VIGAS Y MARCOS PLANOS ANALIZADOS POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

JULIAN DAVID TORO DUQUE

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA
PEREIRA
2007

VIGAS Y MARCOS PLANOS ANALIZADOS POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

JULIAN DAVID TORO DUQUE

Trabajo de grado para optar al titulo de ingeniero mecánico

Director:

EDUCARDO RONCANCIO HUERTAS

Ingeniero mecánico

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA
PEREIRA
2007

Nota de aceptación:

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

DEDICATORIA

A las tres personas más importantes en mi vida, mi madre, mi hermana y mi abuela. Que con su apoyo, paciencia y dedicación estuvieron presentes en todo este proceso desde su inicio hasta su fin.

A mis amigos de la universidad que siempre estuvieron presentes cuando los necesite, y que fueron un apoyo constante en mis años de estudio universitario.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a los profesores que de una u otra forma colaboraron en el desarrollo de este proyecto especialmente al ingeniero Educardo Roncancio Huertas, director del proyecto, por la colaboración y confianza mostrada durante el proceso.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

RESUMEN

Este trabajo cuenta con seis capítulos realizados con base en las necesidades creadas mediante el objetivo a cumplir, donde se explican las diferentes herramientas a utilizar para el desarrollo del software. Este software tendrá en su algoritmo implícito el método de elementos finitos para sistemas discretos, obtenido con la minimización de la energía potencial de los elementos cargados. Por medio de esto se obtienen una serie de matrices donde al interactuar unas con otras mediante operaciones básicas (algebra de matrices) se llega a resultados confiables haciendo cumplir las condiciones iniciales o condiciones de frontera del problema que se desea solucionar.

Inicialmente se da un breve recuento del algebra de matrices haciendo énfasis en lo estrictamente utilizado para la creación del software, luego se incluye un marco teórico donde se toca la resistencia de materiales, ya que este es el tema base de los problemas a solucionar, con lo cual se da lugar al estudio de vigas y marcos planos desde su definición hasta principales características dando lugar al estudio de los elementos finitos enfocados al análisis discreto propio para la solución del tipo de problemas a estudiar. Conociendo cada uno de los posibles problemas se da inicio con la introducción al lenguaje de programación utilizado denominado Matlab y su posterior aplicación para el cumplimiento del objetivo inicialmente planteado.

Con la inclusión del método de elementos finitos a la programación por medio de la plataforma de Matlab se realizó una serie de programas en su totalidad seis donde cada uno tiene una amplia aplicación en lo que respecta a vigas y marcos planos con unidades de sistema internacional y sistema ingles.

INTRODUCCIÓN

Con el presente trabajo se pretende incentivar la elaboración de software por medio del método de elementos finitos y su posterior aplicación en los diferentes campos de la ingeniería. En la actualidad los elementos finitos juegan un papel muy importante en el mundo de la ingeniería y es quizá la herramienta más usada para la sistematización de procesos que conllevan a resultados confiables para una posible utilización de elementos y diseños. La implementación del software de ingeniería ha tomado mucha fuerza en los últimos años y por esta razón los estudiantes y los mismos ingenieros deben estar a la vanguardia de la creación, el mercado y aplicación de estos programas computacionales para tener una buena competitividad en el mundo laboral y tecnológico.

El uso continuo de la programación en algunas actividades y campos hacen que sea una obligación de los ingenieros conocer acerca de esto y estar preparados para dar soluciones algorítmicas sencillas pero efectivas a problemas que se pueden presentar a diario, con la creación de software se brinda oportunidad de expandir el conocimiento logrado no solo en el campo de la programación de computadores sino también en la aplicación del conocimiento adquirido durante el tiempo de preparación como ingeniero.

El empleo de la computación en el diseño, mantenimiento y evaluación de procesos, equipos industriales y obras civiles se ha hecho muy común en los países industrializados. La simulación numérica de estos diseños, procesos o equipos antes de que sean incluidos en la práctica industrial, constituye una ventaja en seguridad y confiabilidad. Una económica simulación computacional previa a la implementación industrial del objeto puede poner en evidencia fallas y así ahorrar considerables cantidades de dinero, e inclusive salvar vidas humanas. La simulación numérica permite también la obtención de diseños óptimos, lo cual sería muy extenso y engorroso de otra manera.

Se propone un proyecto sobre uno de los más importantes métodos computacionales en Ingeniería: El Método de los Elementos Finitos. El espectro de problemas que pueden ser analizados mediante este método es muy amplio e incluye aplicaciones en Ingeniería Mecánica, Civil, Aeronáutica, Naval, Petrolera y otras. Mediante el método de los elementos finitos se puede, por ejemplo, evaluar la seguridad estructural de un hospital ante un evento sísmico, simular la fractura de un hueso humano y su proceso de curación, calcular los asentamientos del suelo debidos a la extracción de petróleo, determinar la distribución de esfuerzos en el ala de un avión, problemas de propagación de ondas, etc. Como se puede ver el método tiene una amplia aplicación por lo cual se enfocará el análisis del método y su correspondiente software a las vigas y los marcos en dos dimensiones dándonos como resultado un paquete para su posterior utilización en las salas de cómputo de la Universidad Tecnológica de Pereira en el curso de resistencia de materiales en las diferentes ingenierías.

1. ALGEBRA MATRICIAL Y VECTORIAL

1.1. INTRODUCCIÓN AL ALGEBRA MATRICIAL Y VECTORIAL

Las matrices nacieron con el objeto de simplificar la notación a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales. Posiblemente el primero en utilizar la notación actual fue el inglés Arthur Cayley (1821-1895), quien al estudiar las transformaciones lineales, utilizó notaciones abreviadas entre corchetes como las de hoy en día.

Se iniciara definiendo rigurosamente el concepto de matriz y especificando algunas notaciones importantes relacionadas con este concepto. Aunque el estudio que ahora se abordara puede hacerse con más generalidad, nuestra teoría de matrices se restringirá solo a lo usado en este trabajo.

En una matriz de orden m x n, m indica el número de filas y n el número de columnas (ver figura 1.1), Por ejemplo, el elemento a_{45} indica que está en la fila 4 y en la columna 5.

Figura 1.1 Matriz A con tamaño m x n

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A = (a_{ij}), se le llaman **fila i-ésima** y **columna j-ésima** a los componentes de la matriz lo cual permitirá un mejor manejo algebraico y computacional. Los elementos de la forma a_{ii}, forman la llamada **diagonal principal** de la matriz.

1.2 CLASIFICACIÓN DE LAS MATRICES

Se realizará una clasificación de las matrices atendiendo a su orden.

1.2.1 Matrices rectangulares. Son aquéllas que tienen diferente número de filas que de columnas, es decir, $m \neq n$. Existen tipos especiales de matrices rectangulares. Son los siguientes:

- **Matrices fila.** Son matrices del orden 1 x n, es decir, sólo tienen una fila y responden a la forma:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.1)}$$

- **Matrices columna.** Son matrices del orden m x 1, es decir, tienen solamente una columna. Gráficamente, son matrices de la forma:

$$W = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.2)}$$

1.2.2 Matrices cuadradas. Son matrices con igual número de filas que de columnas, o sea m = n. Dentro de este tipo de matrices, nos encontramos con algunos tipos de particular relevancia:

- **Matrices simétricas.** Son todas aquellas matrices $A = (a_{ij})$, tales que para todo i, j = 1,…, n,

$$a_{ij} = a_{ji}$$

- **Matrices antisimétricas.** Son todas aquellas matrices $A = (a_{ij})$ tales que para todo i, j = 1,…, n,

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

1.3 ALGEBRA DE MATRICES

1.3.1 Suma de matrices. La suma de dos matrices es tal que, al sumar dos matrices de orden m x n, obtenemos de nuevo una matriz de orden m x n. Así, si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, entonces: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

A continuación las propiedades que tiene esta suma de matrices:

1. Asociativa: si A, B, C entonces se verifica que:

$$A + (B + C) = (A + B) + C \qquad \textbf{(1.3)}$$

2. Existencia de elemento neutro: existe una matriz distinguida E, tal que para cualquier otra matriz A:

$$E + A = A + E = A \quad \textbf{(1.4)}$$

3. Existencia de elemento opuesto: para toda matriz A existe una matriz, -A, de modo que:

$$A + (-A) = -A + A = E \quad \textbf{(1.5)}$$

4. Conmutativa: para matrices A, B, se verifica que:

$$A + B = B + A \quad \textbf{(1.6)}$$

5. Propiedad cancelativa: para matrices A, B, C, se verifica que:

$$A + B = A + C \Leftrightarrow B = C \quad \textbf{(1.7)}$$

1.3.2 Producto de una matriz por un escalar. Para referirse a los números reales se usara el término escalar. Para un escalar λ y una matriz A = (a_{ij}). Se define el producto de ambos como aquella matriz que se obtiene de A multiplicando cada uno de sus coeficientes por λ.

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})$$

1.3.3 Producto de matrices. Para multiplicar dos matrices, la regla a seguir para que pueda efectuarse esta operación es:

Siendo A y B dos matrices entonces la multiplicación entre ambas producirá C de tal manera que, A x B =C.

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj} \qquad \textbf{(1.8)}$$

Para que dos matrices puedan multiplicarse, el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda. El producto de matrices, cumple con las siguientes propiedades:

1. Asociativa, se tiene que:

$$A\,(BC) = (AB)\,C \qquad \textbf{(1.9)}$$

2. Distributiva, con respecto a la suma de matrices:

$$A\,(B + C) = AB + AC \qquad \textbf{(1.10)}$$

$$(A + B)\,C = AB + AC \qquad \textbf{(1.11)}$$

1.3.4 Matriz identidad. Es una matriz de orden n, cuadrada cuyos coeficientes son todos nulos, salvo los que se encuentran en la diagonal principal, donde tiene unos. Si la denotamos por I_n, esta es:

Figura 1.2 Matriz identidad de orden n I_n

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Las matrices identidades de órdenes m y n, respectivamente, se comportan como elementos unidades.

Para toda matriz A:

$$I_mA = A = AI_n \tag{1.12}$$

En particular, si m = n entonces:

$$I_nA = A = AI_n \tag{1.13}$$

1.3.5 Matriz inversa. Mientras que para una matriz dada siempre existe su matriz opuesta (con respecto a la suma de matrices), no siempre ocurre esto para con el producto de matrices. En el producto, el concepto análogo al de matriz opuesta para la suma, es el de matriz inversa a una dada. Se analiza en este punto, las condiciones bajo las cuales existe la inversa de una matriz:

Sea A una matriz cuadrada de orden n, Decimos que A es una matriz regular (o invertible) si existe su inversa, esto es, si existe una matriz A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n \tag{1.14}$$

Toda matriz que no sea regular recibe el nombre de matriz singular. A continuación se encontraran las propiedades de la matriz inversa relacionada con las diferentes operaciones entre matrices.

1. Para cualquier A.

$$(A^{-1})^{-1} = A \qquad \textbf{(1.15)}$$

2. Sea λ un número real y A una matriz regular. Entonces λA es regular.

$$(\lambda A)^{-1} = (1/\lambda)\, A^{-1} \qquad \textbf{(1.16)}$$

3. Sean A y B, dos matrices regulares. Entonces la matriz producto, AB, también es regular.

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \qquad \textbf{(1.17)}$$

4. La matriz identidad es una matriz regular. Además:

$$I_n^{-1} = I_n \qquad \textbf{(1.18)}$$

1.3.6 Matriz simétrica. Una matriz A es simétrica si:

$$A = A^T \qquad \textbf{(1.19)}$$

1.3.7 Matriz traspuesta. Sea A una matriz de orden m x n. Se llama matriz traspuesta de A, A^T, a la matriz de orden n x m que se obtiene de A intercambiando filas por columnas, es decir, si A = (a_{ij}); entonces $A^T = (a_{ji})$: nótese que en caso de que A sea cuadrada de orden n, también lo es A^T. Una matriz regular cuya matriz traspuesta sea justamente su matriz inversa recibe el nombre de ortogonal.

Propiedades importantes de la transposición de matrices:

1. La traspuesta de la traspuesta de una matriz es ésta misma, es decir:

$$(A^T)^T = A \qquad \textbf{(1.20)}$$

2. Traspuesta de una suma:

$$(A + B)^T = A^T + B^T \qquad \textbf{(1.21)}$$

3. Traspuesta de un producto por escalar:

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T \qquad \textbf{(1.22)}$$

4. Traspuesta de un producto:

$$(AB)^T = B^T A^T \qquad \textbf{(1.23)}$$

5. Si A es una matriz cuadrada regular, entonces:

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} \qquad \textbf{(1.24)}$$

2. MARCO TEÓRICO

2.1 CONCEPTOS BÁSICOS DE RESISTENCIA DE MATERIALES

Se entiende por falla de una estructura o de determinadas partes de la misma: a la rotura, o sin llegar a ello, a la existencia de un estado inadecuado. Esto último puede ocurrir por varios motivos: deformaciones demasiado grandes, falta de estabilidad de los materiales, fisuraciones, pérdida del equilibrio estático por pandeo, abollamiento o vuelco.

La resistencia de materiales es la disciplina que estudia las solicitaciones internas y las deformaciones que se producen en el cuerpo sometido a cargas exteriores. La diferencia entre la mecánica Teórica y la Resistencia de Materiales radica en que para ésta lo esencial son las propiedades de los cuerpos deformables, mientras que en general, no tienen importancia para la primera.

La Resistencia de Materiales tiene como finalidad elaborar métodos simples de cálculo, aceptables desde el punto de vista práctico, de los elementos típicos más frecuentes de las estructuras, empleando para ello diversos procedimientos aproximados. La necesidad de obtener resultados concretos al resolver los problemas prácticos nos obliga a recurrir a hipótesis simplificativas, que pueden ser justificadas comparando los resultados de cálculo con los ensayos, o los obtenidos aplicando teorías más exactas, las cuales son más complicadas y por ende usualmente poco expeditivas.

Los problemas a resolver haciendo uso de esta ciencia son de dos tipos:

1. Dimensionamiento.

2. Verificación.

En el primer caso se trata de encontrar el material, las formas y dimensiones mas adecuadas de una pieza, de manera tal que ésta pueda cumplir su cometido:

- Con seguridad.

- En perfecto estado.

- Con gastos adecuados.

El segundo caso se presenta cuando las dimensiones ya han sido prefijadas y es necesario conocer si son las adecuadas para resistir el estado de solicitaciones actuantes.

2.1.1 Sólido rígido. En la teoría elemental de mecánica se considera que los cuerpos, objeto de estudió, son rígidos, entendiéndose cuerpos rígidos como aquellos que no se deforman bajo la acción de fuerzas aplicadas sobre dichos cuerpos. En realidad no son absolutamente rígidos y se deforman bajo la acción de las fuerzas a las que son sometidos, siendo las deformaciones normalmente pequeñas y no afectan apreciablemente a las condiciones de equilibrio. Sin embargo, son importantes estas deformaciones en la resistencia a la rotura de las estructuras y son estudiadas en la resistencia de materiales. Un sólido rígido puede estar sometido a fuerzas exteriores y fuerzas interiores.

- **Fuerzas externas.** Si se aísla un elemento resistente de los cuerpos a los que esta ligado, las acciones que estos ejercen sobre él, se ven sustituidas por fuerzas, a las que llamamos exteriores. Hay dos tipos de solicitaciones exteriores:

- Fuerzas activas, denominadas cargas.

- Fuerzas de reacción, denominadas reacciones.

Tanto las cargas como las reacciones están formadas en general por una fuerza y un momento.

- **Fuerzas internas.** Las fuerzas interiores tienen como misión mantener unidas entre sí todas las partículas de las que está formado el sólido rígido, y si nuestro sólido rígido está compuesto estructuralmente por varias partes, las fuerzas que mantienen la unión se definen también como fuerzas interiores.

2.1.2 Clasificación de las cargas. Existen una gran variedad de cargas, de las cuales algunas se tienen en cuenta según sea la necesidad en la precisión de los resultados a obtener. Algunas de estas cargas se clasifican en:

a. Cargas de volumen: son las debidas a los campos de fuerza (gravitatorias). Peso propio.

b. Cargas de superficie: son las que se aplican en la superficie del sólido, y se clasifican en concentradas y distribuidas.

- Concentradas: son cargas puntuales.

- Distribuidas: son cargas por unidad de superficie, por ejemplo la acción del viento.

c. Según el tiempo que dure la aplicación de la carga pueden ser permanentes o con carga, mantienen su posición y magnitud a lo largo del tiempo. Se descomponen en dos:

  - Peso propio: carga debida al peso propio del elemento resistente.

  - Carga permanente: debido al peso de los elementos constructivos.

d. Cargas accidentales o Sobrecargas: son cargas cuya magnitud y posición pueden ser variable a lo largo del tiempo, son de uso y explotación.

  - Sobrecarga de nieve.

  - Sobrecarga de viento.

e. Cargas según su variación en el tiempo.

  - Estáticas: su magnitud y/o punto de aplicación varía muy lentamente. (Se puede prescindir de las fuerzas de inercia).

  - Dinámicas: varían con el tiempo. La acción de estas fuerzas crea vibraciones apareciendo fuerzas que pueden superar a las fuerzas estáticas, y estas se clasifican en dos: De repetición periódica ò cíclicas (fatiga) y de repetición no periódica (choques).

2.1.3 Reacciones y tipos de apoyos. Se define ligadura, como todo dispositivo que impide de un modo total o parcial, el libre movimiento de un sólido. La ligadura es un vínculo de unión con el resto de los elementos que componen una estructura. Un elemento resistente tiene seis grados de libertad cuando está libre, es decir puede desplazarse y girar sobre y alrededor de los tres ejes de coordenadas. A continuación los tipos de ligadura y de apoyos:

a. Apoyo articulado móvil: Sólo existe una reacción perpendicular al plano de apoyo $\Rightarrow$ una sola reacción de ligadura.

b. Apoyo articulado fijo: El desplazamiento está impedido en todas las direcciones $\Rightarrow$ Existen dos reacciones en los ejes X e Y.

c. Apoyo empotrado o empotramiento: En el están impedidos los desplazamientos en el plano XY y los giros. Existen tres reacciones de ligadura.

2.1.4 Hipótesis fundamentales. En Resistencia de Materiales se debe tener siempre en cuenta el principio de la economía de material: las piezas y las estructuras no deben ser superiores a las necesarias, para ello se deben conocer bien las propiedades de los materiales y conocer una serie de hipótesis que nos simplificaran los problemas.

a. El material se considera macizo (continuo). El comportamiento real de los materiales cumple con esta hipótesis aún cuando pueda detectarse la presencia de poros o se considere la discontinuidad de la estructura de la materia, compuesta por átomos que no están en contacto rígido entre sí, ya que existen espacios entre ellos y fuerzas que los mantienen vinculados, formando una red ordenada.

b. El material de la pieza es homogéneo (idénticas propiedades en todos los puntos). El acero es un material altamente homogéneo; en cambio, la madera, el hormigón y la piedra son bastante heterogéneos.

c. El material de la pieza es isótropo. Esto significa que admitimos que el material mantiene idénticas propiedades en todas las direcciones.

d. Las fuerzas interiores, originales, que preceden a las cargas, son nulas. Las fuerzas interiores entre las partículas del material, cuyas distancias varían, se oponen al cambio de la forma y dimensiones del cuerpo sometido a cargas. Al hablar de fuerzas interiores no consideramos las fuerzas moleculares que existen en sólido no sometido a cargas. Esta hipótesis no se cumple prácticamente en ninguno de los materiales. En piezas de acero se originan estas fuerzas debido al enfriamiento, en la madera por el secamiento y en el hormigón durante el fraguado.

e. Es válido el principio de superposición de efectos. Al tratarse de sólidos deformables este principio es válido cuando: Los desplazamientos de los puntos de aplicación de las fuerzas son pequeños en comparación con las dimensiones del sólido. Los desplazamientos que acompañan a las deformaciones del sólido dependen linealmente de las cargas. Estos sólidos se denominan “sólidos linealmente deformables”. Por otro lado, siendo que las deformaciones son pequeñas, las ecuaciones de equilibrio correspondiente a un cuerpo cargado pueden plantearse sobre su configuración inicial, es decir, sin deformaciones.

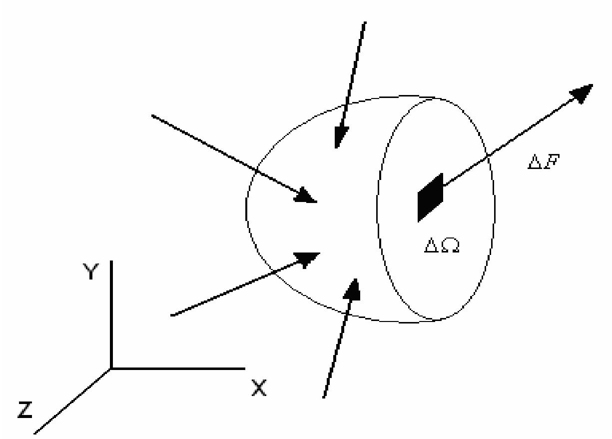
f. Es aplicable el principio de Saint – Venant. Este principio establece que el valor de las fuerzas interiores en los puntos de un sólido, situados suficientemente lejos de los lugares de aplicación de las cargas, depende muy poco del modo concreto de aplicación de las mismas. Merced a este principio en muchos casos podremos sustituir un sistema de fuerzas por otro estáticamente equivalente, lo que puede conducir a la simplificación del cálculo.

g. Las cargas son estáticas o cuasi-estáticas. Las cargas se dicen que son estáticas cuando demoran un tiempo infinito en aplicarse, mientras que se denominan cuasi-estáticas cuando el tiempo de aplicación es suficientemente prolongado. Las cargas que se aplican en un tiempo muy reducido se denominan dinámicas, las solicitaciones internas que producen son sensiblemente mayores que si fuesen estáticas o cuasi-estáticas.

2.1.5 Solicitación. Si se considera un cuerpo sometido a cargas exteriores en equilibrio, y se divide en dos partes mediante la intersección con un plano cualquiera, se sabe que en la sección originada aparecerán fuerzas que mantienen el equilibrio de la porción. Si en la sección se toma un punto P y un entorno de área $\Delta\Omega$, sobre dicha área existirá una fuerza elemental ΔF como se representa en la figura 1.1. Haciendo el cociente de $\frac{\Delta F}{\Delta\Omega}$ con $\Delta\Omega$ tendiendo a cero, se define como “vector tensión total o tensión resultante en el punto P, al siguiente limite:

$$\rho = \lim_{\Delta\Omega \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta\Omega} \tag{2.1}$$

Figura 2.1 Cuerpo sometido a cargas en equilibrio



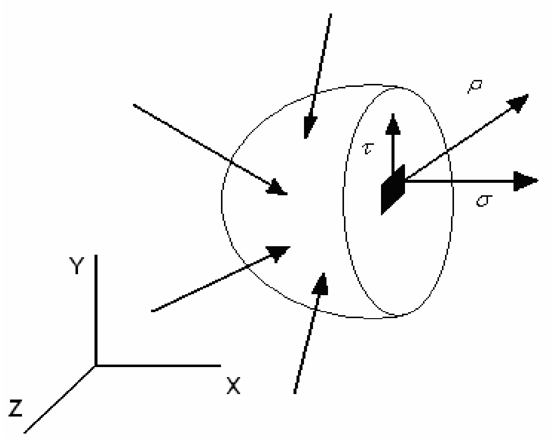
La tensión es una magnitud vectorial, por lo tanto queda definida mediante tres parámetros: intensidad, dirección y sentido. Por otro lado, la dimensión que tiene es la de una fuerza por unidad de área.

Tabla 2.1 unidades en el sistema internacional

Fuerza	Newton	$1N \cong 0.1Kgf$
Momento	Newton $\times$ metro	N.m
Presión	Pascal	Pa = N/m^2

El vector tensión total puede descomponerse según dos direcciones, una normal al plano de la sección y otra contenida en el mismo, obteniéndose así dos componentes de tensión denominadas tensión normal (σ) y tensión tangencial (τ) como se aprecia en la figura 2.2.

Figura 2.2 Descomposición del vector tensión



2.1.6 Ley de Hooke. La denominada Ley de Hooke constituye la base de la Resistencia de Materiales y es válida dentro de lo que se denomina régimen lineal elástico. Esta ley establece que si la tensión normal σ se mantiene por debajo de un cierto valor σ_P, llamado tensión de proporcionalidad, las deformaciones específicas y las tensiones son directamente proporcionales.

$$\sigma = \mathrm{E}\varepsilon \qquad \textbf{(2.2)}$$

E: Recibe el nombre de Módulo de Elasticidad Longitudinal, o módulo de Young. El valor de E es una característica de cada material.

ε **:** Cociente entre el desplazamiento d y la longitud L de la barra cuando está descargada, este cociente se denomina “deformación unitaria o especifica”

Se define como la propiedad que posee un material de volver parcial o completamente a su forma inicial una vez que desaparece la carga, es lo que se llama “elasticidad”. Si una barra es sometida a tracción axial y la barra recupera completamente su longitud inicial, se dice que el material es “perfectamente elástico”; de lo contrario se dice que es “parcialmente elástico”.

La “plasticidad” es una propiedad opuesta, un material es “perfectamente plástico” cuando al dejar de actuar la carga que lo deforma mantiene su configuración deformada. En la realidad ningún material resulta perfectamente elástico o perfectamente plástico.

Algunos materiales como el acero, el aluminio, la madera y el hormigón pueden ser considerados como perfectamente elásticos dentro de ciertos límites, es decir, si no están excesivamente cargados. Otros materiales como la arcilla y la masilla pueden considerarse como perfectamente plásticos.

3. VIGAS Y MARCOS

3.1. INTRODUCCIÓN A LAS VIGAS Y MARCOS

Las vigas y los marcos hacen parte importante hoy de la ingeniería estructural brindando elementos básicos para la construcción de estructuras monumentales y complejas, dándonos así un gran campo de utilización de estos en la vida diaria. Se supondrá en el presente trabajo que las vigas y marcos sean prismáticos, lo cual quiere decir de sección transversal constante, además los elementos podrán estar sometidos a diferentes tipos de cargas según sea el caso.

Existen varios métodos para la solución de la deformación de estos elementos estructurales como lo son: método de la elástica o de la doble integración, método del área de momentos, método de la ecuación de tres momentos, y método energético basado en el teorema de Castigliano. Con el estudio de las diferentes maneras de solucionar problemas estructurales, nos damos cuenta que la mejor herramienta para hacerlo y además llevarlo a un programa computacional es el método de elementos finitos el cual se comporta muy bien a la hora de realizar los problemas y llevarlos al algoritmo para su programación en algún lenguaje computacional cualquiera.

Para la solución de los elementos estructurales se utilizará la minimización de la energía potencial conllevando a un análisis elemento a elemento, lo cual traerá matrices de rigidez propias para cada división y luego se ensamblaran en la matriz global de rigidez brindando una manera de solución a los diferentes problemas.

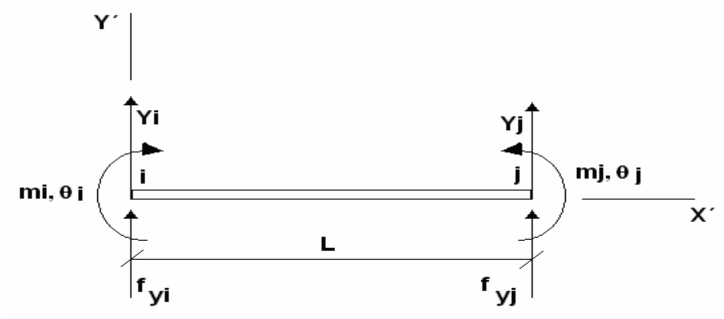
3.2. DEFINICIÓN DE VIGAS Y MARCOS

3.2.1 Viga. Se denomina viga a un elemento constructivo en el cual la longitud predomina sobre las otras dos dimensiones de la sección transversal y que trabaja principalmente a flexión, siendo un elemento estructural prismático largo y delgado que soporta cargas transversales aplicadas en diferentes puntos a lo largo de este. Estas cargas externas originan intermitentemente en la viga fuerzas cortantes, momentos flectores, deflexiones y pendientes. Las vigas pueden ser estáticamente determinadas o indeterminadas dependiendo de las restricciones en los soportes. La viga es un elemento bastante utilizado estructuralmente como por ejemplo en edificios, puentes y torres, además de muchas otras aplicaciones en la construcción de maquinas.

Las vigas se pueden construir en diversos materiales, de los materiales tradicionales el más idóneo históricamente ha sido la madera, puesto que puede soportar esfuerzos de tracción de cierta consideración que no pueden soportar otros materiales tradicionales de tipo cerámicos como el barro o el ladrillo. La madera sin embargo es material ortotrópico que presenta diferentes rigideces y resistencias según los esfuerzos aplicados sean paralelos a la fibra de la madera o transversales a la misma. Para aplicaciones más modernas, las vigas se empezaron a fabricar en acero. El acero es un material isótropo al que puede aplicarse directamente la teoría de vigas de Euler-Bernouilli. El acero tiene la ventaja de ser un material con una relación resistencia/peso inferior a la del hormigón, además de que puede resistir tanto tracciones como compresiones.

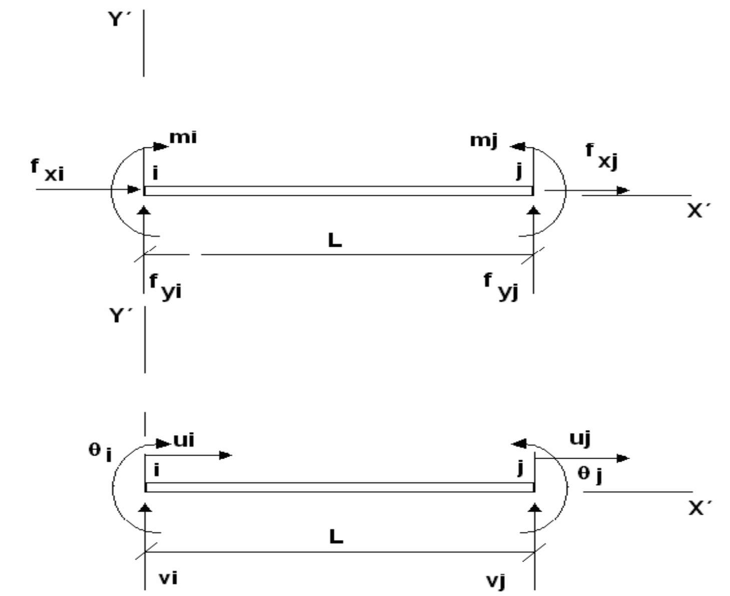
También modernamente a partir de la segunda mitad del siglo XIX en arquitectura, se ha venido usando hormigón armado y algo más tardíamente el pretensado y el postensado. Estos materiales requieren para su cálculo una teoría más compleja que la teoría de Euler-Bernouilli.

Figura 3.1 convención de signos para vigas



3.2.2 Marcos planos. Son elementos viga conectados rígidamente entre si, los elementos de un marco presentan comportamientos idénticos al de las vigas pero adicionando el efecto ocasionado por las cargas axiales y deformaciones axiales. Además el elemento de un marco tendrá diferente orientación.

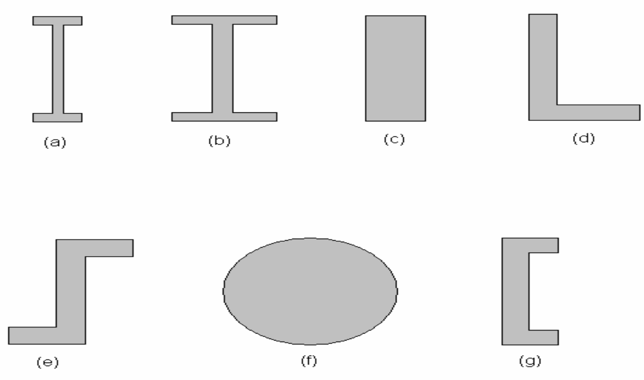
Figura 3.2 convención de signos para marcos



3.3. SECCIONES DE VIGAS Y MARCOS

En el mercado existen una variedad de secciones o perfiles estandarizados de elementos viga donde los estándares más comunes son el americano y el europeo. Ya que los marcos se conforman de elementos viga unidos rígidamente, estos entraran a formar parte de la clasificación de las secciones de vigas. Se pueden clasificar las vigas por medio de su sección transversal, lo cual es un factor muy importante a la hora del diseño, es un parámetro que viene representado en la teoría de diseño por medio del momento de inercia, en este caso será el momento de inercia respecto al eje x. Algunas secciones transversales más comunes son: sección transversal en I (figura 3.3a-b), sección cuadrada, sección rectangular (figura 3.3c), sección en ángulo (figura 3.3d), sección circular (figura 3.3f), sección en s (figura 3.3e) y sección en U (figura 3.3g). Además se puede construir vigas de cualquier sección transversal pero a la hora de los resultados en el diseño es mucho más factible y recomendado utilizar las secciones anteriormente citadas.

Figura 3.3 Secciones de elementos viga. (a) Sección en I normal. (b) Sección en I de ala ancha. (c) Sección rectangular. (d) Sección en ángulo. (e) Sección en S. (f) Sección elíptica. (g) Sección en U



En una viga de sección rectangular o circular las fibras situadas en las proximidades de la línea neutra, tendrán una tensión pequeña comparada con la tensión en la parte superior e inferior. Ya que el hecho de que gran parte de la sección este poco aprovechada la hace poco apropiada para trabajar a flexión. Por tanto las vigas donde se aprovecha más el momento de inercia y económicamente hablando son las más óptimas para trabajarlas serian las vigas con perfiles en I, las cuales se dividen en: sección en I normal (figura 3.3a) y sección en I de ala ancha (figura 3.3b).

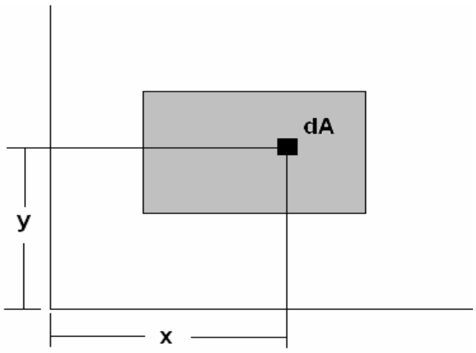
3.4. CONCEPTOS BÁSICOS EN EL DISEÑO DE VIGAS Y MARCOS

Como concepto importante se define el papel que juega el momento de inercia y el módulo de elasticidad en el diseño de elementos viga. Las cantidades llamadas momentos de inercia son de gran utilidad en muchos problemas de ingeniería, especialmente en los relacionados con la ingeniería estructural. Los momentos de inercia de áreas transversales se utilizan tanto en el estudio de fuerzas distribuidas como en el cálculo de las deflexiones en vigas el cual será el caso estudiado en este trabajo.

El momento de inercia se podrá definir entonces como la propiedad del área de una sección transversal que determina la resistencia a la flexión respecto a un eje particular. Los momentos de inercia de un área son integrales de área la cual variara según sea el eje a analizar, en este trabajo se utilizara el momento de inercia respecto al eje x, el cual esta definido por la expresión (3.1) y Representado en la figura 3.4, donde y es la ordenada del elemento diferencial.

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad \textbf{(3.1)}$$

Figura 3.4 Momento de inercia



La cantidad definida como módulo ó coeficiente de elasticidad recibe también el nombre de módulo de Young, siendo este valor una característica propia de cada material. Existen varios aspectos importantes en el diseño de vigas y marcos como lo son: la elección del material, la sección transversal del elemento y la predicción de la deflexión para el elemento a diseñar bajo unas cargas dadas.

En este trabajo se estudiaran elementos prismáticos donde su diseño dependerá del máximo momento flector y de las fuerzas cortantes. Hay que tener en cuenta que pueden haber tantos esfuerzos normales como cortantes, además dentro del limite elástico el esfuerzo normal varia linealmente con la distancia al eje neutro y es máximo en el punto mas alejado del eje, dependiendo también del momento máximo.

$$\sigma_m = \frac{|M|_{\max} c}{I} \quad \textbf{(3.2)}$$

σ_m = máximo valor absoluto del esfuerzo normal (3.2).

$|M|_{\max}$ = valor absoluto del momento flector máximo.

c = distancia *y* al eje neutro (distancia del eje neutro a la fibra exterior).

I = momento de inercia

Este esfuerzo normal podrá ser de tensión o de compresión según sea el caso.
El esfuerzo cortante es máximo en el eje neutro (3.3).

$$\tau_m = \frac{|V|_{\max} Q}{It} \qquad \textbf{(3.3)}$$

$|V|_{\max}$ = valor absoluto del esfuerzo cortante máximo.

Q = primer momento con respecto al eje de la porción de la sección situada respecto al eje neutro.

I = momento de inercia.

t = el ancho de la sección transversal en el eje neutro.

El diseño de estos elementos prismáticos generalmente se realizan siguiendo básicamente el valor absoluto del máximo momento flector, lo que es la elección del material, forma y las dimensiones de la sección transversal constante se hacen dependiendo del valor máximo del esfuerzo normal, teniendo en cuenta que valor no exceda el esfuerzo normal admisible, el cual es basado en datos obtenidos en pruebas de tensión en laboratorio.

3.5 DIFERENTES MÉTODOS DE CÁLCULO PARA LA SOLUCIÓN DE ELEMENTOS VIGA

Existen varios métodos para calcular las deformaciones y las pendientes en vigas, donde la aplicación de estos se realiza según las características del elemento, tipo de viga y forma de aplicación de las cargas. Algunos de estos métodos son:

3.5.1 Método de la elástica o de la doble integración. Se determina la ecuación de la elástica (ecuación de la curva que forma el elemento luego de deformarse bajo la acción de las cargas aplicadas). En este método se realizan cortes para conseguir una serie de ecuaciones de momentos, validas en los rangos de corte. Después de tener las ecuaciones de momentos se realizan una serie de integraciones logrando así las ecuaciones para la pendiente y la deflexión a lo largo de los cortes hechos en un principio.

En base a este método se presenta una generalización de ecuaciones denominada funciones de singularidad, disminuyendo los cálculos logrando una sola ecuación de momento la cual es integrada hasta conseguir una ecuación para la pendiente y otra para la deflexión a lo largo de todo el elemento viga.

3.5.2 Método de área-momento. Este método es grafico y se pueden calcular las pendientes y deflexiones en cualquier punto, a diferencia con el anterior aquí para cada punto hay que realizar un cálculo diferente, mientras que por funciones singulares solo se reemplaza en la ecuación algún punto a lo largo del elemento. Además con este método se pueden calcular vigas hiperestaticas y con rigidez flexional variable.

El método esta basado en dos teoremas denominados: primer y segundo teorema de área-momento, el primero sirve para hallar la variación de la pendiente entre dos puntos cualesquiera y con el segundo teorema se puede determinar la desviación de la tangente a la elástica entre dos puntos. Como es un método grafico es necesario construir una exageración de la curva elástica del elemento y un diagrama $\frac{M}{EI}$ a lo largo de la viga con un punto de empotramiento según sea el caso.

3.5.3 Método de la ecuación de tres momentos. Este método es muy útil a la hora de resolver vigas hiperestaticas, pero solo se pueden calcular deflexiones por medio de este recurso. El método es basado en la relación de los momentos internos en tres puntos a lo largo del elemento viga.

3.5.4 Método energético basado en el teorema de castigliano. Este método es uno de los más completos pues con esta herramienta se pueden realizar análisis a muchas estructuras y elementos. El método consiste en determinar la energía elástica almacenada y luego se aplica el teorema de castigliano, determinando así las deflexiones requeridas. Teorema de castigliano: la derivada parcial de la energía elástica total almacenada en un sistema, con respecto a una carga externa, es igual a la deflexión ya sea angular o lineal del punto de aplicación de la carga externa y en la dirección de esta.

4. ELEMENTOS FINITOS

4.1. ACERCA DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El método de elementos finitos fue propuesto primero en 1943, pero no fue hasta 1956 que se presentan los primeros resultados obtenidos mediante este método y en 1960 se le llamo al método como se le conoce ahora. A través de este lapso de tiempo se presentaron una serie de acontecimientos que aportaron significativamente al desarrollo y optimización del método y gracias a los adelantos tecnológicos el método se pudo implementar poco a poco al análisis computacional, llegando al punto de que la gran mayoría de paquetes computacionales para solución de los diferentes problemas de ingeniería cuentan con este método implícito en su código fuente.

En los años cincuenta se da inicio formal al desarrollo de las estructuras mediante el análisis de vigas continuas, posteriormente se utiliza la energía interna para la solución de estructuras cargadas, además se presentan aplicaciones a estructuras con métodos matriciales de rigidez, dando origen al método.

En los años sesenta debido al progreso que se tenía con este tipo de análisis, surge su nombre Método de elementos finitos. El método de elementos finitos se fue volviendo una herramienta indispensable en varias ramas de la ingeniería, que con el tiempo tuvo un constante evolución mas aun con la llegada de los PC, los cuales popularizaron mas este método, pues mediante el software realizado se pudo lograr una cantidad de avances significativos en el ahorro y diseño de estructuras y elementos que antes era imposible lograr.

Algunos de los precursores del método fueron: Turner, Clough, Martin, Topp, Wilson, Zienkiewics y Gallagher. Quienes gracias a sus estudios y análisis de diferentes aplicaciones del método aportaron significativamente a su desarrollo. En Colombia se han desarrollado diferentes ensayos estructurales por medio de los elementos finitos, entre los cuales sobresale el análisis del colapso del puente sobre el río Samaná en 1993 en la carretera Bogota-Medellín, el estudio pertinente su análisis y las posteriores conclusiones del colapso fueron realizados por la universidad Nacional.

En la actualidad el método es empleado en una gran cantidad de programas y textos, permitiendo una fácil consecución y aprendizaje, con lo cual se convierte en una herramienta óptima para los ingenieros. El concepto básico de este método es el de dividir el continuo en un numero finito de elementos (de allí su nombre), es decir discretizar el continuo y resolver sobre cada uno de los elementos las ecuaciones del sistema para después ensamblar la solución total. Para construir un modelo numérico se definen un número finito de puntos, los cuales podrán estar unidos después por líneas para formar superficies y sólidos y de esta manera la geometría a estudiar. Estos puntos son llamados nodos y se encuentran ubicados en las fronteras de los elementos formados por la discretización del continuo, además son los responsables de mantener la continuidad al mantener unidos los elementos. Las ecuaciones aritméticas que reemplazan a las ecuaciones diferenciales que gobiernan al sistema estudiado se conocen como ecuaciones de discretización. Para llegar a ellas se utilizan diversas técnicas matemáticas, las más comunes son: aproximación directa, **método variacional**, método de residuos ponderados (método de Galerkin), series de Taylor y balance de energía.

Ventajas del método:

- Se puede aplicar a cuerpos compuestos de varios materiales.

- Formas irregulares en la frontera pueden aproximadas usando elementos con lados rectos o exactamente usando lados curvos.

- El tamaño de los elementos puede variar.

- El método utiliza una formulación integral para generar un sistema de ecuaciones algebraicas.

4.2 CONCEPTOS BÁSICOS DE ELEMENTOS FINITOS

Los métodos clásicos de análisis estructural desarrollado a fines del siglo XIX, tienen las cualidades de la generalidad, simplicidad lógica y elegancia matemática. Desgraciadamente, conducían a menudo a cálculos muy laboriosos cuando se los aplicaba en casos prácticos, y en aquella época, esto era un gran defecto. Por esta razón sucesivas generaciones de ingenieros se dedicaron a tratar de reducir el conjunto de cálculos. Muchas técnicas ingeniosas de gran valor práctico fueron apareciendo, pero la mayoría de las mismas eran aplicables sólo a determinados tipos de estructuras.

La principal objeción a los primeros métodos de análisis fue que los mismos conducían a sistemas con un gran número de ecuaciones lineales, difíciles de resolver manualmente. Con los computadores, capaces de realizar el trabajo numérico, esta objeción no tiene ahora sentido, mientras que la generalidad de los métodos permanece. El empleo de la notación matricial presenta dos ventajas en el cálculo de estructuras. Desde el punto de vista teórico, permite utilizar métodos de cálculo en forma compacta, precisa y, al mismo tiempo, completamente general. Esto facilita el tratamiento de la teoría de estructuras como unidad, sin que los principios fundamentales se vean oscurecidos por operaciones de cálculo, por un lado, o diferencias físicas entre estructuras, por otro. Desde el punto de vista práctico, proporciona un sistema apropiado de análisis de estructuras y determina una base muy conveniente para el desarrollo de programas de computación. En contraste con estas ventajas, debe admitirse que los métodos matriciales se caracterizan por una gran cantidad de cálculo sistemático. Las virtudes del cálculo con computadora radican en la eliminación del la preocupación por las operaciones rutinarias, el ingenio necesario para preparar el modelo con que se pretende representar la realidad y el análisis crítico de los resultados.

Con el método se solucionan ecuaciones diferenciales en diferentes campos de la ingeniería, consiste en dividir el elemento a analizar en subelementos, nombrando los puntos de conexión de estos subelementos como nodos o puntos nodales. Estos elementos y nodos son numerados o nombrados con lo cual se modela la región analizada (discretizar la región). Cabe anotar que los elementos pueden ser de cualquier tipo, para este trabajo los elementos serán de tipo lineal continuos analizados bidimensionalmente. A cada elemento es asignada una función de aproximación polinomial, después es ensamblado el elemento general y como resultado se obtendrá una buena aproximación a la solución general del elemento.

Para obtener la solución numérica a la ecuación diferencial obtenida en el análisis del los elementos se utilizara en este trabajo el método de las funciones variacionales o método variacional, el cual es la base para muchas formulaciones de elementos finitos, en donde el campo de aproximación se define por tramos. El calculo variacional tiene que ver con el encuentro de valores estacionarios de funcionales. Una funcional es una integral, la cual tiene un valor específico numérico para cada función que es sustituida dentro de la integral. Implícitamente esta funcional contiene las ecuaciones diferenciales que describen el problema.

La funcional posee la propiedad que cualquier función, la cual la hace mínima, también satisface la ecuación diferencial gobernante y las condiciones de frontera.

En la derivación de ecuaciones para el FEM, se debe minimizar una cantidad integral que relacione el proceso físico bajo consideración. En problemas de mecánica de sólidos **la energía potencial del sistema es minimizada**. La formulación de los elementos finitos comienza por asumir un campo de desplazamiento y luego se minimiza la energía potencial total para obtener los valores nodales de los desplazamientos. Una vez que los desplazamientos sean conocidos, podemos determinar las deformaciones y los esfuerzos.

El teorema de la energía potencial se enuncia así: "de todos los desplazamientos que satisfacen las condiciones de frontera, estos que satisfacen las condiciones de equilibrio son identificados como valores estacionarios de la energía potencial".

El requerimiento importante está en que las ecuaciones de desplazamiento seleccionadas deben satisfacer las condiciones de frontera de los desplazamientos.

La energía potencial total de un sistema elástico puede ser separada en dos componentes. Una componente resultante de la energía interna de deformación en el cuerpo y la otra es el trabajo de las cargas aplicadas. La energía potencial m total puede ser escrita así:

$$\forall_p = U_i - W \qquad \textbf{(4.1)}$$

Donde U_i es la energía interna de deformación y W es el trabajo realizado por las cargas externas.

Otra forma de expresar la ecuación (4.1) seria:

$$\lfloor \forall_p \rfloor = [U_i] - [U_B] - [U_S] - \lfloor U_f \rfloor \qquad \textbf{(4.2)}$$

Donde U_B, U_S y U_f son las energías originadas por las fuerzas de cuerpo (másica), superficie (distribuidas) y concentradas actuando sobre el cuerpo.

Como la región se dividió en un número finito de elementos, la ecuación se puede escribir en la forma:

$$\forall_p = \sum_{e=1}^{n} \forall_p^e \tag{4.3}$$

La variación de la energía potencial total es cero, entonces:

$$\delta\left[\forall_p\right] = \delta\left[\sum_{e=1}^{n} \forall_p^e\right] = 0 \tag{4.4}$$

Esta ecuación expresa la variación de la energía potencial con respecto a un desplazamiento nodal que debe ser igual a cero. Esto permite obtener un conjunto de ecuaciones algebraicas que pueden ser solucionadas para determinar los desplazamientos nodales.

Para obtener una solución mediante el método de elementos finitos se siguen los siguientes pasos:

1. Discretización de la región: Identificación de los elementos y puntos nodales aconsejables para modelar el sistema físico.

2. Determinar la función para cada elemento: puede ser una función lineal o cuadrática. Estas ecuaciones deben ser escritas en términos de los valores nodales desconocidos. Una función lineal diferente puede ser usada para cada

elemento, pero debe mantenerse la continuidad entre ellos a lo largo de las fronteras.

3. Análisis de los elementos finitos: se desarrolla un sistema de ecuaciones, las cuales quedan en función de los valores nodales desconocidos, el cual se puede obtener a través del método de los pesos residuales, el método variacional o la formulación de la energía potencial.

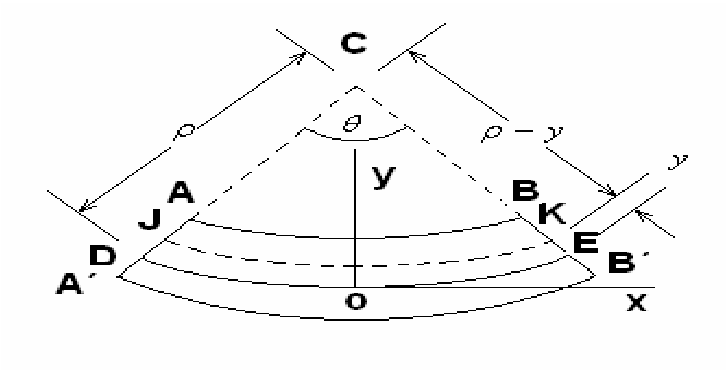
4. Solución del sistema de ecuaciones: la solución se da obteniendo los valores nodales de desplazamiento.

5. Cálculo de las cantidades de interés: estas pueden ser las deformaciones y esfuerzos en problemas de la mecánica de sólidos.

4.3 ANÁLISIS POR ELEMENTOS FINITOS DE VIGAS Y MARCOS PLANOS

4.3.1 Demostración de las ecuaciones fundamentales de flexión.

Figura 4.1 Elemento viga flexionado



Siendo ρ el radio del arco formado por la viga flectada, y θ el ángulo, observar figura 4.1. Sabiendo que la longitud L es correspondiente a DE, ya que en todos los casos se supondrá que las deformaciones son muy pequeñas por lo que no hay diferencia apreciable entre la longitud inicial de la viga y la longitud final luego de haber sido deformada, con lo cual queda claro que las deformaciones se dan dentro de los limites del comportamiento elástico del material.

$$L = \rho\theta \qquad \textbf{(4.5)}$$

Se tiene otro arco JK, localizado a una distancia y por encima del eje neutro del elemento viga flectado, el cual tendrá una longitud L'.

$$L' = (\rho - y)\theta \qquad \textbf{(4.6)}$$

Ya que la longitud original de JK era L y esta se deformó entonces esta deformación estará dada por la expresión:

$$\delta = L' - L$$

$$\delta = (\rho - y)\theta - \rho\theta = -y\theta \qquad \textbf{(4.7)}$$

Se divide esta deformación entre L y se encuentra la deformación lineal ε_x.

$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{L} = \frac{-y\theta}{\rho\theta}$$

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} \qquad \textbf{(4.8)}$$

La deformación lineal varía linealmente respecto a la distancia y desde la superficie neutra. Como se observa en la sección transversal del elemento viga, la deformación lineal alcanza su máximo valor cuando la distancia y es máxima, tomando en este caso la nueva descripción c.

El máximo valor absoluto de esta deformación lineal es llamado ε_m, el cual puede corresponder a la parte superior respecto al eje neutro del elemento o a la parte inferior respecto al mismo.

$$\varepsilon_m = \frac{c}{\rho} \tag{4.9}$$

Reemplazando se obtiene una nueva expresión para la deformación longitudinal del elemento.

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{c}\varepsilon_m \tag{4.10}$$

Se aplica la ley de Hooke para el esfuerzo uniaxial mediante la ecuación (1.2), suponiendo claro que el material es homogéneo, como se supuso anteriormente.

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

$$E\varepsilon_x = -\frac{y}{c}\left(E\varepsilon_m\right)$$

$$\sigma_x = -\frac{y}{c}\sigma_m \tag{4.11}$$

Siendo σ_m el valor máximo del esfuerzo, hasta aquí no se conoce la localización del eje neutro, por tanto se utilizaran la siguiente ecuación deducidas en la estática.

$$\int \sigma_x dA$$

$$\int \sigma_x dA = \int \left(-\frac{y}{c} \sigma_m \right) dA = -\frac{\sigma_m}{c} \int y dA \qquad \textbf{(4.12)}$$

$\int y dA = 0$, si un elemento se somete a flexión pura con sus esfuerzos dentro del rango elástico, su eje neutro pasará por el centroide de la sección transversal del elemento viga. El eje z debe coincidir con el eje neutro de la sección transversal, empleando la ecuación de estática para el eje z se obtiene:

$$\int -\left(y \sigma_x dA \right) = M \qquad \textbf{(4.13)}$$

$$\int (-y) \left(-\frac{y}{c} \sigma_m \right) dA = M$$

$$\frac{\sigma_m}{c} \int y^2 dA = M \qquad \textbf{(4.14)}$$

Recordando que el momento de inercia en x es equivalente a la ecuación (3.1):

$$\int y^2 dA$$

Se obtienen entonces las ecuaciones de flexión elástica y esfuerzo normal causado por la flexión del elemento viga.

$$\sigma_m = \frac{Mc}{I} \tag{4.15}$$

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{4.16}$$

La deformación del elemento causada por momento flector M se mide por la curvatura de la superficie neutra dada por:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{4.17}$$

Si el momento flector M es constante, la curvatura de la viga también lo es, si el momento flector varia con la distancia x, también variara la curvatura de la línea neutra.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{(x)}}{EI} \tag{4.18}$$

Donde $M_{(x)}$ es la función momento a cualquier distancia x desde el extremo izquierdo de la viga, donde se supone el origen de las coordenadas. Entonces la curvatura de una curva estará dada por la expresión siguiente:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \tag{4.19}$$

Como la pendiente $\frac{dy}{dx}$ de la elástica es muy pequeña por tanto la cantidad $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ será una cantidad despreciable entonces la ecuación tendrá la siguiente forma:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2} \qquad \textbf{(4.20)}$$

Entonces realizando los respectivos reemplazos se tendrá:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_{(x)}}{EI} \qquad \textbf{(4.21)}$$

La expresión (4.21) es una ecuación diferencial lineal ordinaria, de segundo orden, que representará la ecuación de la curva elástica. Integrando la anterior ecuación, teniendo en cuenta que el modulo o coeficiente de elasticidad y el momento de inercia son valores constantes, se obtiene:

$$EI\frac{dy}{dx} = \int M_{(x)} dx + C_1 \qquad \textbf{(4.22)}$$

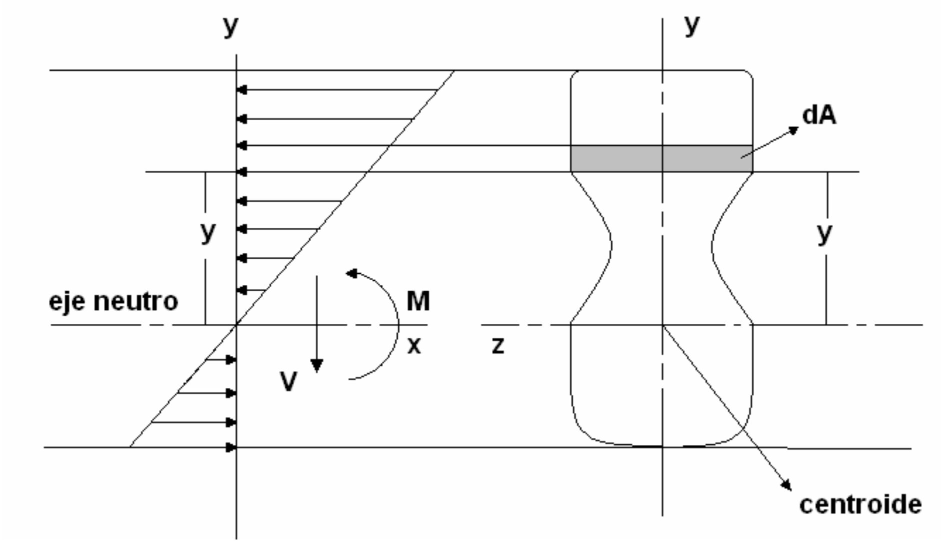
La cual representaría la pendiente a lo largo del elemento viga ($EI\theta$). Integrando nuevamente se obtiene la ecuación de la deflexión a lo largo del elemento.

$$EIy = \int dx \int M_{(x)} dx + C_1 x + C_2 \qquad \textbf{(4.23)}$$

Donde C_1 y C_2 son constantes de integración, las cuales son evaluadas según las condiciones de contorno o de frontera del elemento viga.

4.3.2 Solución matemática del método de elementos finitos por medio de la minimización de la energía potencial del elemento viga.

Figura 4.2 sección transversal de una viga con la distribución de esfuerzo por flexión.



Para las deflexiones pequeñas se utiliza la teoría fundamental de vigas.

$$\sigma = -\frac{M}{I}y$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\mathrm{E}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{\mathrm{E}I}$$

Donde M es el momento flector y, y es la deflexión del eje centroidal.

Por medio del método de la minimización de la energía potencial se tendrá: la energía de deformación interna du en un elemento de longitud dx.

$$u = \frac{1}{2} \int_{V} \sigma\varepsilon \ dV \qquad \textbf{(4.24)}$$

$$du = \frac{1}{2} \int_{A} \sigma\varepsilon \ dAdx \qquad \textbf{(4.25)}$$

Se realizan los reemplazos correspondientes a la teoría fundamental de vigas, en la ecuación (4.25).

$$du = \frac{1}{2} \int_{A} \frac{M^{2} y^{2}}{I^{2}\mathrm{E}} dAdx \ = \frac{1}{2} \ \frac{M^{2}}{\mathrm{E}\, I^{2}} \int_{A} y^{2} dAdx \qquad \textbf{(4.26)}$$

Donde $\int_{A} y^{2} dA$ es el momento de inercia respecto al eje x, se realiza el debido reemplazo en (4.26).

$$du = \frac{1}{2} \frac{M^{2}}{\mathrm{E}I} dx$$

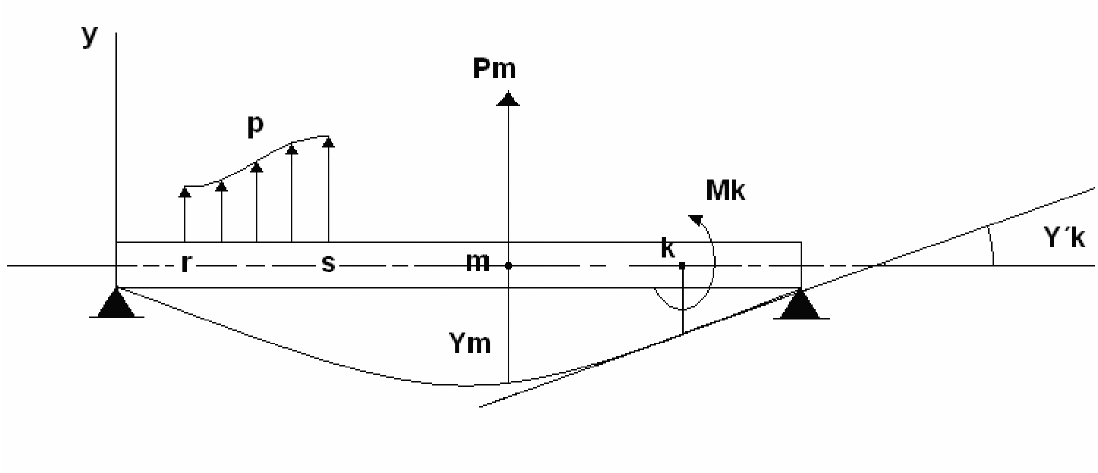
$$u = \frac{1}{2} \int_{0}^{L} \mathrm{E}I \left(\frac{d^{2} y}{dx^{2}} \right)^{2} dx \qquad \textbf{(4.27)}$$

La cual representa la energía de deformación en la viga (4.27).

A continuación se desarrollará el trabajo externo de la viga, compuesto por el trabajo de cargas distribuidas, el trabajo de una fuerza concentrada y el trabajo debido a un momento.

Se seguirá la convención mostrada en la figura 4.3.

Figura 4.3 Elemento viga flexionado sometido a diferentes cargas



Trabajo de cargas distribuidas:

$$W_p = \int_r^s pydx \qquad \textbf{(4.28)}$$

Donde p es la carga distribuida por unidad de longitud.

Trabajo de una fuerza concentrada:

$$W_c = \sum_m P_m y_m \qquad \textbf{(4.29)}$$

Donde p_m es una carga puntual concentrada en un punto cualquiera de la viga y y_m será la deflexión en el punto m.

Trabajo debido a un momento:

$$W_m = \sum_k M_k y'_k \qquad \textbf{(4.30)}$$

Donde M_k es el momento aplicado en un punto cualquiera k a lo largo L de la viga, y y'_k será la pendiente evaluada en el punto k definida por (4.31).

$$y'_k = \frac{dy(k)}{dx} \qquad \textbf{(4.31)}$$

Ya que la energía potencial de un elemento viga esta dada por la expresión (4.32).

$$\forall_P = U - W_p \qquad \textbf{(4.32)}$$

Teniendo ya las expresiones para la energía de deformación y las de trabajo externo se reemplazan en la ecuación (4.32).

$$\forall_P = \frac{1}{2}\int_0^L \mathrm{E}I\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 dx \ - \int_r^s pydx \ - \sum_m p_m y_m - \sum_k M_k y'_k \qquad \textbf{(4.33)}$$

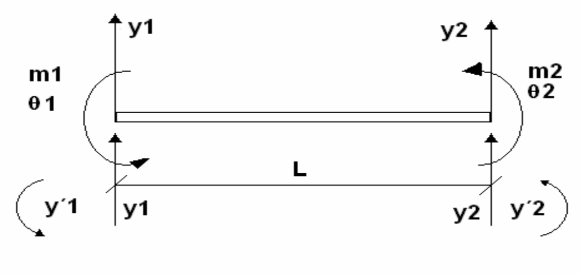
A continuación se realizara el análisis mediante el método de elementos finitos donde se tendrá en cuenta que cada nodo tiene dos grados de libertad, por lo tanto cada elemento tendrá cuatro grados de libertad.

Cada elemento se analizara con dos desplazamientos y dos pendientes, el respectivo análisis se realizara por cada elemento donde los grados de libertad locales estarán representados por:

$$r = [y_1, \theta_1, y_2, \theta_2]^T = [r_1, r_2, r_3, r_4]^T \qquad \textbf{(4.34)}$$

Se define unas convenciones ya antes mencionadas y una nomenclatura con una correspondencia en un sistema coordenado local.

Figura 4.4 Convención de signos para elemento finito viga



Se definirán funciones de forma para interpolar el desplazamiento vertical o transversal (y). Las funciones a utilizar serán las funciones de forma de Hermite definidas en términos de ς de -1 a +1, cada una de las funciones de forma son polinomios de grado 3 para satisfacer los cuatro grados de libertad del elemento a analizar.

$$H_i = a_i + b_i\varsigma + c_i\varsigma^2 + d_i\varsigma^3 \text{, con } i = 1, 2, 3, 4 \quad \textbf{(4.35)}$$

Se deberá satisfacer las condiciones de la siguiente tabla.

Tabla 4.1 Condiciones de polinomios de Hermite

	H_1	H'_1	H_2	H'_2	H_3	H'_3	H_4	H'_4
ς=-1	1	0	0	1	0	0	0	0
ς=+1	0	0	0	0	1	0	0	1

Se obtienen los coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i con las condiciones anteriores (figura 3.7), y se obtienen los valores de *H1, H2, H3, y H4* en función de ς.

$$H_1 = \frac{1}{4}(1-\varsigma)^2(2+\varsigma) \qquad \textbf{(4.36)}$$

$$H_2 = \frac{1}{4}(1-\varsigma)^2(\varsigma+1) \qquad \textbf{(4.37)}$$

$$H_3 = \frac{1}{4}(1+\varsigma)^2(2-\varsigma) \qquad \textbf{(4.38)}$$

$$H_4 = \frac{1}{4}(1+\varsigma)^2(\varsigma-1) \qquad \textbf{(4.39)}$$

Con estas funciones se obtiene la ecuación de desplazamiento $y(\varsigma)$, enunciada a continuación.

$$y(\varsigma) = H_1 y_1 + H_2\left(\frac{dy}{d\varsigma}\right)_1 + H_3 y_2 + H_4\left(\frac{dy}{d\varsigma}\right)_2 \qquad \textbf{(4.40)}$$

Se realiza la debida transformación de las coordenadas mediante la siguiente relación.

$$x = \frac{1-\varsigma}{2}x_1 + \frac{1+\varsigma}{2}x_2 = \frac{x_1+x_2}{2} + \frac{x_2-x_1}{2}\varsigma$$

$l = x_2 - x_1$, donde l es la longitud del elemento analizado, por tanto la anterior expresión quedara así:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{l}{2}\varsigma \qquad \textbf{(4.41)}$$

Se derivan las variables dando como resultado la expresión (4.42).

$$dx = \frac{l}{2}d\varsigma$$

$$\frac{dx}{d\varsigma} = \frac{l}{2} \qquad \textbf{(4.42)}$$

Por medio de la regla de la cadena se halla la ecuación (4.43).

$$\frac{dy}{d\varsigma} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\varsigma}$$

$$\frac{dy}{d\varsigma} = \frac{l}{2}\frac{dy}{dx} \qquad \textbf{(4.43)}$$

Se obtendrá una expresión mas simplificada que la ecuación de desplazamiento en función de ς citada anteriormente. Ecuación (4.40).

$$y(\varsigma) = H_1 y_1 + \frac{l}{2}H_2\theta_1 + H_3 y_2 + \frac{l}{2}H_4\theta_2 \qquad \textbf{(4.44)}$$

Se observa que la ecuación (4.44) es una multiplicación entre las expresiones: (4.36), (4.37), (4.38), (4.39) y (4.34).

$$y = Hr \qquad \textbf{(4.45)}$$

Ahora se realiza el reemplazo en la deformación interna de la viga, expresión (4.27).

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{l}\frac{dy}{d\varsigma} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4}{l^2}\frac{d^2y}{d\varsigma^2} \tag{4.46}$$

Con la ecuación anterior (4.46) se hacen los reemplazos respectivos en (4.27) teniéndose como resultado (4.48).

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 = r^T\frac{16}{l^4}\left(\frac{d^2H}{d\varsigma^2}\right)^T\left(\frac{d^2H}{d\varsigma^2}\right)r \tag{4.47}$$

$$\left(\frac{d^2H}{d\varsigma^2}\right)^2=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\varsigma & \frac{-1+3\varsigma}{2}\frac{l}{2} & \frac{-3}{2}\varsigma & \frac{1+3\varsigma}{2}\frac{l}{2}\end{bmatrix} \tag{4.48}$$

Se sustituyen las debidas ecuaciones en la ecuación de desplazamiento interno, donde es evaluada la integral desde -1 hasta +1 ya que la variable integrada es las ς.

Figura 4.5 Energía de deformación unitaria

$$u=\frac{1}{2}r^T\frac{8\mathrm{E}I}{l^3}\int_{-1}^{+1}\begin{bmatrix}\frac{9}{4}\varsigma^2 & \frac{3}{8}\varsigma(-1+3\varsigma)l & \frac{-9}{4}\varsigma^2 & \frac{3}{8}\varsigma(1+3\varsigma)l\\ \frac{3}{8}\varsigma(-1+3\varsigma)l & \left(\frac{-1+3\varsigma}{4}\right)^2l^2 & \frac{-3}{8}\varsigma(-1+3\varsigma)l & \frac{-1+9\varsigma^2}{16}l^2\\ \frac{-9}{4}\varsigma^2 & \frac{-3}{8}\varsigma(-1+3\varsigma)l & \frac{9}{4}\varsigma^2 & \frac{-3}{8}\varsigma(1+3\varsigma)l\\ \frac{3}{8}\varsigma(1+3\varsigma)l & \frac{-1+9\varsigma^2}{16}l^2 & \frac{-3}{8}\varsigma(1+3\varsigma)l & \left(\frac{1+3\varsigma}{4}\right)^2l^2\end{bmatrix}d\varsigma r$$

Entonces obtenemos finalmente la energía de deformación unitaria del elemento dada matricialmente (ver figura 4.6).

$$u = \frac{1}{2} r^T K^e r \qquad \textbf{(4.49)}$$

Se puede observar la energía de deformación unitaria en forma simplificada en la expresión (4.49), donde K^e es la llamada matriz de rigidez del elemento analizado, la cual es simétrica, con las siguientes constantes y variables, como se puede observar las variables serian: El modulo o coeficiente de elasticidad E, el momento de inercia respecto al eje x de la sección transversal del elemento I, y finalmente la longitud de cada elemento de nodo a nodo l.

Figura 4.6 Matriz de rigidez

$$K^e = \frac{\mathrm{E}I}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

A continuación se realizará el respectivo análisis al trabajo externo del elemento.

$$\int_l py\,dx = \left(Z \int_{-1}^{+1} H\,d\varsigma \right) r \qquad \textbf{(4.50)}$$

Siendo Z la correspondiente carga nodal según sea el caso utilizando mediante el método extremo fijo-fijo antes citado en este texto.

$$\int_l pydx = F^T r \qquad \textbf{(4.51)}$$

Donde,

$$F = \begin{bmatrix} A_y & M_a & B_y & M_b \end{bmatrix}^T \qquad \textbf{(4.52)}$$

En esta expresión (4.52) definida como matriz de cargas y momentos equivalentes, se tendrá en cuenta el signo comparando la convención antes tomada y la convención del método extremo fijo-fijo.

La energía potencial del elemento estará dada por la expresión:

$$\forall_p = \frac{1}{2} r^T K^e r - F^T r \qquad \textbf{(4.53)}$$

$$F = Kr \qquad \textbf{(4.54)}$$

Ahora se solucionan las cargas de equilibrio o reacciones en los extremos y los momentos del elemento mediante las ecuaciones de momento flector y fuerza cortante.

$$M = \frac{\mathrm{E}I}{l^2} \frac{d^2 y}{dx^2} \qquad \textbf{(4.55)}$$

$$V = \frac{dM}{dx} \qquad \textbf{(4.56)}$$

$$M = \frac{\mathrm{E}I}{l^2}\left(6\varsigma y_1 + (3\varsigma - 1)l\theta_1 - 6\varsigma y_2 + (3\varsigma + 1)l\theta_2\right) \qquad \textbf{(4.57)}$$

$$V=\frac{6\mathrm{E}I}{l^{3}}\left(2y_{1}+l\theta_{1}-2y_{2}+l\theta_{2}\right) \quad \textbf{(4.58)}$$

Matricialmente el conjunto de ecuaciones quedara de la siguiente manera:

Figura 4.7 Matriz solución de cada elemento

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \frac{\mathrm{E}I}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_y \\ M_a \\ B_y \\ M_b \end{bmatrix}$$

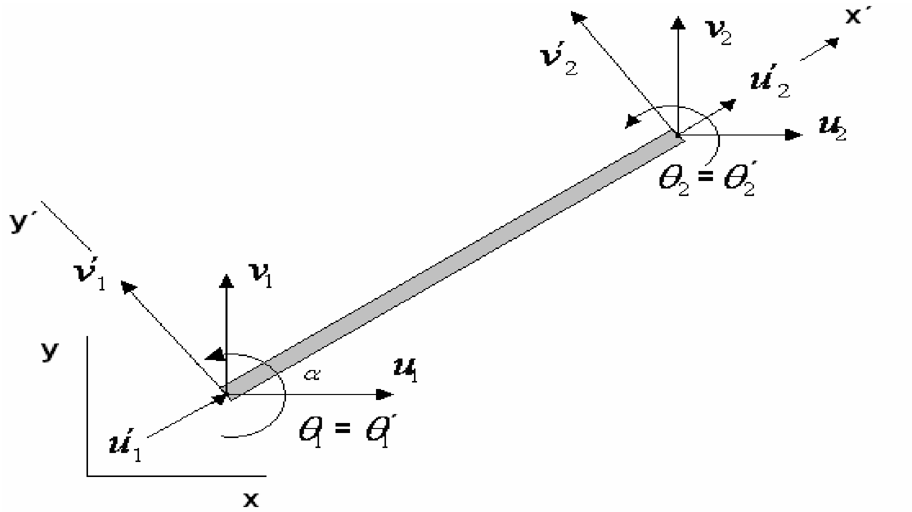
Lo cual matricialmente se refiere a:

$$N = K^{e} r^{T} + F^{T} \quad \textbf{(4.59)}$$

4.3.3 Solución matemática del método de elementos finitos por medio de la minimización de la energía potencial de marcos planos. Esencialmente los marcos planos son uniones rígidas de elemento viga, por tanto dará una combinación del elemento anteriormente analizado y el caso unidimensional. Entonces se obtendrán cargas axiales y deformaciones axiales, teniendo en cuenta que los elementos tienen diferente orientación.

$$d=\left[u_{1} \quad v_{1} \quad \theta_{1} \quad u_{2} \quad v_{2} \quad \theta_{2}\right]^{T} \quad \textbf{(4.60)}$$

Figura 4.8 orientación de un elemento marco



$$d' = \begin{bmatrix} u'_1 & v'_1 & \theta'_1 & u'_2 & v'_2 & \theta'_2 \end{bmatrix}^T \qquad \textbf{(4.61)}$$

d' es un vector de desplazamiento en el sistema local del cuerpo donde $\theta_1 = \theta'_1$ y $\theta_2 = \theta'_2$ luego se realiza una transformación local global para hallar así la matriz de rigidez del elemento mediante una matriz *L* de transformación, allí se encontraran los coeficientes l y m, donde $l = \cos\alpha$ y $m = sen\alpha$ siendo α el ángulo formado entre el eje neutro del elemento y el eje x del sistema.

Figura 4.9 Matriz de transformación

$$L = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mediante el concepto que u'_1 y u'_2 representan los desplazamientos en una barra unidimensional y el resto de los coeficientes representan los grados de libertad se obtiene la matriz de rigidez, la cual es una combinación de la matriz de un elemento viga y la matriz de rigidez de un elemento unidimensional.

Figura 4.10 Matriz de rigidez.

$$K'^{e} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 & 0 & -e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & e_3 & 0 & -e_2 & e_3 \\ 0 & e_3 & 2e_4 & 0 & -e_3 & e_4 \\ -e_1 & 0 & 0 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & -e_2 & -e_3 & 0 & e_2 & -e_3 \\ 0 & e_3 & e_4 & 0 & -e_3 & 2e_4 \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \frac{A\mathrm{E}}{L},\ e_2 = \frac{12\mathrm{E}I}{L^3},\ e_3 = \frac{6\mathrm{E}I}{L^2},\ e_4 = \frac{2\mathrm{E}I}{L} \quad \textbf{(4.62)}$$

Comparando la energía de deformación unitaria del elemento con su trabajo interno en coordenadas local- global, se saca el resultado de la matriz de rigidez la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales.

$$K^{me} = L^T K'^e L \quad \textbf{(4.63)}$$

Al aplicar carga e implementar el método de desarrollo extremo fijo-fijo se encuentra:

$$f = L^T f' \quad \textbf{(4.64)}$$

Obteniéndose el sistema de ecuaciones de la forma:

$$F = KD \tag{4.65}$$

5. PROGRAMA COMPUTACIONAL

5.1 EL PROGRAMA MATLAB

Matlab es el nombre abreviado de “Matrix Laboratory”. Es un programa para realizar cálculos numéricos con vectores y matrices con una gran cantidad de opciones y facilidades que permiten un buen desarrollo del trabajo allí realizado. Es un entorno matemático orientado a la computación, este entorno permite la solución de problemas sencillos mediante el uso de los potentes comandos que incorpora sin tener conocimientos demasiado amplios de programación de computadores. Además incorpora un lenguaje de programación que permite implementar programas complejos de modo relativamente simple. Otro de los campos donde brilla Matlab es en la representación visual de resultados. Puede también trabajar con números escalares, tanto reales como complejos, con cadenas de caracteres simples y con estructuras más complejas.

Matlab es una magnífica herramienta de alto nivel para desarrollar aplicaciones técnicas, fácil de utilizar, aumentando significativamente la productividad de los programadores respecto a otros entornos de desarrollo. Matlab realiza una gran variedad de gráficos en dos y tres dimensiones lo que lo hace aun más especial y completo. Tiene también un lenguaje de programación propio por medio del cual se desarrollará el actual proyecto.

Matlab por lo general se comporta un poco lento respecto a la equivalencia del código fuente en otros lenguajes de programación como C/C++ o Fortran sin desmeritar con esto que sea una gran herramienta de cálculo técnico y científico. Para algunas operaciones es muy rápido, cuando puede ejecutar sus funciones en código nativo con los tamaños más adecuados aprovechando sus capacidades de vectorización.

Matlab dispone de un código básico y de varias librerías especializadas compuestas de algoritmos computacionales importantes y comúnmente utilizados para la creación de software de ingeniería que van desde comandos sencillos hasta funciones complejas. Además por medio de la herramienta Help se cuenta con una completa guía de ayuda con ejemplos de fácil entendimiento para todas funciones de Matlab.

Actualmente Matlab se usa tanto a nivel académico, como a nivel de investigación e industria para la solución de complicados problemas científicos o de ingeniería. Es empleado para el desarrollo de cálculo numérico de propósito general y solución de problemas con formulación matricial que aparecen en control, estadística, procesamiento de señales, etc. Matlab aporta, por medio de las toolboxes (que no se incorporan en el sistema base sino que se adquieren separadamente), funciones para resolver problemas específicos como por ejemplo calculo simbólico, procesado de imágenes, diseño de sistemas de control, identificación de sistemas, simulación de sistemas dinámicos, optimización, redes neuronales, etc.

5.1.1 Plataformas donde corre Matlab.

- Sistema Operativo:
  - Unix: Linux, solaris, HP-UX
  - MacOS
  - MS-Windows
- Arquitectura:
  - RISC: Sparc, HP-PA
  - PowerMac (G4, G5)
  - Intel Pentium (III, IV, Xeon, M), AMD (Athlon, Opteron)

5.1.2 Ultimas versiones de Matlab. Matlab 5, contiene gráficos de calidad en 2D y 3D. Corre bajo Windows utilizando toda la memoria disponible. **Matlab 6,** tiene un entorno de desarrollo con interfaz Java, contiene matrices 3D, estructuras, cell arrays. **Matlab 7,** tiene mejoras en la interfaz y mejora de Simulink. Matlab compiler admite objetos.

5.1.3 Introducción y generación de matrices. Matlab trabaja esencialmente con matrices rectangulares formadas por números reales ó complejos. Las matrices 1 × 1 se interpretan como escalares y las matrices con una sola fila o columna se interpretan como vectores. Las matrices se pueden introducir de diversas formas; la primera de ellas es indicando explícitamente su lista de componentes. Los elementos de una misma fila pueden estar separados por blancos o por comas; y las filas pueden estar separadas por (**;**) o tecleando enter luego de cada fila sin cerrar los corchetes hasta finalizar la matriz.

Los elementos de una matriz se pueden identificar usando índices entre paréntesis. Por ejemplo, A (2,3) representa el elemento de la segunda fila y tercera columna.

El carácter dos puntos (:) y los vectores de índices permiten referenciar vectores y submatrices de una matriz. Es importante entender su funcionamiento porque ahorran muchas operaciones al reducir el uso de bucles y, por tanto, hace el código más legible. Esta es una de las principales ventajas de Matlab frente a otros lenguajes de alto nivel. La expresión 1:5 representa realmente el vector [1 2 3 4 5], esta expresión se puede generalizar de manera que los números no sean enteros y el incremento de valores sea diferente a la unidad. Por ejemplo, la expresión: 0.1:0.2:0.7 = [0.1 0.3 0.5 0.7].

El carácter (:) también se usa para referenciar una submatriz de una matriz. Por ejemplo B (1:3,3) representa el vector columna formado por los tres primeros elementos de la tercera columna de la matriz B. Por otro lado B (:,3) representa la tercera columna de la matriz B en otras palabras esta realizando la misma función de la anterior orden. En la misma lógica, B (1:2, :) representa una matriz formada por las dos primeras filas de todas las columnas de la matriz B.

Se pueden usar vectores de enteros como índices. Así por ejemplo B (:, [2,3]) representa la submatriz formada por todas las filas y las columnas 2 y 3 de la matriz B. Los índices se pueden usar a ambos lados de la asignación. Por ejemplo escribiendo A (:, [1 3]) = B(:,1:2) asignamos a la submatriz de A formada por todas las filas y las columnas 1 y 3 la submatriz de B formada por todas las filas y las columnas 1 y 2.

Matlab permite además introducir y trabajar con arrays multidimensionales. Otras estructuras de datos más complejas como son estructuras de tipo registro o celdas.

5.1.4 Operaciones sobre matrices y componentes de matrices. Matlab puede realizar el conjunto de operaciones sobre matrices mostrado en la tabla 5.1.

Tabla 5.1 operadores matriciales

Operador	**Descripción**
+	Suma
-	Resta
*****	Producto
ˆ	Potencia

\	División izquierda
/	División derecha
.’	Traspuesta
’	Traspuesta conjugada

Si estas operaciones se realizan sobre matrices con un tamaño no compatible se produce un mensaje de error, por ejemplo al sumar dos matrices con diferente número de filas o columnas. La única excepción es el caso de matrices escalares (1×1), entonces se realiza la operación del escalar con cada elemento de la matriz.

Respecto a la operación X = A \ B (división izquierda) es la solución del sistema matricial AX = B. Por su parte X = B/A (división derecha) denota la solución del sistema XA = B.

Regularmente se usa una matriz no como una entidad sino como un conjunto de componentes. Por tanto, a veces estaremos interesados en aplicar operaciones sobre los elementos de la matriz. Por ejemplo, si se quiere obtener el cuadrado de una matriz se escribe Aˆ2, pero puede ser que sea necesario obtener una matriz que tenga por componentes los cuadrados de los componentes de otra matriz. En este caso se deben realizar operaciones sobre cada componente independientemente.

La suma y resta siempre operan componente a componente. El resto de operaciones se preceden por un punto para que actúen sobre componentes. Por ejemplo, para multiplicar los componentes de las dos matrices A y B podemos hacer A.*B y para elevar todos los elementos de la matriz A al cuadrado hacemos A.ˆ 2. La diferencia entre operaciones con y sin punto.

5.1.5 Matrices predefinidas. Existen en Matlab varias funciones orientadas a definir con gran facilidad matrices de tipos particulares. Algunas de estas funciones son las siguientes:

- eye(4) forma la matriz unidad de tamaño (4×4).

- zeros(3,5) forma una matriz de *ceros* de tamaño (3×5).

- zeros(4) ídem de tamaño (4×4).

- ones(3) forma una matriz de *unos* de tamaño (3×3).

- ones(2,4) idem de tamaño (2×4).

- linspace(x1, x2, n) genera un vector con n valores igualmente espaciados entre x1 y x2.

- logspace(d1,d2,n) genera un vector con n valores espaciados logarítmicamente entre 10^d1 y 10^d2. Si d2 es pi, los puntos se generan entre 10^d1 y pi.

- rand(3) forma una matriz de números aleatorios entre 0 y 1, con distribución uniforme, de tamaño (3×3).

- rand(2,5) idem de tamaño (2×5).

- randn(4) forma una matriz de números aleatorios de tamaño (4×4), con distribución normal, de valor medio 0 y varianza 1.

- magic(4) crea una matriz (4×4) con los números 1, 2, ... 4*4, con la propiedad de que todas las filas y columnas suman lo mismo.

- hilb(5) crea una matriz de Hilbert de tamaño (5×5). La matriz de Hilbert es una matriz cuyos elementos (i,j) responden a la expresión (1/(i+j-1)). Esta es una matriz especialmente difícil de manejar por los grandes errores numéricos a los que conduce.

- invhilb(5) crea directamente la inversa de la matriz de Hilbert.

- kron(x,y) produce una matriz con todos los productos de los elementos del vector x por los elementos del vector y. Equivalente a x'*y, donde x e y son vectores fila.

- compan(pol) construye una matriz cuyo polinomio característico tiene como coeficientes los elementos del vector pol (ordenados de mayor grado a menor).

- vander(v) construye la matriz de *Vandermonde* a partir del vector v (las columnas son las potencias de los elementos de dicho vector)

5.1.6 Expresiones y variables. Matlab es un lenguaje basado en expresiones formadas por variables, operadores y funciones. Una sentencia es la asignación de la evaluación de una expresión a una variable (variable = expresión). Tras interpretar y evaluar expresión, el resultado se visualiza en la pantalla y se le asigna a variable. Si se omite variable, el resultado es asignado a la variable por defecto ans (answer). Debemos tener en cuenta lo siguiente:

- Una sentencia termina con un retorno de carro.

- Si una sentencia ocupa más de una línea se puede continuar en la siguiente siempre que terminemos la línea con tres o más puntos (...) seguidos de un retorno de carro.

- Es posible escribir varias sentencias en la misma línea siempre que se separen por una coma (,) o un punto y coma (;). En el primer caso se visualiza el resultado del comando mientras que en el segundo no.

- Si no queremos que el resultado de una expresión se visualice en pantalla debemos terminar la sentencia correspondiente con punto y coma (;).

- Por defecto, Matlab diferencia las mayúsculas de las minúsculas. La variable (te) no es lo mismo que la variable (Te). Se puede modificar esta opción de modo que no se produzca distinción entre mayúsculas y minúsculas.

5.1.7 Funciones predefinidas. Hay funciones que solo operan sobre escalares, pero que pueden operar componente a componente cuando se aplican sobre matrices creando otra matriz. Las funciones mas comunes son: sin, cos, tan, asin, acos, atan, exp, log, rem, abs, sqrt, sign, round, floor y ceil.

Otras funciones Matlab sólo operan sobre vectores (fila o columna) creando un escalar, pero pueden operar columna a columna cuando se aplican sobre matrices creando un vector fila que contiene los resultados de su aplicación sobre cada columna. Para que actúe fila a fila se hace que opere sobre la traspuesta de la matriz. Las funciones más comunes son: max, min, sort, sum, prod, median, mean, std, any y all.

La potencia de Matlab reside en sus funciones matriciales, que resuelven importantes problemas de cálculo numérico. Las mas comunes son: eig, chol, svd, inv, lu, qr, hess, schur, rref, expm, sqrtm, poly, det, size, norm, cond y rank.

5.1.8 Control de flujo en Matlab. Matlab tiene las estructuras más comunes de un lenguaje estructurado: while, for e if.

Construcción for. Un bucle for repite un conjunto de sentencias un número de veces. Su forma general es:

for variable = expresion, sentencia, ..., sentencia, end
o, lo que es lo mismo:

for variable = expresión
sentencias
end

En cada iteración se almacena una columna de la expresión en la variable, y se ejecutan las sentencias hasta la siguiente sentencia end. Lo más normal es que la expresión sea del tipo x: y, en cuyo caso la variable toma desde el valor x al valor y incrementándose en cada iteración una unidad. Para evitar visualizar el resultado al final se añade un (;) en la instrucción del bucle for:

Tabla 5.2 operadores de comparación

Operador	Descripción

<	menor que
>	mayor que
<=	menor o igual que
>=	mayor o igual que
==	igual que
~=	no igual que

Construcción while. La construcción while repite un conjunto de sentencias mientras que se cumpla una condición: while condición, sentencia,..., sentencia, end o, lo que es lo mismo:

```
while condicion
sentencias
end
```

Además, se pueden crear condiciones mas complicadas por medio de los operadores lógicos (ver tabla 5.3). Cuando estos operadores lógicos se aplican a escalares se produce el resultado 0 o 1 si es cierto o falso. Si se aplican a matrices del mismo tamaño se crea otra matriz del mismo tamaño con unos o ceros como resultado de realizar las comparaciones entre componentes correspondientes.

Tabla 5.3 operadores lógicos.

Operador	Descripción
&	AND
—	OR
˜	NOT

Construcción if. La construcción if ejecuta un conjunto de sentencias si una condición se cumple. Su forma general es: if condicion, sentencia,..., sentencia, end o, lo que es lo mismo:

if condicion
sentencias
end

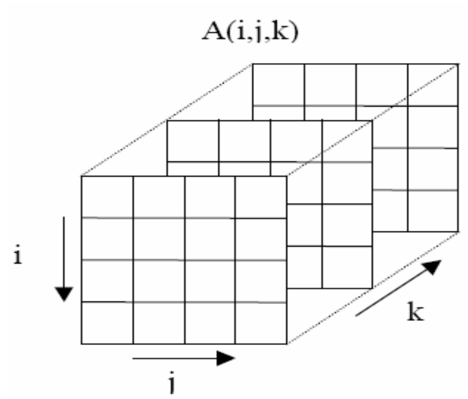
También existe la opción de que se ejecute otro conjunto diferente de sentencias si la condición no se cumple: if condición, sentencias, else, sentencias, end o, lo que es lo mismo:

if condicion
sentencias
else
sentencias
end

5.2 HIPERMATRICES

Matlab permite trabajar con hipermatrices, es decir con matrices de más de dos dimensiones. Una posible aplicación es almacenar con un único nombre distintas matrices del mismo tamaño (resulta una hipermatriz de 3 dimensiones). Los elementos de una hipermatriz pueden ser números, caracteres, estructuras, y vectores o matrices de celdas. El tercer subíndice representa la tercera dimensión: la “profundidad” de la hipermatriz (figura 5.1).

Figura 5.1 Hipermatriz de tres dimensiones



Las funciones que operan con matrices de más de dos dimensiones son análogas a las funciones vistas previamente.

5.2.1 Funciones que trabajan con hipermatrices. Algunas funciones de Matlab para generar matrices admiten más de dos subíndices y pueden ser utilizadas para generar hipermatrices. Entre ellas están rand (), randn (), zeros () y ones ().

Las siguientes funciones de Matlab se pueden emplear también con hipermatrices:

- size() devuelve tres o más valores (el nº de elementos en cada dimensión).

- ndims() devuelve el número de dimensiones.

- squeeze() elimina las dimensiones que son igual a uno.

- reshape() distribuye el mismo número de elementos en una matriz con distinta forma o con distintas dimensiones.

- permute(A,v) permuta las dimensiones de A según los índices del vector v.

- ipermute(A, v) realiza la permutación inversa.

Respecto al resto de las funciones de Matlab, se pueden establecer las siguientes reglas para su aplicación a hipermatrices:

1. Todas las funciones de Matlab que operan sobre escalares (*sin()*, *cos()*, etc.) se aplican sobre hipermatrices elemento a elemento (igual que sobre vectores y matrices). Las operaciones con escalares también se aplican de la misma manera.

2. Las funciones que operan sobre vectores (*sum()*, *max()*, etc.) se aplican a matrices e hipermatrices según la primera dimensión, resultando un array de una dimensión inferior.

3. Las funciones matriciales propias del Álgebra Lineal (*det()*, *inv()*, etc.) no se pueden aplicar a hipermatrices. Para poderlas aplicar hay que extraer primero las matrices correspondientes (por ejemplo, con el operador dos puntos (:).

5.2.2 Guide. El ambiente de desarrollo de Interfaz de Usuario en Matlab (Guide) se incorporo luego de la versión 5.0, el guide (**Graphical User Interfase**

Development Environment) el cual permite crear una interfaz interactiva para el usuario tiene algunas limitaciones pero sigue siendo muy útil en la ejecución de los códigos de matlab. Contiene un conjunto de herramientas para crear interfaces graficas muy parecidas a las aplicaciones Windows, estas herramientas simplifican el proceso de creación y de programación.

Cuando se abre un Gui con Guide, Matlab despliega el editor de diseño (Layout). En el área de diseño, también conocida como formulario podemos colocar los elementos que se encuentran en las herramientas como un botón de comando (push botton), menús despegables (popup menu), ejes (axes), etc., Cuando se guarda el diseño grafico creado en la ventada Guide, Matlab crea automáticamente el archivo “m" correspondiente, el cual tendría el mismo nombre que el creado en Guide, el cual tiene la extensión fig. El archivo “m” contiene los callback correspondientes a cada componente.

6. PROGRAMA REALIZADO POR MEDIO DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Por medio del método de elementos finitos se realizó un programa aplicado a la solución de vigas y marcos planos. Con el programa desarrollado se pueden solucionar una gran cantidad de casos de vigas, tanto vigas con apoyos intermedios y todas las condiciones posibles de extremos combinando apoyos, empotramientos y voladizos, como vigas sin apoyos intermedios pero con las combinaciones posibles en sus extremos, teniendo en cuenta que el tratamiento en ambos casos difiere. Además es posible desarrollar marcos planos con dos y tres elementos con las diferentes condiciones de extremos, dos diseños diferentes de marcos de bicicletas y marcos con tres elementos con nodo común.

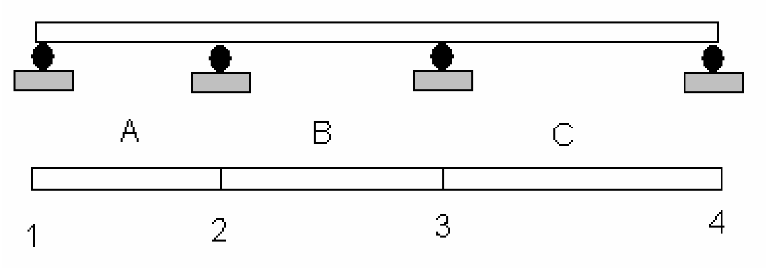
Tanto las vigas como los marcos planos se pueden cargar con diferentes tipos de cargas las cuales son: carga distribuida constante, cargas distribuida triangular creciente, carga distribuida triangular decreciente, carga puntual y momento en un punto.

Los casos que se pueden desarrollar mediante el presente programa son muchos debido a que se puede cargar tanto la viga como el marco con un número infinito de cargas.

6.1 DIVISIÓN DE LOS ELEMENTOS EN VIGAS

La división del elemento viga depende si tiene o no apoyos intermedios. Si tiene apoyos intermedios estos junto con las condiciones de extremos generan una división de apoyo a apoyo como se observa en la figura 6.1, dando así un inicio a la estructura nodal primaria y la división de los elementos de la siguiente manera: elemento A de 1 a 2, elemento B de 2 a 3 y elemento C de 3 a 4.

Figura 6.1 División de viga con apoyos intermedios



La viga se divide en elementos según sea el número de apoyos que tenga, la introducción de las cargas se realiza elemento a elemento, teniendo en cuenta las dimensiones de este, en otras palabras cada elemento se convierte en un elemento viga analizado independientemente, y al finalizar el programa estos elementos se ensamblan mediante la teoría de elementos finitos y se dan los resultados respectivos.

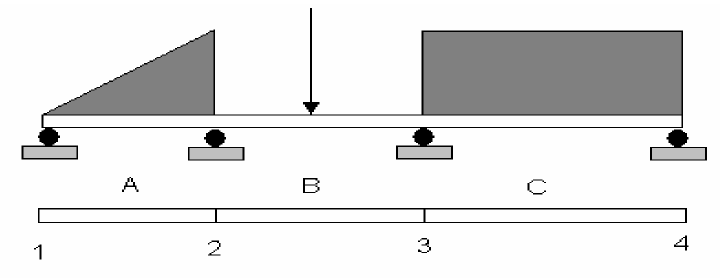
6.2 CARGA DE LOS ELEMENTOS EN VIGAS

Cada elemento primario se podrá cargar infinitas veces gracias a la superposición de cargas equivalentes de la teoría de elementos finitos (extremo fijo-fijo), realizándose la suma de reacciones y momentos equivalentes de cada carga aplicada, contando así con una matriz característica para cada elemento primario.

Respecto a la matriz de rigidez propia de cada elemento solo se tendrá una por elemento primario, esta matriz es influenciada por el módulo de elasticidad, el momento de inercia y la longitud del elemento analizado, lo cual quiere decir que solo con la longitud del elemento se desarrollara sin tener en cuenta las reacciones, los momentos o el numero de cargas involucradas en dicho elemento.

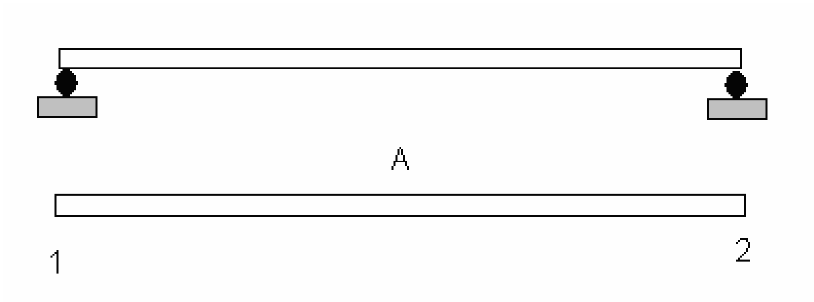
Al incluir las cargas, la estructura nodal primaria puede o no cambiar, dependiendo de la ubicación de las cargas. Si se aplican algunas cargas distribuidas el elemento primario se divide en varios elementos secundarios dando paso a una solución de este elemento en cuestión como una sola viga, en esta nueva estructura nodal aumentará el numero de elementos y por tanto el numero de nodos.

Figura 6.2 División de viga con apoyos intermedios y cargas aplicadas de apoyo a apoyo



En el caso de los elementos viga sin apoyos intermedios, solo actúan las condiciones de extremos (figura 4.5), este se comporta como un solo elemento primario pudiendo cargar así infinitamente el elemento viga sin ninguna restricción y superponiendo cargas si es el caso.

Figura 6.3 División de viga sin apoyos intermedios



Para este tipo de vigas solo existirá una matriz de rigidez salvo en el caso que se presenten algunas cargas distribuidas especiales donde se debe cambiar la estructura nodal primaria, y se deba solucionar en base a la estructura nodal secundaria.

6.3 MATRICES CARACTERÍSTICAS DE CADA ELEMENTO

Las matrices características de cada elemento son muy importantes puesto que en estas se basa el desarrollo del método, estas matrices son: matriz de rigidez y matriz de cargas y momentos según teoría de elementos finitos extremo fijo-fijo. La matriz de rigidez la cual tiene un tamaño de 4 x 4, depende del módulo de elasticidad propio del material de la viga, del momento de inercia el cual caracteriza la sección transversal de la viga y de la longitud propia del elemento analizado. La matriz de cargas y momentos es una matriz columna de tamaño 4 x 1 la cual tiene la convención de signos adoptada para el análisis por el método de elementos finitos. Cabe anotar que cuando un elemento no esta cargado esta matriz de carga y momentos es igual a cero.

6.4 ENSAMBLE DE LAS MATRICES

El ensamble de matrices se realiza sumando las columnas y las filas de estas, dependiendo el nodo que tengan en común así: si un elemento A va de 1 a 2, un elemento B va de 2 a 3 y un elemento C va de 3 a 4, entonces el ensamble se realizara matriz de A + B + C. pero este ensamble no se realiza como la suma de matrices ordinaria si no que se suman una después de la otra siguiendo el orden de ensamble: para las matrices de rigidez, la fila y la columna referidas al nodo final de un elemento mas las filas y las columnas referidas al nodo inicial del siguiente elemento y así sucesivamente hasta terminar los elementos. Para las matrices de cargas y momentos, se suman las filas finales referidas al nodo común con las filas iniciales referidas a este nodo.

6.5 CONDICIONES DE EXTREMOS

Se entiende por condiciones de extremos a aquellas condicionales referidas al inicio y al final del elemento viga, las cuales nos permiten resolver el sistema de ecuaciones resultante luego del ensamble de las matrices. Estas condiciones varían según el impedimento de movimiento del elemento viga luego de ser aplicada las cargas. En la utilización del programa se cuenta con una combinación de nueve condiciones de extremos las cuales son: empotrada-empotrada, apoyada-apoyada, volada-volada, empotrada-apoyada, empotrada-volada, apoyada-empotrada, apoyada-volada, volada-empotrada y volada-apoyada. Donde la primera y segunda condición son la inicial y la final respectivamente.

Cada condición de extremo permite o no desplazamiento vertical o la obtención de una pendiente, además los apoyos intermedios no permiten el desplazamiento vertical, por tanto:

- Empotramiento: desplazamiento igual a cero, y pendiente igual a cero.

- Apoyo: desplazamiento igual a cero, y pendiente diferente de cero.

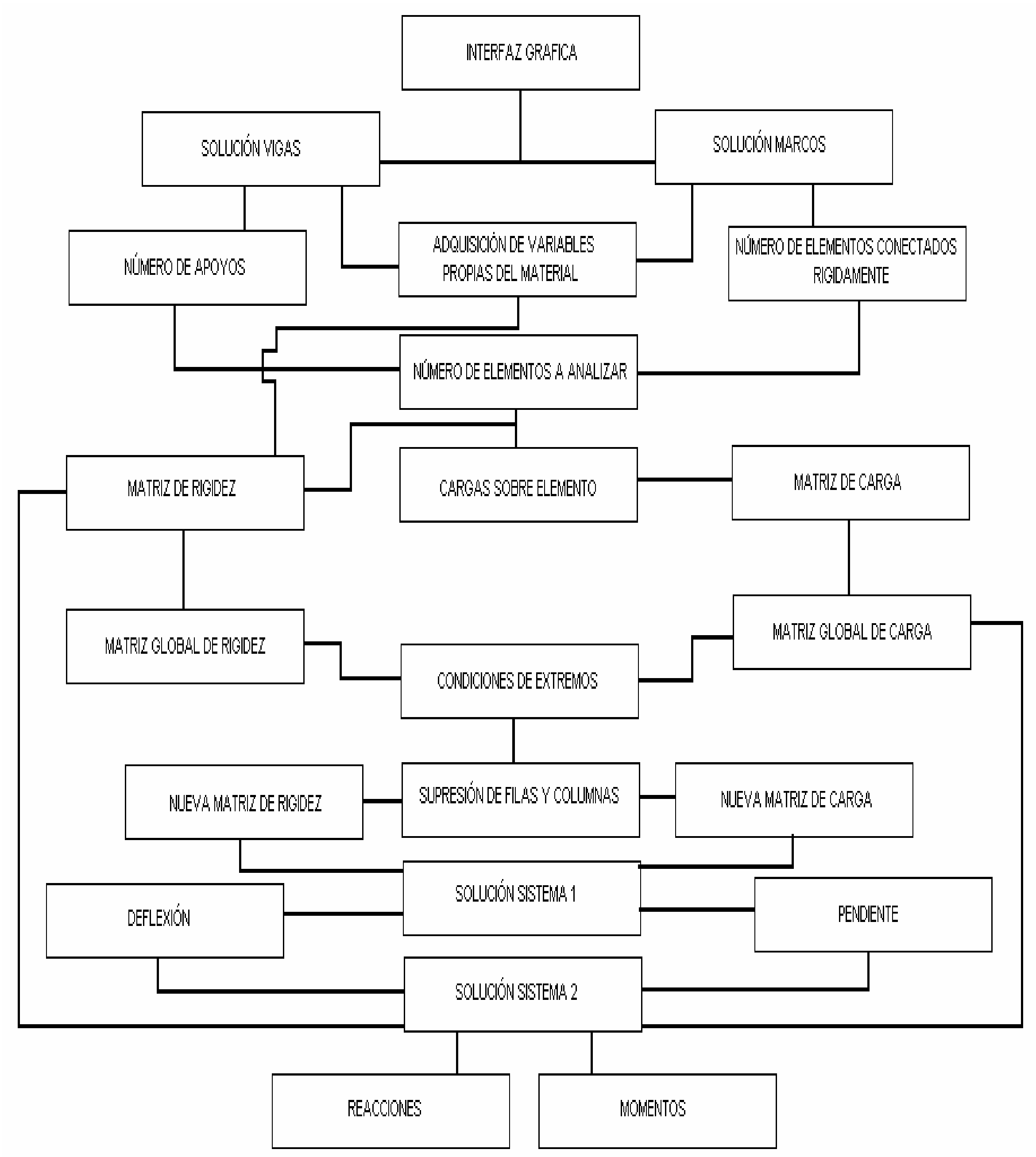
- Voladizo: desplazamiento diferente de cero, y pendiente diferente de cero.

- Apoyo intermedio: desplazamiento igual a cero, y pendiente diferente de cero.

Luego de haber obtenido la matriz global de rigidez y la matriz global de carga y momento se introducen las condiciones de extremos, dependiendo cual sea la elección.

6.6 DIAGRAMA DE FLUJO DE PROGRAMA

Figura 6.4 Flujo de los programas

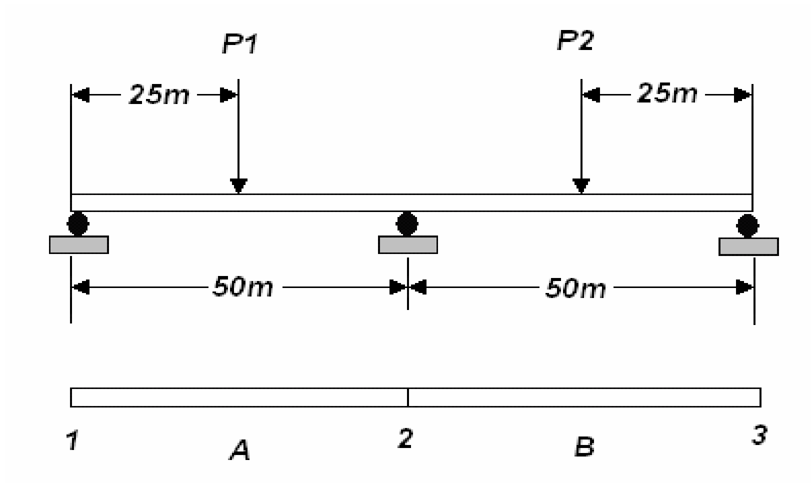


6.7 ALGUNOS CASOS RESUELTOS MEDIANTE EL PROGRAMA

A continuación se mostrarán los resultados de algunos problemas planteados, desarrollados mediante el software creado.

6.7.1 Viga con apoyos intermedios. Para la viga de dos tramos cargada como se indica en la figura 6.4 con P1 y P2 con valores de 100 KN y 50 KN respectivamente, con un modulo de elasticidad de 210 GPa y un momento de inercia de 4 x 10^{-4} m^4, encontrar la reacción en el apoyo intermedio y las reacciones en los extremos de la viga.

Figura 6.5 viga de dos tramos con un apoyo intermedio



REACCIONES =

1.0e+005 *

0.3594 1.0313 0.1094

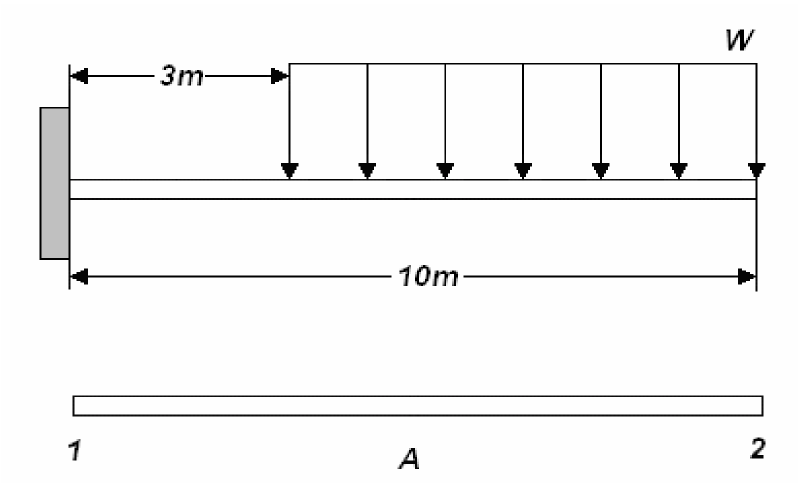
MOMENTO_EN_1 =

1.1642e-010

MOMENTO_EN_L =
0

6.7.2 Viga sin apoyos intermedios. A continuación en la figura 5.6 se tiene una viga sin apoyos intermedios empotrada en su lado izquierdo con una carga distribuida constante W equivalente a 250 KN/m que inicia en el extremo derecho y termina a 3 m del siguiente extremo, la viga tiene una longitud total de 10 m y EI es constante.

Figura 6.6 viga de un solo tramos sin apoyos intermedios



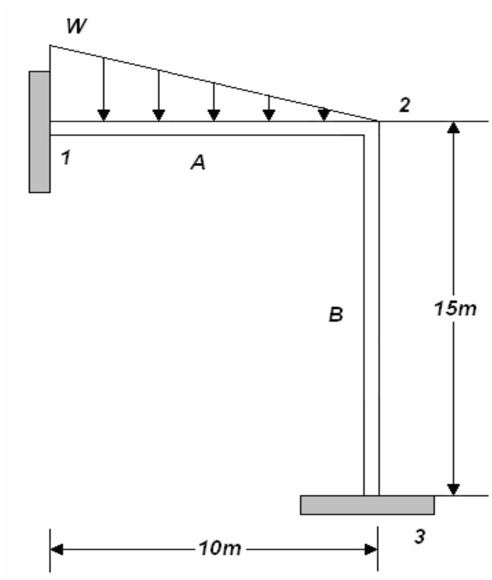
REACCIONES =
1.0e+006 *
1.7500 -0.0000
MOMENTO_EN_1 =

1.1375e+007

MOMENTO_EN_L =
4.1910e-009

6.7.3 Marco con dos elementos. El marco plano de la figura 6.6 tiene una carga distribuida triangular W igual a 65 KN/m en el elemento A entre los nodos 1 y 2, esta fabricado con un material cuyo modulo de elasticidad es de 35 Gpa y tiene una sección transversal caracterizada por el momento de inercia 6 x 10^{-4} m^4 y cuenta con una área de 1 m^2, hallar las deformaciones en los nodos. Los elementos están a 90^o entre si.

Figura 6.7 marco plano con dos elementos



R1x = 4.9136

R1y = -13.5126

M1 = -85.9897

R3x = -4.9136

R3y = -2.2749e+005

M3 =   24.5679

CONCLUSIONES

Con el desarrollo de este proyecto se aporta al banco de software de análisis de elementos finitos que viene tomando forma en los últimos semestres mediante el desarrollo de otros problemas específicos de resistencia de materiales, para en un futuro proyecto reunir todos los trabajos y crear un software que involucre una solución numerosa de problemas y brindar así un buen uso educativo, e impulsar mediante el estudio de casos unidimensionales y bidimensionales el estudio amplio y completo para tres dimensiones del método de elementos finitos.

Se realizó el análisis de las ecuaciones de dicretización, las cuales son las que reemplazan a las ecuaciones diferenciales que gobiernan al sistema por medio de la minimización de la energía potencial lo cual fue planteo inicialmente para ejecución del proyecto.

Existe una gran cantidad de plataformas de programación entre las cuales se encuentra MATLAB, esta plataforma además de ser sencilla en su lenguaje de programación se presta para realizar cálculos y operaciones, encontrando como único obstáculo el nivel de procesamiento de datos del computador utilizado. Mediante MATLAB se pudo utilizar amplia cantidad de órdenes ya preestablecidas ayudando a agilizar tiempo y completar un trabajo muy específico.

Tanto la teoría como el desarrollo del método de ELEMENTOS FINITOS se presta para realizar análisis exhaustivos a una gran cantidad de elementos sin importar su complejidad y forma, donde en el análisis bidimensional se puede realizar para sistemas discretos y sistemas continuos, en la medida que se desarrollo el proyecto se pudo comprobar que el análisis de vigas y marcos planos por medio de elementos finitos se debe realizar tomando el sistema como discreto, puesto que es redundante utilizar un sistema continuo.

Se realizaron en total siete diferentes programas contenidos todos sobre una interfaz grafica la cual presenta inconvenientes para su debido funcionamiento si no se cuenta con la versión 7.0 de MATLAB o con una versión más actual.

Cada uno de los programas esta diseñado para la utilización de infinidad de cargas actuando sobre los elementos, brindando un amplio margen de experimentación con el método y solución de problemas.

BIBLIOGRAFÍA

[1] BUCHANAN, George R. "Finite element analysis. ". Mcgraw - Hill. New York 1994.

[2] CONDE, Aurelio (2002). "Introducción a las matrices". En Sociedad andaluza de educación matemática Thales [online], disponible http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0289-02/index.html, consulta: 10 de mayo 2006.

[3] RONCANCIO H. Educardo. Teoría de los elementos finitos. Aplicados en una y dos dimensiones, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, 2003.

[4] NORTON, Robert L. "Diseño de máquinas" Prentice-Hall Hispanoamericana S.A. México.1999.

[5] CHANDRUPATLA, Tirupathi R. y BELENGUNDU, Ashok D. "Introducción al estudio del elemento finito en ingeniería". Prentice-Hall Hispanoamericana S.A. Segunda edición. México.1999.

[6] SEGERLIND, Larry J. "Applied finite element analysis". John Wiley and Sons Inc. Estados Unidos.1976.

[7] García, Javier de Jalón (2004). "Aprenda Matlab 6.5 como si estuviera en primero". En: tAyuda.com en Informática [online], disponible en http://mat21.etsii.upm.es/ayudainf/aprendainf/Matlab65/matlab65pro.pdf, consulta: 5 de junio 2006.

[8] LOGAN, Daryl L. A first course in the finite element method. Estados Unidos: Wadsworth y Brooks. 2000.

[9] TIMOCHENKO, Stephen P, y YOUNG, D T, “Elementos de Resistencia de Materiales”.Editorial Limusa, España 1966.

[10] BEER, Ferdinand P, y JOHNSTON, JR, E. Russell, “Mecanica de materiales segunda edición”.Mcgraw-Hill, Bogota 2002.