gamma_{cd})_{\alpha\beta} \quad , \quad dim : 0 \tag{4.31}$$

4.3 Formulación en supercampos de espinores puros

La forma más general para la torsión es

$$T^{c}_{\alpha\beta} = 2\Gamma^{c}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} U^{c}_{e_1 e_2} \Gamma^{e_1 e_2}_{\alpha\beta} + \frac{1}{5!} V^{c}{}_{e_1 \cdots e_5} \Gamma^{e_1 \cdots e_5}_{\alpha\beta} \tag{4.32}$$

$$E_\alpha{}^a : \quad \ydiagram{1}_\alpha \qquad\qquad C_{\alpha\beta\gamma} : \quad \ydiagram{1,1}_\alpha \oplus \ydiagram{1,1,1,1,1}_\alpha \tag{4.33}$$

$$T_{\alpha\beta}{}^a : \quad \ydiagram{2,1} \oplus \ydiagram{2,1,1,1,1} \qquad\qquad H_{\alpha\beta\gamma\delta} : \quad \ydiagram{2,2} \oplus \ydiagram{2,2,1,1,1} \oplus \ydiagram{2,2,2,2,2} \tag{4.34}$$

4.4 Cálculo de la cohomología del operador Q

El álgebra de las derivadas covariantes fermiónicas en el espacio plano es

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = -T^c_{\alpha\beta} D_c = -2\Gamma^c_{\alpha\beta} D_c$$

con el nuevo operador BRST Q, la cual es nilpotente [] y toma la forma

$$Q = q + s = (\lambda D) + \left(r \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \right) \tag{4.35}$$

donde $(\bar{\lambda}\Gamma^a\bar{\lambda}) = 0$ y $(\bar{\lambda}\Gamma^a r) = 0$. La cohomolgía de Q es identica al caso de SYM en $D = 10$, la cual consiste de términos que transforman bajo el álgebra SUSY y de dos formas escalares ξ y η, relacionadas mediante

$$\xi = (\lambda\bar{\lambda}), \qquad \eta = (\lambda\Gamma^{ab}\lambda)(\bar{\lambda}\Gamma_{ab}\bar{\lambda}) \tag{4.36}$$

Para el estudio de esta podemos empezar definiendo la expansión de un supercampo de espinores puros, después observamos que M. Cederwall propone establecer un supercampo vectorial de espinores puros contenido en el vielbein mediante

$$\Psi(x,\theta,\lambda) = A(x,\theta) + \lambda^{\alpha_1} A_{\alpha_1}(x,\theta) + \frac{1}{2}\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2} A_{\alpha_1\alpha_2}(x,\theta) + \frac{1}{3}\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3} A_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(x,\theta) + \cdots$$
$$\Phi^a(x,\theta,\lambda) = \phi^a(x,\theta) + \lambda^{\alpha_1}\phi^a_{\alpha_1}(x,\theta) + \frac{1}{2}\lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\phi^a_{\alpha_1\alpha_2}(x,\theta) + \cdots \tag{4.37}$$

donde al aplicar la cohomologia $Q\Phi^a = 0$. La cohomología de $\Psi(x,\theta,\lambda)$ en λ^2 contiene información de las transformaciones de gauge, el difeomorfismo y transformaciones locales SUSY, sin embargo la cohomología Φ^a contiene el difeomorfismo y transformaciones locales SUSY, en esta parte del trabajo nos limitamos a realizar la expansión de esta potencia en particular. La relación de los campos se presenta mediante lo cual satisface $[Q, R^a] = 0$

La acción esta dada por

$$S = \int [dZ]\Big[\frac{1}{2}\Psi Q\Psi + \frac{1}{6}\left(\lambda\Gamma_{ab}\lambda\right)\left(1 - \frac{3}{2}T\Psi\right)\Psi R^a \Psi R^b \Psi\Big] \tag{4.38}$$

en esta parte del trabajo nos enfocamos, igual que en el capitulo 3, en obtener la expansión de los campos en términos de las matrices gamma en $D = 11$. Para realizar esto, procedemos a expandir los supercampos en representaciones irreducibles, mediante el código en Mathematica que se muestra en el apéndice C y obtenemos

$$\begin{aligned} Q\Psi = Q\Big(&\lambda\theta + \lambda^2\theta + \lambda\theta^3 + \cdots + \\ &+ \lambda^2\theta + \lambda^2\theta^2 + \lambda^2\theta^3 + \cdots + \\ &+ \lambda^3\theta + \lambda^3\theta^2 + \lambda^3\theta^3 + \lambda^3\theta^4 + \lambda^3\theta^5\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q\Psi = (\lambda^{\delta} D_{\delta} + r^{\delta}\bar{\partial}_{\delta})\Big(&\lambda^{\alpha_1}\theta^{\beta_1}A^{(1)}_{\alpha_1\beta_1} + \lambda^{\alpha_1}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}A^{(2)}_{\alpha_1\beta_1\beta_2} + \lambda^{\alpha_1}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\theta^{\beta_3}A^{(3)}_{\alpha_1\beta_1\beta_2\beta_3} + \cdots + \\
&+ \lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\theta^{\beta_1}A^{(1)}_{\alpha_1\alpha_2} + \lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}A^{(2)}_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2} + \lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\theta^{\beta_3}A^{(3)}_{\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2\beta_3} + \cdots + \\
&+ \lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3}\theta^{\beta_1}A^{(1)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1} + \lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}A^{(2)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2} + \\
&+ \lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\theta^{\beta_3}A^{(3)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\beta_2\beta_3} + \lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3}\theta^{\beta_1}\cdots\theta^{\beta_4}A^{(4)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\cdots\beta_4} + \\
&+ \lambda^{\alpha_1}\lambda^{\alpha_2}\lambda^{\alpha_3}\theta^{\beta_1}\cdots\theta^{\beta_5}A^{(5)}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\beta_1\cdots\beta_5}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\lambda^{\delta} D_{\delta} + r^{\delta}\bar{\partial}_{\delta})\lambda^{\alpha_1}\theta^{\beta_1}A^{(1)}_{\alpha_1\beta_1}(x) = \lambda^{\delta}\lambda^{\alpha_1}\theta^{\beta_1}D_{\delta} + \theta^{\beta_1}r^{\delta}\bar{\lambda}^{\alpha_1} = (\lambda\Gamma^{a}\theta)(\lambda\Gamma^{b}\theta)D_{\delta} + \cancel{(\bar{\lambda}\Gamma^{a}r)(\Gamma\theta)} \\
&(\lambda^{\delta} D_{\delta} + r^{\delta}\bar{\partial}_{\delta})\lambda^{\alpha_1}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}A^{(2)}_{\alpha_1\beta_1\beta_2}(x) = \lambda^{\delta}\lambda^{\alpha_1}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}D_{\delta} + \theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}r^{\delta}\bar{\lambda}^{\alpha_1} = (\lambda\Gamma^{ij}\theta)(\lambda\Gamma^{j}_{i}\theta)D_{\delta} + \\
&+ (\bar{\lambda}\Gamma^{ij}r)(\theta\Gamma^{k}_{ij}\theta) \\
&(\lambda^{\delta} D_{\delta} + r^{\delta}\bar{\partial}_{\delta})\lambda^{\alpha_1}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\theta^{\beta_3}A^{(3)}_{\alpha_1\beta_1\beta_2\beta_3}(x) = \lambda^{\delta}\lambda^{\alpha_1}\theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\theta^{\beta_3}D_{\delta} + \theta^{\beta_1}\theta^{\beta_2}\theta^{\beta_3}r^{\delta}\bar{\lambda}^{\alpha_1} = \\
&= (\theta)(\lambda\Gamma^{ijk}\lambda)(\theta\Gamma^{ij}_{k}\theta)D_{\delta} + (\theta\theta)(\bar{\lambda}\Gamma^{ij}_{kl}r)(\bar{\lambda}\Gamma^{l}_{ij}) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Por último obtenemos

$$
\begin{aligned}
&(\lambda\Gamma^{a}\theta)(\lambda\Gamma^{b}\theta)D_{\delta} + \cancel{(\bar{\lambda}\Gamma^{a}r)(\Gamma\theta)} + (\theta)(\lambda\Gamma^{ijk}\lambda)(\theta\Gamma^{ij}_{k}\theta)D_{\delta} + (\lambda\Gamma^{ij}\theta)(\lambda\Gamma^{j}_{i}\theta)D_{\delta} + \\
&+ (\bar{\lambda}\Gamma^{ij}r)(\theta\Gamma^{k}_{ij}\theta) + (\theta\theta)(\bar{\lambda}\Gamma^{ij}_{kl}r)(\bar{\lambda}\Gamma^{l}_{ij}) + \cdots + (\lambda\Gamma^{a}\lambda)(\lambda\Gamma^{a}\theta)D_{\delta} + \cancel{(\bar{\lambda}\Gamma^{a}r)}(\bar{\lambda}\Gamma^{a}\theta) + \\
&(\lambda\Gamma^{ij}\lambda)(\theta\Gamma^{k}_{ij}\theta)D_{\delta} + (\theta)(\bar{\lambda}\Gamma^{ik}_{j}r)(\bar{\lambda}\Gamma^{ij}_{kl}\theta) + (\lambda\Gamma^{ijkl}\theta)(\lambda\Gamma^{ij}_{k}\theta)(\lambda\Gamma^{ijk}{}_{l}\theta)D_{\delta} + \\
&(\theta\theta)(\bar{\lambda}\Gamma^{ijk}{}_{l}r)(\bar{\lambda}\Gamma^{ijl}{}_{km}\theta) + \cdots + (\lambda\Gamma^{ij}\theta)(\lambda\Gamma^{[kl}_{i}\lambda)(\lambda\Gamma^{mn]})D_{\delta} + (\bar{\lambda}\Gamma^{ij}r)(\bar{\lambda}\Gamma^{[l}\theta)(\bar{\lambda}\Gamma^{km]}) + \\
&+ (\lambda\Gamma^{[ij}\lambda)(\lambda\Gamma^{kl}\lambda)(\lambda\Gamma^{n]}_{m}\Gamma^{m}\theta)(\lambda\Gamma^{i}{}_{jl}\theta)D_{\delta} + (\bar{\lambda}\Gamma^{i}r)(\bar{\lambda}\Gamma^{[j}\theta)(\bar{\lambda}\Gamma_{j}{}^{kl]}\theta) + \\
&+ (\lambda\Gamma^{[ijkl}_{m}\lambda)(\lambda\Gamma^{mn}\theta)(\theta\Gamma_{l}\Gamma^{p]}\theta)D_{\delta} + (\theta)(\bar{\lambda}\Gamma_{jk}{}^{i}r)(\bar{\lambda}\Gamma^{lmn}\Gamma_{n}\theta)(\bar{\lambda}\Gamma_{im}\theta) +
\end{aligned}
$$

$$+(\lambda\Gamma^{ijk}{}_{lm}\theta)(\lambda\Gamma^{mn}\theta)(\lambda\Gamma^{pq]}\theta)(\lambda\Gamma^{l}{}_{n}\theta)D_{\delta}+(\bar{\lambda}\Gamma^{ij}{}_{k}r)(\bar{\lambda}\Gamma^{[mn}{}_{l}\theta)(\bar{\lambda}\Gamma_{ij}{}^{k]}\theta)(\theta\Gamma^{m_1\cdots m_4}\theta)+$$
$$+(\lambda\Gamma^{i}\theta)(\lambda\Gamma^{j}\theta)(\lambda\Gamma^{k}\theta)(\lambda\Gamma^{p}\theta)(\theta\Gamma^{mn}\Gamma_{mn}{}^{l}\theta)\partial_{[p}H_{lijk]} \tag{4.39}$$

Como consecuencia de los anterior, hemos encontrado las expansión de los supercampos, en la potencia λ y θ deseada, en términos de la cohomología del operador BRST, en el formalismo espinorial puro. Lo anterior se apoya en los resultados de las referencias desarrolladas en este trabajo de investigación.

Capítulo 5

Conclusiones

- Realizamos la expansión de los supercampos, en los diferentes niveles asociados a la expansión de λ y θ, de la teoría SYM en $D = 10$ y SG en $D = 11$, obteniendo al final su respectiva cohomología en el formalismo espinorial puro, lo cual demostró la existencia de campos auxiliares en la expansión de los términos del supercampo.
- Fue posible implementar el formalismo espinorial puro y observar como este modifica el operador BRST, desde dos puntos de vista de los diferentes modelos supersimétricos: primero el planteamiento de N. Berkovits para SYM en $D = 10$ y el segundo M. Cederwall para SG en $D = 11$, obteniendo la expansión de los supercampos deseada y escribiéndolos en su forma cohomológica.
- Analizamos el álgebra de las representaciones de los grupos $SO(1, 9)$ para SYM en $D = 10$ y $SO(1, 10)$ para SG en $D = 11$, lo cual represento un factor clave para la manipulación de las expresiones de la expansión de los supercampos y la variación de gauge, lo anterior nos permitió también simplificar en gran medida las expresiones y plantear su correcta formulación.
- Durante el desarrollo de este proyecto de investigación, se pudo demostrar la importancia de las herramientas computacionales para la realización de cálculos, en nuestro caso se basó casi exclusivamente en el uso de Mathematica y los paquetes asociados (Gamma, xAct y LieART). Mathematica demuestra su versatilidad y

agilidad a la hora de implementar códigos de cálculos en especifico.

Apéndice A

Indentidades de los espinores puros en $D = 10$ y $D = 11$

A.1 Identidades en $D = 10$

$$
\begin{aligned}
p^2 A^m - (p^m p \cdot A) &= 0 \\
p^m p \cdot A &= 0
\end{aligned}
$$

donde $p^m = (p, 0, \ldots, 0, p)$, lo cual implica $p \cdot A = 0$. Lo anterior puede ser utilizado para eliminar una de las componentes de A^m en terminos de otra, por ejemplo $A^0 = p^\mu A^\mu / p^0$. De una forma similar obtenemos la invariancia de gauge

$$\delta A^m = p^m \Lambda \tag{A.1}$$

la cual puede ser utilizada para remover componentes de A^m, por ejemplo tomando $\Lambda = -\frac{A^n}{p^n}$, donde $p^n \neq 0$, luego obtenemos

$$A'^m = A^m + \delta A^m = \left(A^0, A^1, \ldots, A^{n-1,0,A^{n+1},\ldots,A^0}\right) \tag{A.2}$$

De esta forma se obtiene $D - 2$ grados de libertad. Notese que todo lo anterior corresponde a una configuración on-shell. Después para nuestro caso en particular, aplicando las ecuaciones A.1 y A.2, obtenemos 8 grados de libertad bosonicos y 8 grados de libertad fermionicos y un espinor de Weyl con 16 componentes reales e independientes.

Las reglas de conmutación, son las siguientes

$$[j^{mn}, j^{pq}] = i\left(\eta^{np} j^{mq} - \eta^{mp} j^{nq} - \eta^{nq} j^{mp} + \eta^{mq} j^{np}\right) \tag{A.3}$$

álgebra de Clifford en $D = 10$

$$\{\gamma^m, \gamma^n\} = 2\eta^{mn} \tag{A.4}$$

$$j^{mn} = \frac{i}{4}\left[\gamma^m, \gamma^n\right]$$

propiedades del las matrices gamma

$$\begin{aligned}(\gamma^m)^\dagger &= A\gamma^m A^{-1} \\ (\gamma^m)^* &= B\gamma^m B^{-1} \\ (\gamma^m)^T &= C\gamma^m C^{-1}\end{aligned} \tag{A.5}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \delta_\alpha{}^{\dot\beta} \\ -\delta^{\dot\beta}{}_\gamma & 0 \end{pmatrix} \equiv C\gamma^m = \begin{pmatrix} (\gamma^m)_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & (\gamma^m)^{\dot\beta\dot\alpha} \end{pmatrix} \tag{A.6}$$

A.2 Identidades en $D = 11$

Identidad básica del producto tensorial en la base de las matrices gamma

$$(AB)(CD) = \sum_{p=0}^{5} \frac{1}{32!}\left(B\Gamma^{a_1\cdots a_p} C\right)\left(A\Gamma_{a_p}\cdots a_1 D\right) \tag{A.7}$$

Cuadro A.1: Nivel de Dynkin para la representacion $SO(1,9)$.

Nivel Dynkin	Representación irreducible del grupo $SO(1,9)$
(10000)	$Vector$
(00010)	$Espinor$
(00001)	$Coespinor$
(01000)	$2-forma$
(00100)	$3-forma$
(00011)	$4-forma$
$(00020)\oplus(00002)$	$5-forma$
(10010)	$Vectorespinorsin\gamma-traza$
(01010)	$2-formaespinorsin\gamma-traza$

producto tensorial entre espinores puros y la base de las matrices gamma

$$(A\lambda)(\lambda B) = -\frac{1}{64}\left(\lambda\Gamma^{ab}\lambda\right)(\lambda\Gamma_{ab}B) + \frac{1}{3840}\left(\lambda\Gamma^{abcde}\lambda\right)(A\Gamma_{abcde}B) \tag{A.8}$$

propiedades los productos tensoriales

$$\left(\bar{\lambda}\Gamma^{[ij}\bar{\lambda}\right)\left(\bar{\lambda}\Gamma^{kl]}r\right) = 0 \tag{A.9}$$

$$M^{ai}(\lambda\Gamma_{bi}\lambda) = \frac{1}{2}\delta^a_b M^{ij}(\lambda\Gamma_{ij}\lambda) \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
(\Gamma_i\lambda)_\alpha\left(\lambda\Gamma^{ij}\lambda\right) &= 0,\\
(\Gamma_i\lambda)_\alpha\left(\lambda\Gamma^{abcdi}\lambda\right) &= 6\left(\Gamma^{[ab}\lambda\right)_\alpha\left(\lambda\Gamma^{cd]}\lambda\right)\\
(\Gamma_{ij}\lambda)_\alpha\left(\lambda\Gamma^{abcij}\lambda\right) &= -18\left(\Gamma^{[a}\lambda\right)_\alpha\left(\lambda\Gamma^{bc]}\lambda\right),\\
(\Gamma_{ijk}\lambda)_\alpha\left(\lambda\Gamma^{abijk}\lambda\right) &= -42\lambda_\alpha\left(\lambda\Gamma^{ab}\lambda\right),\\
(\Gamma_{ij}\lambda)_\alpha\left(\lambda\Gamma^{abcdij}\lambda\right) &= -24\left(\Gamma^{[ab}\lambda\right)_\alpha\left(\lambda\Gamma^{cd]}\lambda\right),\\
(\Gamma_i\lambda)_\alpha\left(\lambda\Gamma^{abcdei}\lambda\right) &= \lambda_\alpha\left(\lambda\Gamma^{abcde}\lambda\right) - 10\left(\Gamma^{[abc}\lambda\right)_\alpha\left(\lambda\Gamma^{de]}\lambda\right)
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Apéndice B

Código de Mathematica para SYM en $D = 10$

B.1 Variación del tensor de Maxwell

Needs[“xAct`xPert`”];

$DefInfoQ = False;

El primer paso es definir la variedad, para nuestro caso esta se encuentra definida en 4d

DefManifold[M4, 4, IndexRange[a, f]]

Después definimos la métrica y el símbolo de la derivada covariante (CD), para nuesto caso el signo de la métrica es negativa

DefMetric[−1, g[−a, −b], CD]

También podemos definir tensores en la configuración de la variedad,

DefTensor[γ[], M4]

DefTensor[χ[], M4]

DefParameter[ϵ]

Definimos las reglas de los productos

γ/:VarD[g[a_, b_], PD][γ[], rest_]:= − rest$g$[$-a$, $-b$]γ[]χ[]

χ/:PD[a_][χ[]]:=I/2Module[{c, d}, χ[]g[c, d]PD[a][g[$-c$, $-d$]]]γ[]

En especifico, nos interesa obtener la variación de la acción del tensor de Maxwell, para esto aplicamos la expansión en términos del tensor A

DefTensor[MaxwellA[$-a$], M4, PrintAs → A]

DefTensor[MaxwellF[$-a$, $-b$], M4, Antisymmetric[{1, 2}], PrintAs → F]

Definido a partir de la relación

MaxwellF[a_, b_]:=PD[a][MaxwellA[b]] − PD[b][MaxwellA[a]]

Escribimos la acción

g[a, b]g[c, d]MaxwellF[$-a$, $-c$]MaxwellF[$-b$, $-d$]/4

Unprotect[NonCommutativeMultiply];

Por último realizamos la variación y se obtiene

VarD[MaxwellA[a], PD][γ[]χ[] %]

B.2 SYM en D=10, utilizando espinores puros

<< "/Users/usuariomac/Documents/Wolfram Mathematica/Package/Ulf Gran/GAMMA.m";

GAMMA Version 2.0β

20 March 2017

© Ulf Gran, 2001

SetDim[10]

SetSpinorDim[16]

1. Expansion del supercampo

ExpSuperfield[k_, h_]:=

Sum [Product [Superscript [Superscript [λ, α_n] , μ] , {n, i}]

Product [Superscript [θ, β_n] , {n, j}]

Superscript [Subscript [A, Product [α_n, {n, i}] Product [β_m, {m, j}]] , {i, j}][

x], {i, 0, k}, {j, 0, h}]

ejemplo 1

ExpSuperfield[3, 5]

ExpSuperfieldLocal[i_, j_]:=

Product [Superscript [Superscript [λ, α_n] , μ] , {n, i}]

Product [Superscript [θ, β_n] , {n, j}]

Superscript [Subscript [A, Product [α_n, {n, i}] Product [β_m, {m, j}]] , {i, j}] [x]

ejemplo 2

ExpSuperfieldLocal[3, 5]

Expansion del campo en términos de θ

Expfield[q_]:=Sum [Product [Superscript [θ, b_m] , {m, j}]

Superscript [Subscript [a, aProduct [b_m, {m, j}]] , {j}] [x], {j, 0, q}]

ejemplo 3

Expfield[3]

Expfieldlocal[j_]:=

Product [Superscript [θ, b_m] , {m, j}]

Superscript [Subscript [a, aProduct [b_m, {m, j}]] , {j}] [x]

ejemplo 4

Expfieldlocal[3]

Paramétro de gauge

Λ[r_]:=Sum [Product [Superscript [θ, b_m] , {m, j}]

Superscript [Subscript [Λ, Product [b_m, {m, j}]] , {j}] [x], {j, 0, r}]

ejemplo 5

Λ[3]

2. Identidades de las matrices Gamma

Identidad 1

GammaExpand@GammaExpand@

GammaExpand[GammaProd[{m1, m2, m3}, {n1, n2, n3}]]**

TensorSpinor[m, {m1, m2, m3}];

GammaExtract[%, {n1, n2, n3}]

$-48\tilde{m}_{\mathrm{n1n2n3}}$

(1/2)GammaTrace[GammaProd[{m1, m2, m3}, {n1, n2, n3}], {n1, n2, n3}]**

TensorSpinor[m, {m1, m2, m3}]

$-48\tilde{m}_{\mathrm{n1n2n3}}$

Identidad 2

GammaExpand@

GammaExpand@

GammaExpand@GammaExpand[GammaProd[{m1, m2, m3}, {n1, n2, n3}, {m1}]]**

TensorSpinor[r, {m2, m3}];

GammaExtract[%, {n1, n2, n3}]

$96\Gamma_{\mathrm{n1}}{}^{**}\tilde{r}_{\mathrm{n2n3}}$

GammaTrace[GammaProd[{m1, m2, m3}, {n1, n2, n3}], {n1, n2, n3}]

GammaProd[{n1}]TensorSpinor[r, {n2, n3}]**

$\frac{1}{3}\left(-96\Gamma_{\text{m1}}{}^{**}\tilde{r}_{\text{m2m3}} + 96\Gamma_{\text{m2}}{}^{**}\tilde{r}_{\text{m1m3}} - 96\Gamma_{\text{m3}}{}^{**}\tilde{r}_{\text{m1m2}}\right)$

Identidad 3

GammaExpand@GammaExpand@

GammaExpand[GammaProd[{m1, m2, m3}, {n1, n2, n3}, {m1, m2}]]**

TensorSpinor[*r*, {m3}];

GammaExtract[%, {n1, n2, n3}]

$-48\Gamma_{\text{n1n2}}{}^{**}\tilde{r}_{\text{n3}}$

(1/2)GammaTrace[GammaProd[{m1, m2, m3}, {n1, n2, n3}], {n1, n2, n3}]

GammaProd[{n1, n2}]TensorSpinor[*r*, {n3}]**

$\frac{1}{3}\left(-48\Gamma_{\text{m1m2}}{}^{**}\tilde{r}_{\text{m3}} + 48\Gamma_{\text{m1m3}}{}^{**}\tilde{r}_{\text{m2}} - 48\Gamma_{\text{m2m3}}{}^{**}\tilde{r}_{\text{m1}}\right)$

Identidad 4

GammaExpand@

GammaExpand@

GammaExpand[GammaProd[{m1, m2, m3}, {n1, n2, n3}, {m1, m2, m3}]]**

Tensor[*r*, {}]

$-48\Gamma_{\text{n1n2n3}}r$

(1/2)GammaTrace[GammaProd[{m1, m2, m3}, {n1, n2, n3}], {n1, n2, n3}]

GammaProd[{n1, n2, n3}]TensorSpinor[*r*, {n3}]**

$-48\Gamma_{\text{m1m2m3}}{}^{**}\tilde{r}_{\text{n3}}$

Identidad 5

GammaExpand@GammaExpand@

GammaExpand[GammaProd[{m1, m2, m3}, {n1, n2, n3, n4, n5}]]**

TensorSpinor[*k*, {m1, m2, m3}];

GammaExtract[%, {n1, n2, n3, n4, n5}]

$-480\Gamma_{\text{n1n2}}{}^{**}\tilde{k}_{\text{n3n4n5}}$

Identidad 6

GammaExpand@

GammaExpand@

GammaExpand[GammaProd[{m1, m2, m3}, {n1, n2, n3, n4, n5}, {m1, m2}]]**

TensorSpinor[*s*, {m3}];

GammaExtract[%, {n1, n2, n3, n4, n5}]

$80\Gamma_{\mathrm{n1n2n3n4}}{}^{**}\tilde{s}_{\mathrm{n5}}$

Identidad 7

GammaExpand@

GammaExpand@

GammaExpand[GammaProd[{m1, m2, m3}, {n1, n2, n3, n4, n5}, {m1, m2, m3}]]**

Tensor[*s*, {}];

GammaExtract[%, {n1, n2, n3, n4, n5}]

0

Apéndice C

Código de Mathematica para SG en $D = 11$

C.1 Supergravedad en D=11, Cremmer-Julia-Scherk

```
<< "/Users/usuariomac/Documents/Wolfram Mathematica/Package/Ulf Gran/GAMMA.m";
```

GAMMA Version 2.0β

20 March 2017

© Ulf Gran, 2001

```
SetDim[11]
SetSpinorDim[32]
```

Acción Cremmer-Julia-Sherck

Ecuación de movimiento ψ_μ

```
GammaExpand@
GammaExpand[
(GammaProd[{m, n, p}, {q, r, s, t, n}]−
```

8GammaProd[$\{m, n, p\}, \{r, s, t\}$] ∗ Delta[$\{q\}, \{n\}$])]

GammaExtract[%, $\{t, s, q, r\}$]Tensor[$G, \{q, r, s, t\}$]Tensor[$\psi, \{p\}$]

Ecuación de movimiento $g_{\mu\nu}$

Quit[];

Needs["xAct`xPert`"]

Definimos una variedad en 11d con métrica Lorentziana.

$DefInfoQ = False;

DefManifold[M11, 11, $\{m, n, p, q, r, s, t\}$]

DefMetric[$-1, g[-m, -n]$, CD]

Definimos la perturbación de la métrica

DefMetricPerturbation[g, h, ϵ]

Ahora escribimos la densidad lagrangiana

LGR = Sqrt[Detg[]]RicciScalarCD[]

Encontramos la perturbación lineal, expandiendo y luego aplicando ContractMetric//Simplification

LGRpert = ExpandPerturbation@Perturbation@LGR//ContractMetric//

Simplification

Por último se obtiene

EOMGR0 =

1/Sqrt[Detg[]]VarD[h[LI[1], m, n], CD]@LGRpert/.

delta[−LI[1], LI[1]] → 1//Expand

DefTensor[$G[-m, -n, -p, -s]$, M11]

LGR2 = (−1/48)Sqrt[Detg[]]$G[-m, -n, -p, -s]G[m, n, p, s]$

LGRpert2 = ExpandPerturbation@Perturbation@LGR2//ContractMetric//

Simplification

EOMGR1 =

1/Sqrt[Detg[]]VarD[h[LI[1], m, n], CD]@LGRpert2/.

delta[−LI[1], LI[1]] → 1//Expand

C.2 Transformaciones de Fierz en D=11

Configuración de bases

Ejemplo de estructura (U. Gran)

Quit[];

SetDim[9]

SetSpinorDim[16]

structures = {x1, y1, y2, z1, z2, z3};

ind = HoldForm[(1/3)tr[P X]**Q + (2/3)P**X**Q];**

x1 = {{}, {a, b}, ind, {{}, {}}};

y1 = {{a}, {b}, ind, {{}, {}}};

y2 = {{e1}, {e1, a, b}, ind, {{}, {}}};

z1 = {{e1, e2, a, b}, {e1, e2}, ind, {{}, {}}};

z2 = {{e1, e2, e3, a}, {e1, e2, e3, b}, ind, {{}, {}}};

z3 = {{e1, e2, e3, e4}, {e1, e2, e3, e4, a, b}, ind, {{}, {}}};

SetBasis[S, {{}, {h1}, {h1, h2, h3, h4}}]

FierzSolve[Fierz[{y1, y2, z1}, structures, {a, b}, S, MakeTensor]]

Relación entre las estructuras independientes

(1, 2) teoría de representaciones, álgebra de Lie

FierzSolve[Fierz[{x1, z1}, structures, {a, b}, S, MakeTensor]]

Generalización de estructuras, diferentes configuraciones de los índices

Simétria entre índices

Para un índice vectorial

```
Quit[];
structures = {x1, x2, x3, x4};
ind = HoldForm[(1/3)tr[P**X]**Q + (2/3)P**X**Q];
x1 = {{e}, {}, ind, {{b}, {c}}};
x2 = {{c1}, {c1, e}, ind, {{b}, {c}}};
x3 = {{c1, c2}, {c1, c2}, ind, {{b}, {c}}};
x4 = {{c1, c2, c3, c4, c5}, {c1, c2, c3, c4, c5}, ind, {{b}, {c}}};
FierzSolve[Fierz[{x1, x2, x4}, structures, {c}, S, MakeTensor]]
```

Para dos índices vectoriales

```
Quit[];
structures = {x1, x2, x3, x4};
ind = HoldForm[(1/3)tr[P**X]**Q + (2/3)P**X**Q];
x1 = {{a}, {}, ind, {{a}, {b}}};
x2 = {{c1}, {a, c1}, ind, {{a}, {b}}};
x3 = {{c1, c2}, {a, c1, c2}, ind, {{a}, {b}}};
x4 = {{a, c1, c2, c3, c4}, {c1, c2, c3, c4}, ind, {{a}, {b}}};
FierzSolve[Fierz[{x1, x4}, structures, {}, S, MakeTensor]]
```

Para tres índices vectoriales

```
Quit[];
structures = {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9};
ind = HoldForm[(1/3)tr[P**X]**Q + (2/3)P**X**Q];
```

$x1 = \{\{a\}, \{b, c\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x2 = \{\{c1\}, \{a, b, c, c1\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x3 = \{\{a, b\}, \{c\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x4 = \{\{a, c1\}, \{b, c, c1\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x5 = \{\{c1, c2\}, \{a, b, c, c1, c2\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x6 = \{\{a, b, c, c1, c2\}, \{c1, c2\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x7 = \{\{a, b, c1, c2, c3\}, \{c, c1, c2, c3\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x8 = \{\{a, c1, c2, c3, c4\}, \{b, c, c1, c2, c3, c4\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x9 = \{\{c1, c2, c3, c4, c5\}, \{a, b, c, c1, c2, c3, c4, c5\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$\mathrm{FierzSolve}[\mathrm{Fierz}[\{x1, x2, x7\}, \mathrm{structures}, \{a, b, c\}, S, \mathrm{MakeTensor}]]$

Para cuatro índices vectoriales

$\mathrm{Quit}[];$

$\mathrm{structures} = \{x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9\};$

$\mathrm{ind} = \mathrm{HoldForm}[(1/3)\mathrm{tr}[P{**}X]{**}Q + (2/3)P{**}X{**}Q];$

$x1 = \{\{a\}, \{b, c, d\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x2 = \{\{c1\}, \{a, b, c, d, c1\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x3 = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x4 = \{\{c1, c2\}, \{a, b, c, d, c1, c2\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x5 = \{\{a, b, c, d, c1\}, \{c1\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x6 = \{\{a, b, c, c1, c2\}, \{d, c1, c2\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x7 = \{\{a, b, c1, c2, c3\}, \{c, d, c1, c2, c3\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x8 = \{\{a, c1, c2, c3, c4\}, \{b, c, d, c1, c2, c3, c4\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x9 = \{\{c1, c2, c3, c4, c5\}, \{a, b, c, d, c1, c2, c3, c4, c5\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$\mathrm{FierzSolve}[\mathrm{Fierz}[\{x1, x2, x7\}, \mathrm{structures}, \{a, b, c, d\}, S, \mathrm{MakeTensor}]]$

Para cinco índices vectoriales

Quit[];

structures = {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10, x11};

ind = HoldForm[(1/3)tr[P**X]**Q + (2/3)P**X**Q];

x1 = {{a}, {b, c, d, e}, ind, {{}, {}}};

x2 = {{c1}, {a, b, c, d, e, c1}, ind, {{}, {}}};

x3 = {{a, b}, {c, d, e}, ind, {{}, {}}};

x4 = {{a, c1}, {b, c, d, e, c1}, ind, {{}, {}}};

x5 = {{c1, c2}, {a, b, c, d, e, c1, c2}, ind, {{}, {}}};

x6 = {{a, b, c, d, e}, {}, ind, {{}, {}}};

x7 = {{a, b, c, d, c1}, {e, c1}, ind, {{}, {}}};

x8 = {{a, b, c, c1, c2}, {d, e, c1, c2}, ind, {{}, {}}};

x9 = {{a, b, c1, c2, c3}, {c, d, e, c1, c2, c3}, ind, {{}, {}}};

x10 = {{a, c1, c2, c3, c4}, {b, c, d, e, c1, c2, c3, c4}, ind, {{}, {}}};

x11 = {{c1, c2, c3, c4, c5}, {a, b, c, d, e, c1, c2, c3, c4, c5}, ind, {{}, {}}};

FierzSolve[Fierz[{x1, x2, x3, x9}, structures, {a, b, c, d, e}, S, MakeTensor]]

Antisimétria entre índices

Para dos índices vectoriales

Quit[];

structures = {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7};

ind = HoldForm[(1/3)tr[P**X]**Q + (2/3)P**X**Q];

x1 = {{}, {a, b}, ind, {{}, {}}};

x2 = {{a, b, c1}, {c1}, ind, {{}, {}}};

x3 = {{a, c1, c2}, {b, c1, c2}, ind, {{}, {}}};

x4 = {{c1, c2, c3}, {a, b, c1, c2, c3}, ind, {{}, {}}};

$\mathrm{x5} = \{\{a, b, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}\}, \{\mathrm{c1}, \mathrm{c2}\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$\mathrm{x6} = \{\{a, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}, \mathrm{c3}\}, \{b, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}, \mathrm{c3}\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$\mathrm{x7} = \{\{\mathrm{c1}, \mathrm{c2}, \mathrm{c3}, \mathrm{c4}\}, \{a, b, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}, \mathrm{c3}, \mathrm{c4}\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$\mathrm{FierzSolve}[\mathrm{Fierz}[\{\mathrm{x1}, \mathrm{x2}, \mathrm{x3}, \mathrm{x4}, \mathrm{x5}\}, \mathrm{structures}, \{a, b\}, S, \mathrm{MakeTensor}]]$

Para tres índices vectoriales

$\mathrm{Quit}[];$

$\mathrm{structures} = \{\mathrm{x1}, \mathrm{x2}, \mathrm{x3}, \mathrm{x4}, \mathrm{x5}, \mathrm{x6}, \mathrm{x7}, \mathrm{x8}\};$

$\mathrm{x1} = \{\{\}, \{a, b, c\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$\mathrm{x2} = \{\{a, b, \mathrm{c1}\}, \{c, \mathrm{c1}\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$\mathrm{x3} = \{\{a, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}\}, \{b, c, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$\mathrm{x4} = \{\{\mathrm{c1}, \mathrm{c2}, \mathrm{c3}\}, \{a, b, c, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}, \mathrm{c3}\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$\mathrm{x5} = \{\{a, b, c, \mathrm{c1}\}, \{\mathrm{c1}\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$\mathrm{x6} = \{\{a, b, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}\}, \{c, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$\mathrm{x7} = \{\{a, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}, \mathrm{c3}\}, \{b, c, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}, \mathrm{c3}\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$\mathrm{x8} = \{\{\mathrm{c1}, \mathrm{c2}, \mathrm{c3}, \mathrm{c4}\}, \{a, b, c, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}, \mathrm{c3}, \mathrm{c4}\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$\mathrm{FierzSolve}[\mathrm{Fierz}[\{\mathrm{x1}, \mathrm{x2}, \mathrm{x3}, \mathrm{x4}, \mathrm{x5}, \mathrm{x6}\}, \mathrm{structures}, \{a, b, c\}, S, \mathrm{MakeTensor}]]$

Para cuatro índices vectoriales

$\mathrm{Quit}[];$

$\mathrm{structures} = \{\mathrm{x1}, \mathrm{x2}, \mathrm{x3}, \mathrm{x4}, \mathrm{x5}, \mathrm{x6}, \mathrm{x7}, \mathrm{x8}, \mathrm{x9}\};$

$\mathrm{x1} = \{\{\}, \{a, b, c, d\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$\mathrm{x2} = \{\{a, b, c\}, \{d\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$\mathrm{x3} = \{\{a, b, \mathrm{c1}\}, \{c, d, \mathrm{c1}\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$\mathrm{x4} = \{\{a, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}\}, \{b, c, d, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

$\mathrm{x5} = \{\{\mathrm{c1}, \mathrm{c2}, \mathrm{c3}\}, \{a, b, c, d, \mathrm{c1}, \mathrm{c2}, \mathrm{c3}\}, \mathrm{ind}, \{\{\}, \{\}\}\};$

```
x6 = {{a, b, c, c1}, {d, c1}, ind, {{}, {}}};
x7 = {{a, b, c1, c2}, {c, d, c1, c2}, ind, {{}, {}}};
x8 = {{a, c1, c2, c3}, {b, c, d, c1, c2, c3}, ind, {{}, {}}};
x9 = {{c1, c2, c3, c4}, {a, b, c, d, c1, c2, c3, c4}, ind, {{}, {}}};
FierzSolve[Fierz[{x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7}, structures, {a, b, c, d}, S, MakeTensor]]
```

Para cinco índices vectoriales

```
Quit[];
structures = {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9, x10};
x1 = {{}, {a, b, c, d, e}, ind, {{}, {}}};
x2 = {{a, b, c}, {d, e}, ind, {{}, {}}};
x3 = {{a, b, c1}, {c, d, e, c1}, ind, {{}, {}}};
x4 = {{a, c1, c2}, {b, c, d, e, c1, c2}, ind, {{}, {}}};
x5 = {{c1, c2, c3}, {a, b, c, d, e, c1, c2, c3}, ind, {{}, {}}};

x6 = {{a, b, c, d}, {e}, ind, {{}, {}}};
x7 = {{a, b, c, c1}, {d, e, c1}, ind, {{}, {}}};
x8 = {{a, b, c1, c2}, {c, d, e, c1, c2}, ind, {{}, {}}};
x9 = {{a, c1, c2, c3}, {b, c, d, e, c1, c2, c3}, ind, {{}, {}}};
x10 = {{c1, c2, c3, c4}, {a, b, c, d, e, c1, c2, c3, c4}, ind, {{}, {}}};
FierzSolve[Fierz[{x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7}, structures, {a, b, c, d, e}, S, MakeTensor]]
```

Caso especial Gamma {r s} Gamma {r} tres índices vectoriales simetricos

```
Quit[];
structures = {x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8, x9};
ind = HoldForm[(1/6)tr[P**X]**Q + (1/6)tr[Q**X]**P + (2/3)P**X**Q];
x1 = {{}, {s}, ind, {{}, {}}};
```

$x2 = \{\{c1\}, \{r, r, s, c1\}, ind, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x3 = \{\{r, s\}, \{r\}, ind, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x4 = \{\{s, c1\}, \{c1\}, ind, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x5 = \{\{c1, c2\}, \{r, r, s, c1, c2\}, ind, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x6 = \{\{r, r, s, c1, c2\}, \{c1, c2\}, ind, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x7 = \{\{r, r, c1, c2, c3\}, \{s, c1, c2, c3\}, ind, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x8 = \{\{r, c1, c2, c3, c4\}, \{r, s, c1, c2, c3, c4\}, ind, \{\{\}, \{\}\}\};$

$x9 = \{\{c1, c2, c3, c4, c5\}, \{s, c1, c2, c3, c4, c5\}, ind, \{\{\}, \{\}\}\};$

FierzSolve[Fierz[{x1, x4, x9}, structures, {s}, S, MakeTensor]]

C.3 Cohomología espinorial (Cederwall, Nilsson, Tsimpis)

<< LieArt.m

LieART 1.1.5

last revised 7 August 2014

The código de Lie (M. Cederwall)

SYM en D=10 calcula el contenido de los supercampos

s = Irrep[D][0, 0, 0, 0, 1];

ra[n_]:=Irrep[D][0, 0, 0, n, 0];

s = Irrep[D][0, 0, 0, 0, 1];

r[m_, n_]:=If[n==0, r[m]

If[$n < 0$, PolynomialQ[ra, Rank[Irrep[D][0, 0, 0, 0, 1]]],

If[$m < 0$, PolynomialQ[ra, Rank[Irrep[D][0, 0, 0, 0, 1]]],

DecomposeProduct[ra[m], TensorProduct[n, s]]]]]

Mejora de la ecuación anterior

r[m_, n_]:=Module[{s, ra},

```
s = Irrep[D][0, 0, 0, 0, 1];
ra[p_]:=Irrep[D][0, 0, 0, p, 0];
s = Irrep[D][0, 0, 0, 0, 1];
If[n==0, r[m],
If[n < 0, If[m < 0, DecomposeProduct[ra[m], TensorProduct[n, s]]]]]
];
```

SG en D=11, construcción de Irrep r(n)

```
r[n_]:=Module[{q, ran, s},
ran = Rank[Irrep[B][0, 0, 0, 0, 1]];
s = Irrep[B][0, 0, 0, 0, 1];
q = Exponent[ran, x];
If[Mod[n, 2] == 0,
For[i = 0, i ≤ (n/2), i++,
Print[q = q + Irrep[B][1, i, 0, 0, n − 2 ∗ i]//StandardForm]]];
If[Mod[n, 2] == 1, For[i = 0, i ≤ ((n − 1)/2), i++,
Print[q = q + Irrep[B][1, i, 0, 0, n − 2 ∗ i]//StandardForm]]]
];
```

Tensores de SG en D=11, construcción de Irrep r(n)

```
r[n_]:=Module[{q, ran, s},
ran = Rank[Irrep[B][0, 0, 0, 0, 1]];
s = Irrep[B][0, 0, 0, 0, 1];
q = Exponent[ran, x]; If[Mod[n, 2] == 0,
For[i = 0, i ≤ (n/2), i++,
Print[q = q + Irrep[B][0, i, 0, 0, n − 2 ∗ i]//StandardForm]]];
If[Mod[n, 2] == 1, For[i = 0, i ≤ ((n − 1)/2), i++,
Print[q = q + Irrep[B][0, i, 0, 0, n − 2 ∗ i]//StandardForm]]]
];
```

Bibliografía

[1] Nathan Berkovits. «ICTP lectures on covariant quantization of the superstring». En: *arXiv preprint hep-th/0209059* (2002) (vid. pág. 32).

[2] Nathan Berkovits. «Towards covariant quantization of the supermembrane». En: *Journal of High Energy Physics* 2002.09 (2002). , pág. 051 (vid. pág. 2).

[3] Lars Brink y John H Schwarz. «Quantum superspace». En: *Physics Letters B* 100.4 (1981), págs. 310-312 (vid. pág. 1).

[4] E. Cartan y A. Mercier. *The Theory of Spinors*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications, 1981. URL: https://books.google.com.co/books?id=AEZ1h7Cg3cwC (vid. pág. 1).

[5] Martin Cederwall, Bengt EW Nilsson y Dimitrios Tsimpis. «Spinorial cohomology of abelian d= 10 super-Yang-Mills at (α 3)». En: *Journal of High Energy Physics* 2002.11 (2003), pág. 023 (vid. pág. 33).

[6] Martin Cederwall y col. «Supersymmetric corrections to eleven-dimensional supergravity». En: *arXiv preprint hep-th/0409107* (2004). (vid. pág. 2).

[7] Eugene Cremmer, Bernard Julia y Joel Scherk. «Supergravity in theory in 11 dimensions». En: *Physics Letters B* 76.4 (1978), págs. 409-412 (vid. pág. 43).

[8] Fredrik Eliasson. «Super Yang-Mills Theory using Pure Spinors». Tesis de mtría. Chalmers U. Tech., 2006. URL: http://fy.chalmers.se/~tfebn/MasterThesesFEliasson.pdf (vid. págs. 6, 37).

[9] Robert Feger y Thomas W Kephart. «LieART—a Mathematica application for Lie algebras and representation theory». En: *Computer Physics Communications* 192 (2015). , págs. 166-195 (vid. pág. 6).

[10] Ulf Gran. «GAMMA: A Mathematica package for performing Gamma-matrix algebra and Fierz transformations in arbitrary dimensions». En: *arXiv preprint hep-th/0105086* 147 (2001). (vid. pág. 6).

[11] Michael B Green, John H Schwarz y Edward Witten. *Superstring theory*. Vol. 2. Elsevier, 1987 (vid. pág. 1).

[12] Luis Max Guillen Quiroz. «D=10 Super Yang Mills, D=11 Supergravity and the Pure Spinor Superfield Formalism». Tesis de mtría. Sao Paulo, IFT, 2016. URL: http://inspirehep.net/record/1621037/files/fulltext.pdf (vid. pág. 7).

[13] Sebastian Guttenberg. «Superstrings in general backgrounds». En: *arXiv preprint arXiv:0807.4968* (2008). (vid. pág. 8).

[14] Obtaining LiE. «A Computer algebra package for Lie group computations». En: () (vid. pág. 44).

[15] Carlos R Mafra. «Superstring scattering amplitudes with the pure spinor formalism». En: *arXiv preprint arXiv:0902.1552* (2009). (vid. pág. 32).

[16] André Miemiec e Igor Schnakenburg. «Basics of M-theory». En: *Fortschritte der Physik* 54.1 (2006), págs. 5-72 (vid. pág. 45).

[17] Teake Nutma. «xTras: A field-theory inspired xAct package for mathematica». En: *Computer Physics Communications* 185.6 (2014), págs. 1719-1738 (vid. pág. 6).

[18] Kasper Peeters. «Cadabra: a field-theory motivated symbolic computer algebra system». En: *Computer Physics Communications* 176.8 (2007), págs. 550-558 (vid. pág. 11).

[19] Peter West. *Introduction to supersymmetry and supergravity*. World Scientific Publishing Co Inc, 1990 (vid. págs. 7, 35, 44).