UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

"Análisis del cálculo de cocaracteres para el álgebra de matrices triangulares superiores de tamaño dos"

Carlos Mauricio Palacio Moreno
Lic. Matemáticas y Física

Facultad de Ciencias Básicas
Maestría en Matemáticas
Pereira, Risaralda
2023

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

“Análisis del cálculo de cocaracteres para el álgebra de matrices triangulares superiores de tamaño dos”

Trabajo de grado presentado para optar al título de:
MAGISTER EN MATEMÁTICAS

Carlos Mauricio Palacio Moreno
Lic. Matemáticas y Física

Director:
Alejandro Estrada Serna
Doctor en Matemáticas

Facultad de Ciencias Básicas
Maestría en Matemáticas
Pereira, Risaralda
2023

Nota de aceptación:

Firma del Jurado

Firma del Jurado

Firma del Director

Pereira, noviembre 2023

Dedicado a Yuri Alexander Poveda Quiñones, mi gran maestro. Siempre me acompañarán esa actitud curiosa y ese amor por el detalle en cada demostración... eternamente gracias por cada una de tus enseñanzas y por despertar en mi ese cariño por el álgebra... tú legado no se olvidará.

Agradecimientos

Tomo esta oportunidad para agradecer enormemente a mi familia por todo el apoyo brindado tanto físico como emocionalmente durante todo este proceso, su ayuda ha sido invaluable y su presencia es una motivación para seguir adelante .

A mis docentes de la Maestría en Matemáticas por compartir sus conocimientos y por las agradables discusiones matemáticas que surgían en cada una de las asignaturas. En especial me gustaría agradecer a mi director de trabajo de grado, Dr. Alejandro Estrada Serna, por su paciencia y constancia e incondicional ayuda; y a los doctores Carlos Arturo Escudero y José Rodrigo Gonzales por motivarme constantemente a culminar este proceso.

Por último, quiero agradecer también a mis amigos, que desde que los conozco, allá en esos primeros semestres de la licenciatura en Matemáticas y Física, han puesto a disposición todos sus recursos y conocimientos, y han servido como fuente de inspiración para juntos lograr el objetivo.

Resumen

En este trabajo de grado mostramos que toda $\mathbb{Z}_2$-graduación del álgebra de matrices triangulares superiores $UT_2(\mathbb{F})$ es isomorfa a la graduación canónica; luego caracterizamos el conjunto de sus identidades polinomiales $\mathbb{Z}_2$-graduadas y encontramos bases para el álgebra relativamente libre generada por sus identidades multilineales graduadas; espacio que, visto como H_n-módulo o representación del grupo simétrico S_n, se puede descomponer en suma directa de subrepresentaciones irreducibles, todas ellas con un cocaracter asociado. Mediante técnicas de teoría de la representación, calculamos la multiplicidad de tales cocaracteres y algunos otros invariantes numéricos como el exponente de $UT_2(\mathbb{F})$ y la colongitud de sus subrepresentaciones irreducibles.

Palabras clave: Identidad polinomial, PI-álgebra, álgebra graduada, identidad multilineal, cocaracter, codimensión.

Abstract

In this thesis we show that all $\mathbb{Z}_2$-grading of the upper triangular matrices algebra $UT_2(\mathbb{F})$ is isomorphic to the canonical grading, next we characterize the set of its polynomials identities $\mathbb{Z}_2$-graduated and we a find basis for the relatively free algebra generated for its multilinear graduated identities; space that, seen as H_n-modules or representation of the symetric group S_n, can be shown as a direct sum of irreducibles subrepresentations, all of them with associated character. Through representation theory techniques, we compute all the multiplicities of such characters and some other numerical invariants like the $UT_2(\mathbb{F})$ exponent and the colenght of its irreducibles subrepresentations.

Keywords: Polynomial identity, PI-algebra, graded algebra, multilineal identity, cocharacter, codimension.

Lista de símbolos

Símbolo	Pág	Descripción
$M_n(\mathbb{F})$	9	Conjunto de matrices de $n \times n$ sobre un campo $\mathbb{F}$
$UT_n(\mathbb{F})$	10	Conjunto de matrices triangulares superiores de $n \times n$
$UT_2(\mathbb{F})$	10	Conjunto de matrices triangulares superiores de 2×2
E_{ij}	11	Matriz unitaria
$a \sim_I b$	12	a está relacionado con b módulo I
$a \equiv b \bmod(I)$	12	a es congruente con b módulo I
$\mathrm{End}(A)$	15	Conjunto de endomorfismos de un álgebra A
$\mathrm{Aut}(A)$	15	Conjunto de automorfismos de un álgebra A
$\mathrm{Ker}(\varphi)$	16	Kernel (o núcleo) de un homomorfismo
$\mathrm{Im}(\varphi)$	16	Imagen de un homomorfismo
$\mathbb{F}\{X\}$	20	Álgebra libre
$\mathbb{F}\langle X\rangle$	21	Álgebra libre asociativa
$\mathbb{F}[X]$	22	Álgebra libre asociativa y conmutativa
$\mathrm{Id}(A)$	26	Conjunto de ideales de un álgebra A
$\langle S\rangle_{\mathrm{T}}$	27	T-ideal generado de un conjunto S
$\mathcal{V}(S)$	30	La variedad determinada por S
$\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$	35	Álgebra libre asociativa G-graduada
$\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$	35	Conjunto de ideales G-graduados de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$
P_n	38	Espacio de polinomios multilineales
$\mathrm{Tr}(A)$	60	Traza de una matriz A
$\mathrm{Ann}(M)$	47	El anulador de un A-módulo M
$\mathrm{J}(A)$	48	El radical de Jacobson de un álgebra A
χ_ρ	60	Caracter de una representación ρ
$\chi(M)$	60	Caracter de un módulo M
$\lambda \vdash n$	62	Una partición λ de un entero n

Símbolo	**Pág**	**Descripción**
$\lvert\lambda\rvert = n$	62	λ es una partición de un entero n
Tipo (σ)	63	Tipo de ciclo de una clase de conjugación $\sigma \in S_n$
$c(\lambda)$	64	Clase de equivalencia asociada a una partición λ
D_λ	64	Diagrama de Young asociado a la partición λ
T_λ	65	Tabla de Young asociada al diagrama D_λ
P_n^{gr}	85	Espacio de polinomios multilineales de grado n
$G \wr S_n$	86	Producto corona entre un grupo G y el grupo simétrico
$P_n^{\mathrm{gr}}(A)$	87	Polinomios multilineales mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$
$\chi_{\lambda,\mu}$	87	Caracter asociado a las particiones λ y μ
$\chi_n^{\mathrm{gr}}(A)$	87	Caracter graduado de $P_n^{\mathrm{gr}}(A)$
$c_n^{\mathrm{gr}}(A)$	87	Codimensión de $P_n^{\mathrm{gr}}(A)$
$P_{r,n-r}$	88	Polinomios multilineales en r y $n-r$ variables
$P_{r,n-r}^{\mathrm{gr}}(A)$	88	Polinomios multilineales en r y $n-r$ variables mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$
$\chi_{r,n-r}(A)$	88	Caracter graduado de $P_{r,n-r}^{\mathrm{gr}}(A)$
R_{T_λ}	96	Estabilizador de fila de la tabla T_λ
C_{T_λ}	96	Estabilizador de columna de la tabla T_λ
e_{T_λ}	97	Mínimo idempotente esencial de la tabla T_λ
$\exp^{\mathrm{gr}}(A)$	118	Exponente graduado de un álgebra A
$l_n^{\mathrm{gr}}(A)$	118	Longitud graduada de un álgebra A
$\mathrm{Span}\{S\}$	127	El Span lineal de un conjunto S
$\mathscr{P}(V)$	127	Conjunto de partes de un espacio vectorial V
$\mathscr{L}(V)$	127	Conjunto de subespacios de un espacio vectorial V
$\dim(V)$	128	Dimensión de un espacio vectorial V
$\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V,W)$	128	Conjunto de transformaciones lineales de V en W

Tabla de contenido

Introducción

Un álgebra sobre un campo $\mathbb{F}$ es un espacio vectorial equipado con una operación binaria adicional llamada multiplicación ([9]); una identidad polinomial para un álgebra es un polinomio no trivial que se anula bajo cualquier sustitución de elementos del álgebra en el polinomio; si un álgebra tiene al menos una identidad polinomial, decimos que esta álgebra satisface dicha identidad y es en consecuencia una PI-álgebra (del inglés "Polynomial Identity algebra"([19])). En 1948 Kaplansky en [20] establece las bases para el estudio sistemático de las identidades polinomiales al probar que si un anillo de división (campo no conmutativo), satisface alguna identidad polinomial, entonces éste es de dimensión finita; sugiriendo esta misma condición para álgebras. De particular interés se hace encontrar el conjunto de todas las identidades polinomiales de un álgebra cualquiera y determinar si éste es finitamente generado.

Dado un conjunto numerable de variables X, definimos el álgebra relativamente libre (o álgebra libre asociativa) $\mathbb{F}\langle X\rangle$ como el álgebra de polinomios con variables asociativas de X y coeficientes en el campo $\mathbb{F}$. Las identidades polinomiales que satisfacen algún álgebra forman un ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ que es invariante bajo endomorfismos del álgebra relativamente libre; a este ideal lo conocemos como T-ideal; más aún, cada T-ideal es el conjunto de identidades polinomiales de algún álgebra. De esta manera estudiar las identidades polinomiales de un álgebra es importante puesto que significa estudiar los T-ideales del álgebra relativamente libre. Si un conjunto de identidades polinomiales satisface una familia de álgebras distintas, decimos que tales álgebras forman una clase denominada variedad de álgebras. Las variedades fueron definidas en 1935 por Birkhoff ([3]) con la finalidad de estudiar las identidades polinomiales para estructuras algebraicas. Un resultado ampliamente conocido muestra que existe una correspondencia uno a uno entre T-ideales del álgebra relativamente libre y variedades de álgebras; con lo cual, describir las identidades polinomiales de un álgebra, implica, en un espectro más amplio, estudiar variedades de álgebras.

En general es difícil caracterizar T-ideales del álgebra relativamente libre; en 1950 Specht ([26]) planteó como conjetura que sobre un campo de característica cero, todo ideal propio del álgebra relativamente libre es finitamente generado; esto es, la base de identidades es finita. Esta conjetura fue probada para casos específicos a lo largo de los años hasta que en 1987 Kemer ([22]) proporciona una completa demostración. De esta manera, uno de los problemas más importantes en teoría de PI-álgebras pasó a ser el de probar la propiedad de Specht para un álgebra cualquiera; por ejemplo, en 2022 Estrada en [11] demostró esta propiedad para la variedad de superálgebras finitamente generadas con superinvolución sobre un campo de característica cero y para la variedad de álgebras con acción de Hopf generadas por el álgebra de matrices triangulares de tamaño dos $UT_2(\mathbb{F})$. Las técnicas desarrolladas por Kemer para demostrar la conjetura de Specht están recopiladas en [21] y son una herramienta fundamental para el estudio de las identidades polinomiales de un álgebra dada.

Algunas identidades polinomiales de un álgebra A son difíciles de caracterizar, como lo pueden ser aquellas de grado mayor o igual a dos en alguna de sus variables; el problema se simplifica cuando éstas son linealizadas para trabajar en un espacio cuyas características y propiedades han sido mejor estudiadas a lo largo de los años en teoría de PI-álgebras, el espacio de identidades multilineales de A; que es la intersección entre el espacio de los polinomios multilineales del álgebra relativamente libre y las identidades de A. A su vez, el conjunto de identidades multilineales de A, es un subconjunto del álgebra relativamente libre; más aún, es una subálgebra del álgebra de polinomios multilineales; con lo cual, el cociente entre polinomios multilineales e identidades multilineales de A cobra sentido y es conocido como el espacio de elementos multilineales en el álgebra relativamente libre módulo identidades de A.

En muchas ocasiones, diferenciar las identidades polinomiales de un álgebra proporciona una mejor organización, haciendo más sencillo el problema de su caracterización. Dicha diferenciación se realiza tanto identificando subespacios del álgebra, como los subespacios del álgebra libre asociativa, y haciéndolos coincidir con los elementos de un grupo G. Esta es una acción ampliamente conocida en la literatura como una G-graduación del álgebra y del álgebra libre asociativa. De esta manera, cada elemento $g \in G$ es el grado homogéneo del subespacio identificado con g; de acuerdo con esto, se hace posible identificar el tipo de elementos del álgebra que se anulan en cada una de las identidades polinomiales generadoras; en consecuencia, cada subespacio del álgebra libre asociativa queda determinado por las características de los elementos del álgebra. Por su parte, tanto el conjunto de identidades polinomiales de un álgebra A, como el conjunto de sus polinomios multilineales, heredan la graduación del álgebra libre asociativa ([25]), haciendo que su cociente sea conocido como el espacio de elementos multilineales de grado n en el álgebra relativamente libre graduada módulo identidades graduadas del álgebra; en símbolos, $P_n^{\mathrm{gr}}(A)$.

Por otra parte, para una oportuna caracterización del espacio de elementos multilineales de grado n de un álgebra A, consideramos la acción del grupo de simetrías de un conjunto de n elementos S_n, actuando sobre las variables de $P_n^{\mathrm{gr}}(A)$; con lo cual, las permutaciones en S_n nos permiten abarcar todas las posibles combinaciones de variables de $P_n^{\mathrm{gr}}(A)$, en consecuencia, se simplifica la labor de identificar una base para este espacio. A tal espacio G-graduado ($P_n^{\mathrm{gr}}(A)$) bajo la acción de S_n, la conocemos como un $G \wr S_n$-módulo o simplemente una representación de S_n.

En general, existen varias dificultades en el estudio de T-ideales, una de estas se relaciona con la medición de su crecimiento en el sentido de como aumenta la dimensión del espacio $P_n^{\mathrm{gr}}(A)$ a medida que n, el número de variables, se incrementa. A la dimensión de la representación $P_n^{\mathrm{gr}}(A)$ la conocemos como la codimensión G-graduada de la representación, y no es más que el cocaracter G-graduado de la misma evaluado en la identidad de S_n. Este concepto fue introducido en 1971 por Regev en [23] como una manera de medir el crecimiento de las identidades de un T-ideal generado por un conjunto de identidades conocidas; el mismo no solo se ha convertido en una herramienta indispensable en el estudio de PI-álgebras, sino que en la actualidad continúa siendo objeto de investigación. Cabe resaltar que el prefijo "co" en el término cocaracter o codimensión hace referencia simplemente a que es el caracter o la dimensión de un álgebra cociente. A cada T-ideal del álgebra relativamente libre podemos asociar una secuencia de caracteres del grupo simétrico S_n, $n = 1, 2\ldots$, llamada secuencia de cocaracteres de una PI-álgebra dada y una secuencia numérica llamada secuencia de codimensiones. Es importante anotar que la secuencia de cocaracteres a la que hacemos referencia, representa al caracter de la representación $P_n^{\mathrm{gr}}(A)$ cuando $n = 1, 2, \ldots$

Con el propósito de entender el crecimiento de los T-ideales del álgebra relativamente libre, Regev en [23] probó que para una PI-álgebra dada, su secuencia de cocaracteres se encuentra acotada exponencialmente; después, Kemer probó en [21] que tal crecimiento es polinómico o exponencial, y no de alguna otra manera. En 1982 Regev y Amitsur [24] conjeturaron que el radio de crecimiento de la secuencia de cocaracteres era un entero positivo; hasta que en 1998 y 1999 Giambruno y Zaicev probaron en [14] y [15] que de hecho el radio de crecimiento de un T-ideal propio del álgebra relativamente libre está dado por un entero positivo denominado el exponente del T-ideal de la PI-álgebra correspondiente o simplemente el PI-exponente.

Otro número importante a tener en cuenta es la cantidad de subrepresentaciones irreducibles en las que se puede descomponer el espacio $P_n^{\mathrm{gr}}(A)$; el mismo viene dado por la multiplicidad de cada una de estas subrepresentaciones, permitiendo así conocer la cantidad de sumandos en la descomposición de $P_n^{\mathrm{gr}}(A)$. Tal número es conocido como la colongitud del espacio y junto al PI-exponente configuran los invariantes numéricos de una PI-álgebra dada.

De particular interés en este trabajo de grado es $UT_2(\mathbb{F})$, el álgebra de matrices triangulares de tamaño dos con entradas en el campo $\mathbb{F}$; estudiaremos su $\mathbb{Z}_2$-graduación canónica, el conjunto de sus identidades multilineales $\mathbb{Z}_2$-graduadas y la secuencia de cocaracteres y codimensiones asociada a la representación $P_n^{\mathrm{gr}}(A)$, $n = 1, 2, \cdots$, vista como $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$-módulo, donde $\mathbb{Z}_2 \wr S_n = H_n$ es conocido como el grupo hiperoctaedral. El papel de $UT_2(F)$ en la teoría de PI-álgebras, ha sido sumamente relevante, diversos autores a lo largo de los años han estudiado sus propiedades como PI-álgebra; más aún, no sólo para $UT_2(\mathbb{F})$, sino para $UT_n(\mathbb{F})$ en general. Los siguientes son algunos de los resultados más relevantes en cuanto a matrices que se pueden encontrar en la literatura de PI-álgebras:

En 1968 Wall ([30]) estudió por primera vez las graduaciones en un álgebra cualquiera, lo que dio pie al surgimiento de diversos trabajos en este campo; por ejemplo, en 1988 Carini ([5]) realiza el cálculo de la secuencia de cocaracteres para un álgebra de Grassmann de dimensión finita; en 1994, Drensky y Giambruno ([10]) obtienen los valores exactos de los cocaracteres, las codimensiones y las series de Hilbert del conjunto de identidades polinomiales del álgebra de matrices de tamaño n con involución y, en 1999 Giambruno y Zaicev ([15]) hacen un cálculo exacto del radio de crecimiento de la n-ésima codimensión para una PI-álgebra asociativa sobre un campo de característica cero. En 2009 Agudelo ([1]) estudia el problema de la clasificación de las álgebras G-graduadas usando una miscelánea de técnicas entre las que se encuentra la cohomología de grupos, la teoría de representación de grupos y técnicas de la teoría de representación de grupos de Lie.

Con respecto a $UT_2(\mathbb{F})$, algunos de los desarrollos más importantes son los siguientes: en 2001 Bahturin, Sehgal y Zaicev ([2]) dieron una descripción de todas las G-graduaciones en un álgebra de matrices sobre un campo algebraicamente cerrado, donde G es un grupo abeliano. En 2002 Valenti ([28]) prueba que, salvo isomorfismos, hay una sola forma no trivial de graduar a $UT_2(\mathbb{F})$, por un grupo G.

En 2004 Vincenzo, Koshlukov y Valenti ([8]) describieron todas las graduaciones elementales en $UT_n(\mathbb{F})$ para n mayor o igual que 2 caracterizando los ideales generados de identidades polinomiales graduadas en esta álgebra. En 2007, Valenti y Zaicev ([29]) mostraron todas las G-graduaciones en $UT_n(F)$ dadas por un grupo G arbitrario probando que toda álgebra de este tipo proviene de una graduación elemental. En 2011, Centrone ([6]) calcula la secuencia de cocaracteres para el álgebra $UT_2(\mathbb{F})$ donde las entradas de las matrices son elementos de un álgebra de Grassmann sobre un campo de característica cero. En 2017 Centrone y Martino ([7]) estudian las identidades polinomiales G-graduadas (cuando G es un grupo abeliano finito) que satisfacen el álgebra de Jordan de matrices triangulares superiores de tamaño dos y tres sobre un campo de característica cero. En 2021, Urure y Gouveia [27] clasificaron las superidentidades polinomiales $\mathbb{Z}_2$-graduadas para $UT_n(\mathbb{F})$ cuando n es 2 y 3 respectivamente.

De conformidad con lo expuesto, el objetivo principal de este trabajo de grado es calcular la n-ésima codimensión $\mathbb{Z}_2$-graduada de $UT_2(\mathbb{F})$ (para $\mathbb{F}$ un campo de característica cero) a fin de determinar el comportamiento asintótico del crecimiento del T-ideal generado por sus identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas mediante el cálculo del PI-exponente de $UT_2(\mathbb{F})$ y verificar que tal comportamiento es exponencial con radio de crecimiento un entero positivo. También calcular la multiplicidad de cada una de las subrepresentaciones irreducibles en la descomposición del n-ésimo cocaracter $\mathbb{Z}_2$-graduado a fin de conocer, a través de la colongitud de $UT_2(\mathbb{F})$, la cantidad de sumandos en la descomposición de $P_n^{\mathrm{gr}}(UT_2(\mathbb{F}))$ en submódulos irreducibles.

Este trabajo de grado está compuesto por tres capítulos principales y una sección de apéndices; en el Capítulo 1 introducimos las definiciones básicas en teoría de álgebras, PI-álgebras, T-ideales y álgebras graduadas; mostramos algunos resultados importantes en teoría de PI-álgebras, y proporcionamos ejemplos que permiten comprender los conceptos planteados. En el Capítulo 2 elaboramos un marco teórico apropiado en teoría de módulos y teoría de representación y calculamos el radical de Jacobson para $UT_2(\mathbb{F})$; sentando así las bases para el Capítulo 3; en donde mostramos que toda $\mathbb{Z}_2$-graduación en $UT_2(\mathbb{F})$ es isomorfa a su graduación canónica, luego realizamos una caracterización detallada del conjunto de sus identidades multilineales graduadas y posteriormente, identificamos la base de cada uno de sus subespacios de polinomios multilineales graduados, para así establecer su n-ésima codimensión y la respectiva multiplicidad de sus submódulos irreducibles. Terminamos este capítulo calculando invariantes numéricos, como el exponente o radio de crecimiento de $UT_2(\mathbb{F})$ y la colongitud de la descomposición de $P_n^{\mathrm{gr}}(UT_2(\mathbb{F}))$ en submódulos irreducibles. Finalizamos mostrando en los Apéndices A y B algunas definiciones y resultados importantes en espacios vectoriales y teoría de grupos necesarios para el desarrollo de los capítulos antes mencionados. Este documento es casi por completo autocontenido; hacemos una construcción práctica de los conceptos necesarios y escribimos de manera detallada cada una de las demostraciones; sin embargo, esperamos del lector que esté familiarizado con nociones básicas en teoría de conjuntos, espacios vectoriales, teoría de grupos y algunas técnicas de demostración.

Este trabajo de grado es en parte el compendio de los cursos de álgebra lineal, estructuras algebraicas, PI-álgebras y teoría de representación impartidos por los Profesores Yuri Poveda y Alejandro Estrada en el periodo comprendido entre 2019 y 2022 en la Maestría en Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira, y está basado en el trabajo realizado por Valenti en [28].

Capítulo 1
Álgebras

En este capítulo mostraremos los conceptos básicos en cuanto a álgebras, álgebras libres, PI-álgebras y espacios de polinomios multilineales.

Dada un álgebra cualquiera, se hace de especial interés encontrar el espacio de aquellos polinomios no triviales que al ser evaluados en cualesquiera de los elementos del álgebra se anulan; ver cuál es su generador y estudiar las variedades de aquellos espacios.

Por último definimos y mostramos algunos resultados importantes en álgebras graduadas y el espacio de identidades multilineales graduadas, los cuales conforman la esencia de este trabajo.

1.1. Preliminares de álgebras

Cuando en un espacio vectorial definimos una operación adicional con ciertas propiedades respecto a la suma de vectores y multiplicación por escalar originales, obtenemos un espacio conocido como **álgebra**; este espacio es de suma importancia para el desarrollo de este trabajo pues, como veremos más adelante, las PI-álgebras son álgebras que se anulan en al menos un polinomio no trivial. A continuación definimos álgebra y brindamos algunos ejemplos basados en las definiciones de Drensky en [9] y Etingof en [12].

1.1.1. Definiciones y ejemplos

Definición 1.1.1. Un espacio vectorial A (sobre un campo $\mathbb{F}$) se llama **álgebra** si está equipado con una operación binaria $\cdot$ llamada producto (i.e. el mapa $\cdot : A \times A \to A$) tal que para todo $a,\ b,\ c \in A$ y para cualquier $\alpha \in \mathbb{F}$ se satisfacen los siguientes axiomas:

A1. $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$,

A2. $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$,

A3. $\alpha(a\cdot b) = (\alpha a)\cdot b = a\cdot(\alpha b)$.

Por comodidad escribiremos ab en lugar de $a\cdot b$. Un subespacio S de un álgebra A es una **subálgebra** de A si es cerrado respecto al producto de A.

Los siguientes son algunos ejemplos de álgebras:

Ejemplo 1.1.2.

1. $\boldsymbol{M_n(\mathbb{F})}$ el conjunto de matrices de tamaño $n\times n$ con las operaciones usuales de suma de matrices y multiplicación por un escalar es un espacio vectorial; además, con la multiplicación usual de matrices se convierte en un álgebra.

2. El espacio vectorial $\mathbb{F}$ sobre el campo $\mathbb{F}$ es una álgebra con el producto usual de $\mathbb{F}$.

3. Sea $\mathbb{F}[\boldsymbol{x}]$ el conjunto de polinomios conmutativos en la variable x y coeficientes en $\mathbb{F}$. Entonces $\mathbb{F}[x]$ es un álgebra con las operaciones usuales de suma y multiplicación de polinomios.

   Demostración. Dados $f,\ g,\ h \in \mathbb{F}[x]$ definidos como sigue

   $$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \qquad g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i, \qquad h(x) = \sum_{i=0}^{l} c_i x^i,$$

   y dado $t = \max(n,m)$, probemos los axiomas de la Definición 1.1.1. Para ver A1 tenemos lo siguiente:

   $$\begin{aligned}[f(x)+g(x)]h(x) &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right)\sum_{i=0}^{l} c_i x^i = \left(\sum_{i=0}^{t}(a_i+b_i)x^i\right)\sum_{i=0}^{l} c_i x^i \\ &= \sum_{i=0}^{t+l}\left(\sum_{j+k=i}(a_j c_k + b_j c_k)\right)x^i = \sum_{i=0}^{t+l}\left(\sum_{j+k=i} a_j c_k\right)x^i + \sum_{i=0}^{t+l}\left(\sum_{j+k=i} b_j c_k\right)x^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \sum_{i=0}^{l} c_i x^i + \sum_{i=0}^{m} b_i x^i \sum_{i=0}^{l} c_i x^i.\end{aligned}$$

La prueba del axioma A2 en la Definición 1.1.1 es análoga a la de A1. Para A3 tenemos,

$$\alpha\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right) = \left(\alpha\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\alpha\sum_{i=0}^{m} b_i x^i\right).$$

De esta manera hemos probado que $\mathbb{F}[x]$ es una álgebra. ■

4. $\boldsymbol{UT_n(\mathbb{F})}$ el subconjunto de matrices $M_n(\mathbb{F})$ compuesto de matrices triangulares superiores con la multiplicación usual.

   Demostración. Dadas $A,\ B \in UT_n(\mathbb{F})$, queremos ver que $AB \in UT_n(\mathbb{F})$; es decir, que $(AB)_{ij} = 0$ cuando $i > j$. Si $A = (\alpha_{ij})$ y $B = (\beta_{ij})$ tenemos que $\alpha_{ij} = \beta_{ij} = 0$ cuando $i > j$, como observamos a continuación,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1(n-1)} & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2(n-1)} & \alpha_{2n} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3(n-1)} & \alpha_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_{4(n-1)} & \alpha_{4n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \cdots & \beta_{1(n-1)} & \beta_{1n} \\ 0 & \beta_{22} & \beta_{23} & \cdots & \beta_{2(n-1)} & \beta_{2n} \\ 0 & 0 & \beta_{33} & \cdots & \beta_{3(n-1)} & \beta_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{4(n-1)} & \beta_{4n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

   La componente ij del producto entre ambas matrices viene dada por

$$(A\cdot B)_{ij} = \alpha_{i1}\beta_{1j} + \alpha_{i2}\beta_{2j} + \alpha_{i3}\beta_{3j} + \cdots + \alpha_{ij}\beta_{jj} + \cdots + \alpha_{ii}\beta_{ij} + \cdots + \alpha_{in}\beta_{nj},$$

   y notemos que si $i > j$, todos los términos de la suma se hacen cero. Por ejemplo, $\alpha_{i1}\beta_{1j} = 0$ pues $\alpha_{i1} = 0$, el mismo razonamiento se usa en cada uno de los sumandos y tenemos que $(AB)_{ij} = 0$ cuando $i > j$, luego $AB \in UT_n(\mathbb{F})$ y hemos probado que $UT_n(\mathbb{F})$ es subálgebra de $M_n(\mathbb{F})$. ■

5. En particular, $\boldsymbol{UT_2(\mathbb{F})}$ es el álgebra de matrices triangulares superiores de tamaño 2×2.

6. Dado un grupo G, el espacio vectorial $\mathbb{F}G$ con base $\{g \mid g \in G\}$ y con multiplicación definida como

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m} b_j g_j\right) = \sum_{i,j=1}^{nm} a_i b_j (g_i * h_j)$$

para una cantidad finita de elementos a_i, b_j no nulos en $\mathbb{F}$, y donde $g_i * h_j$ es la operación del grupo, es un álgebra llamada **álgebra de grupo**.

Definición 1.1.3. Un **ideal a derecha (o a izquierda)** de un álgebra A es una subálgebra I tal que $IA \subseteq I$ ($AI \subseteq I$). Un ideal bilateral (o simplemente ideal) es un ideal a izquierda y a derecha al mismo tiempo. Un ideal I de un álgebra A es **propio** si $I \subset A$ e $I \neq A$; además, decimos que I es **trivial** si $I = \{0\}$. Un ideal I de A es **maximal** si es propio no trivial y el único ideal que lo contiene es A. Un ideal I de A es **minimal** si no contiene otros ideales no nulos de A.

Denotamos por $\mathcal{I}(A)$ al conjunto de todos los ideales de un álgebra A.

Definición 1.1.4. Sea $E_{ij} \in M_n(\mathbb{F})$ la matriz de tamaño $n \times n$ con un 1 en la posición ij y ceros en las demás posiciones. A una matriz de este tipo la conocemos como **matriz unitaria**.

Ejemplo 1.1.5.

1. En $M_2(\mathbb{F})$ el conjunto

$$I = \operatorname{Span}\{E_{11}, E_{12}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{F} \right\}, \tag{1.1}$$

es un ideal a derecha puesto que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I;$$

pero I no es ideal a izquierda; veamos,

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & a'b \\ ac' & bc' \end{pmatrix} \notin I.$$

De hecho, el álgebra $M_n(\mathbb{F})$ no tiene ideales no triviales.

2. El conjunto I de la Ecuación (1.1) es ideal bilateral del álgebra $UT_2(\mathbb{F})$. Veamos; $I(UT_2(\mathbb{F})) \subseteq I$ puesto que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bd' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I;$$

también, $(UT_2(\mathbb{F}))I \subseteq I$, como observamos a continuación,

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & a'b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in I,$$

para todo $a,\ b,\ a',\ b',\ c' \in \mathbb{F}$. De hecho, el conjunto I es ideal maximal de $UT_2(\mathbb{F})$ puesto que el único ideal que lo contiene propiamente, es el mismo $UT_2(\mathbb{F})$.

3. El conjunto

$$J = \text{Span}\{E_{12},\ E_{22}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a,\ b \in \mathbb{F} \right\}, \tag{1.2}$$

es también ideal maximal de $UT_2(\mathbb{F})$. Más aún, los únicos ideales maximales de $UT_2(\mathbb{F})$ son los conjuntos de matrices I y J propuestos en las ecuaciones (1.1) y (1.2) respectivamente. Un rápido testeo por los demás conjuntos candidatos nos muestra que los conjuntos Span$\{E_{11}\}$ y Span$\{E_{22}\}$ fallan en ser ideales bilaterales y además están contenidos en I y J respectivamente; el conjunto Span$\{E_{11},\ E_{22}\}$ no es ideal a izquierda o a derecha.

1.1.2. Álgebras cocientes

En muchas ocasiones resulta interesante clasificar los elementos de un álgebra de acuerdo a las características (o al comportamiento) de los elementos de un ideal del álgebra. En este sentido, los elementos del álgebra adquieren, en el cociente, propiedades que no tenían fuera de este; el cociente así, es una nueva álgebra llamada álgebra cociente. El estudio de los cocientes es importante en este trabajo por cuanto objetos posteriores como las álgebras libres, y los espacios de polinomios multilineales, no son más que álgebras cocientes cuyos elementos están dotados de propiedades como la asociativa, la conmutativa, entre otras. A continuación se elabora una construcción de álgebras cocientes a fin de definir estos objetos; para una mayor referencia al respecto pueden visitar [13] y [18].

Definición 1.1.6. Dado I un ideal de un álgebra A, decimos que dos elementos a y b en A se relacionan entre si módulo I mediante $\sim_I$ si y sólo si $b - a \in I$. En símbolos, $a \sim_I b$ (también $a \equiv b \ \text{mod}(I)$) equivale a decir que $b - a \in I$.

A continuación comprobamos que $\sim_I$ es una **relación de equivalencia** .

Proposición 1.1.7. La relación $\sim_I$ de la Definición 1.1.6 es una relación de equivalencia.

Demostración. Debemos comprobar que $\sim_I$ es reflexiva, simétrica y transitiva. Para todo a, b y c en un álgebra A tenemos lo siguiente:

(***i***) **Reflexiva:** $a - a = 0 \in I$ equivalente a decir que $a \sim_I a$.

(***ii***) **Simétrica:** Si $a \sim_I b$ entonces $b - a \in I$, pero $(b - a) + (a - b) = (b - a) - (b - a) = 0 \in I$, luego $a - b \in I$, y tenemos que $b \sim_I a$.

(***iii***) **Transitiva:** Si $a \sim_I b$ y $b \sim_I c$ tenemos que $b - a$ y $c - b$ están en I, de manera que $c - a = (b - a) + (c - b) \in I$, equivalente a decir $a \sim_I c$.

De modo que $\sim_I$ es una relación de equivalencia. ∎

En la siguiente proposición comprobamos que esta relación de equivalencia respeta las operaciones de suma y multiplicación del álgebra, es decir, es una congruencia.

Proposición 1.1.8. La relación de equivalencia $\sim_I$ es una **congruencia**.

Demostración. Si $a \sim_I b$ y $c \sim_I d$, queremos ver que $(a + c) \sim_I (b + d)$ y también que $ac \sim_I bd$. Dado que $b - a$ y $d - c$ pertenecen a I, entonces también $(b + d) - (a + c) = (b - a) + (d - c) \in I$, que equivale a decir $a + c \sim_I b + d$. Por otra parte, $(b - a)c$ y $b(d - c)$ están en I, luego $bd - ac = bc - ac + bd - bc \in I$, equivalente a tener $ac \sim_I bd$. ∎

A veces se escribe $a \equiv b \operatorname{mod}(I)$ en lugar de $a \sim_I b$, y significa que a es congruente con b módulo I. En este documento usaremos una u otra notación de acuerdo al contexto.

En la siguiente definición clasificamos los elementos de A de acuerdo con la relación de equivalencia $\sim_I$.

Definición 1.1.9. El conjunto denotado por

$$a + I = \{b \in A \mid a \sim_I b\} = \{b \in A \mid b - a \in I\}, \tag{1.3}$$

es la **clase de equivalencia** de a en A módulo I. También es válida la notación $\overline{a}$ para referirse a la clase de equivalencia a cuando en el contexto se sobrentiende el ideal I.

Notemos que con esta definición se entiende que la clase del 0 en A es I. A continuación definimos el conjunto de todas las clases de equivalencia en A dadas por la congruencia $\sim_I$.

Definición 1.1.10. Denotamos por $A/_{\sim_I}$ (o simplemente A/I) al conjunto de todas las clases de equivalencia en A; es decir,

$$A/I = \{a + I \mid a \in A\}. \tag{1.4}$$

Proposición 1.1.11. El conjunto A/I de la Definición 1.1.10 es un álgebra con las operaciones:

i) $(a+I)+(b+I) = (a+b)+I$,

ii) $(a+I)(b+I) = (ab)+I$.

Demostración. A continuación probaremos los axiomas de la Definición 1.1.1

$$\begin{aligned}\textbf{A1.}\quad [(a+I)+(b+I)](c+I) &= [(a+b)+I](c+I)\\ &= (a+b)c+I = (ac+bc)+I\\ &= (ac+I)+(bc+I)\\ &= (a+I)(c+I)+(b+I)(c+I).\end{aligned}$$

La prueba de **A2.** es análoga a la de **A1.** Procedemos a probar **A3**:

$$\begin{aligned}\alpha[(a+I)(b+I)] &= \alpha(ab+I) = \alpha(ab)+I\\ &= (\alpha a)b+I = [\alpha(a+I)](b+I)\\ &= a(\alpha b)+I = (a+I)[\alpha(b+I)].\end{aligned}$$

De esta manera, identificamos al conjunto A/I como el **álgebra cociente**. ■

A continuación aprovechamos la definición de álgebras cocientes para mostrar los grupos $\mathbb{Z}_n$, cuyos elementos clasifican a los enteros de acuerdo a su residuo módulo n.

Ejemplo 1.1.12. Sea $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0,\ 1, \cdots,\ n-1\}$ el grupo de las clases residuales módulo n. De esta manera, $a \equiv b \pmod n$ si y solo si, la operación $(a-b)/n$ tiene residuo cero. Por ejemplo en $\mathbb{Z}_3$, $8 \equiv 5 \pmod 3$ luego $8 \in 5+3\mathbb{Z}$ o también, $5 \in 8+3\mathbb{Z}$. En general el representante de clase es el menor entero de cada clase, es decir, los números entre 0 y $n-1$, por eso tanto 5 como 8 pertenecen a la clase de $\overline{2} = 2+3\mathbb{Z}$.

En este sentido, el grupo $\mathbb{Z}_2 = \{0,\ 1\}$ será de suma importancia más adelante en el desarrollo de este trabajo.

1.1.3. Teorema fundamental de homomorfismos

Una transformación lineal que además separa el producto del álgebra se conoce como un homomorfismo de álgebras. Estos homomorfismos son importantes pues proporcionan una herramienta para comparar álgebras y aprovechar propiedades de unas en otras.

Definición 1.1.13. Dadas A_1 y A_2 dos álgebras (sobre $\mathbb{F}$) entonces un **homomorfismo de álgebras** $\varphi : A_1 \to A_2$ es una transformación lineal que cumple que

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$$

para todo $a,\ b \in A_1$.

Un **isomorfismo** es un homomorfismo de álgebras biyectivo. Dada un álgebra A, un **endomorfismo** es un homomorfismo de A en A; el espacio de todos los endomorfismos de A en A se denota como $\mathrm{End}(A)$.

Un **automorfismo** es un isomorfismo de A en A; al espacio de automorfismos se denota por $\mathrm{Aut}(A)$.

De acuerdo con esto concluimos que $\mathrm{Aut}(A) \subseteq \mathrm{End}(A)$.

Proposición 1.1.14. Dada A un álgebra, entonces $\mathrm{End}(A)$ es un álgebra bajo las operaciones usuales de suma y multiplicación de funciones; esto es,

$$\begin{aligned}(\varphi_1 + \varphi_2)(a) &= \varphi_1(a) + \varphi_2(a);\\ (\alpha\varphi_1)(a) &= \alpha\varphi_1(a);\\ (\varphi_1\varphi_2)(a) &= \varphi_1(a)\varphi_2(a).\end{aligned}$$

para todo $\varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathrm{End}(A)$ y todo $\alpha \in \mathbb{F}$.

Demostración. Para ver A1 sean $\varphi_1,\ \varphi_2$ yφ_3 elementos de $\mathrm{End}(A)$; tenemos que

$$\begin{aligned}(\varphi_1 + \varphi_2)\varphi_3(a) &= (\varphi_1 + \varphi_2)(a) + \varphi_3(a)\\ &= [\varphi_1(a) + \varphi_2(a)]\varphi_3(a)\\ &= \varphi_1(a)\varphi_3(a) + \varphi_2(a)\varphi_3(a)\\ &= (\varphi_1\varphi_3)(a) + (\varphi_2\varphi_3)(a)\\ &= [\varphi_1\varphi_3 + \varphi_2\varphi_3](a).\end{aligned}$$

El axioma A2 lo obtenemos de manera análoga. Para A3 tenemos,

$$\begin{aligned}[\alpha(\varphi_1\varphi_2)](a) = \alpha(\varphi_1\varphi_2)(a) &= \alpha\ \varphi_1(a)\varphi_2(a)\\ &= [\alpha\varphi_1(a)]\varphi_2(a) = [(\alpha\varphi_1)\varphi_2](a)\\ &= \varphi_1(a)[\alpha\varphi_2(a)] = [\varphi_1(\alpha\varphi_2)](a)\end{aligned}$$

para todo $a \in A$. ■

El kernel y la imagen de un homomorfismo son ejemplos de ideales en el espacio de salida y llegada respectivamente, con lo cual, tiene sentido definir cocientes a partir de estos. A continuación definimos ambos objetos y mostramos algunos resultados interesantes.

Definición 1.1.15. Dado $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de álgebras, definimos

- El **kernel** o **núcleo** de φ como $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$.
- La **imagen** de φ como $\mathrm{Im}(\varphi) = \{\varphi(a) \in B \mid a \in A\}$.

La imagen de un subconjunto S de A se define como $\varphi(S) = \{\varphi(a) \in B \mid a \in S\}$.

Proposición 1.1.16. Dado $\varphi : A \to B$ un homomorfismo de álgebras, tenemos lo siguiente:

(1) Si S es una subálgebra de A entonces $\varphi(S)$ es una subálgebra de B.

(2) φ es inyectivo si y solo si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

(3) Si J es un ideal de B, entonces el conjunto $\varphi^{-1}(J) = \{a \in A \mid \varphi(a) \in J\}$ es un ideal de A. En particular esto prueba que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ es un ideal de A.

Demostración. (1) Dados b_1 y b_2 en $\varphi(S)$ existen a_1 y a_2 en S tales que $\varphi(a_1) = b_1$ y $\varphi(a_2) = b_2$, luego $b_1b_2 = \varphi(a_1)\varphi(a_2) = \varphi(a_1a_2) \in \varphi(S)$ puesto que $a_1a_2 \in S$.

En (2) si φ es inyectivo, inmediatamente tenemos que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ (pues $\varphi(0) = 0$). En el otro sentido, si $\varphi(a_1) = \varphi(a_2)$ entonces $\varphi(a_1 - a_2) = \varphi(a_1) - \varphi(a_2) = 0$ de modo que $a_1 - a_2 \in \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$ es decir, $a_1 - a_2 = 0$ equivalente a tener $a_1 = a_2$.

Para probar (3) queremos ver que $\varphi^{-1}(J)A \subseteq \varphi^{-1}(J)$. Dadas $a_1 \in \varphi^{-1}(J)$ y $a_2 \in A$ entonces tenemos que $\varphi(a_1) \in J$, luego $\varphi(a_1a_2) = \varphi(a_1)\varphi(a_2) \in J$, y comprobamos que $a_1a_2 \in \varphi^{-1}(J)$; análogamente comprobamos que $A\varphi^{-1}(J) \subseteq \varphi^{-1}(J)$. De esta manera, $\varphi^{-1}(J)$ es ideal de A. ■

Definición 1.1.17. El **homomorfismo canónico** entre un álgebra A y su cociente A/I, con I ideal de A, es $\pi : A \to A/I$ definido por $\pi(a) = a + I$.

Notemos que π es sobreyectivo por definición, y que gracias a la operación punto a punto de la Proposición 1.1.11, tenemos que π es transformación lineal,

$$\pi(\alpha a + \beta b) = (\alpha a + \beta b) + I = \alpha(a + I) + \beta(b + I) = \alpha\pi(a) + \beta\pi(b),$$

además, π es homomorfismo de álgebras como mostramos a continuación,

$$\pi(ab) = ab + I = (a + I)(b + I) = \pi(a)\pi(b).$$

Por último, notemos que $I = \mathrm{Ker}(\pi)$ pues dado $a \in I$ entonces $\pi(a) = a + I = I$, luego $a \in \mathrm{Ker}(\pi)$; por otra parte, si $a \in \mathrm{Ker}(\pi)$ entonces $a + I = \pi(a) = I$, de donde se infiere que $a \in I$.

De esta manera, estamos en condiciones de probar, en el siguiente teorema, un importante resultado del álgebra universal, el teorema fundamental de homomorfismos para álgebras.

Teorema 1.1.18. Si A, B y C son álgebras sobre un campo $\mathbb{F}$, y tenemos que $f : A \to B$ y $g : A \to C$ son homomorfismos sobreyectivos, entonces $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ si y solo si existe un único homomorfismo sobreyectivo $h : B \to C$ tal que $h \circ f = g$. Además, h es un isomorfismo si y solo si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[dr, "f"'] & C \\ & B \arrow[u, dashed, two heads, "h"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. Dado $b \in B$, puesto que f es un homomorfismo sobreyectivo entonces existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Ya que g también es sobre, podemos definir $h : B \to C$ tal que $h(b) = g(a)$, de esta manera tenemos que $(h \circ f)(a) = g(a)$ para todo $a \in A$. Primero veamos que h está bien definido. Dados $b_1,\ b_2 \in B$, existen a_1 y a_2 en A tal que $f(a_1) = b_1$ y $f(a_2) = b_2$; si $b_1 = b_2$ entonces $f(a_1) = f(a_2)$ y en consecuencia $f(a_1 - a_2) = f(a_1) - f(a_2) = 0$, luego $a_1 - a_2 \in \mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$, entonces $g(a_1) - g(a_2) = g(a_1 - a_2) = 0$ y tenemos que $g(a_1) = g(a_2)$ o lo que es equivalente, $h(b_1) = h(b_2)$, de modo que h está bien definido.

Ahora, h es transformación lineal puesto que

$$\begin{aligned}
h(\alpha b_1 + \beta b_2) &= h(\alpha f(a_1) + \beta f(a_2)) = h(f(\alpha a_1 + \beta a_2)) \\
&= (h \circ f)(\alpha a_1 + \beta a_2) = g(\alpha a_1 + \beta a_2) \\
&= \alpha g(a_1) + \beta g(a_2) = \alpha(h \circ f)(a_1) + \beta(h \circ f)(a_2) \\
&= \alpha h(f(a_1)) + \beta h(f(a_2)) \\
&= \alpha h(b_1) + \beta h(b_2),
\end{aligned}$$

para todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{F}$. También es homomorfismo de álgebras; veamos,

$$\begin{aligned}
h(b_1 b_2) &= h(f(a_1)f(a_2)) = h(f(a_1 a_2)) \\
&= (h \circ f)(a_1 a_2) = g(a_1 a_2) = g(a_1)\, g(a_2) \\
&= (h \circ f)(a_1)\, (h \circ f)(a_2) = h(f(a_1))\, h(f(a_2)) \\
&= h(b_1)h(b_2).
\end{aligned}$$

Resta probar que h es sobreyectiva, es decir, dado $c \in C$, queremos ver que existe $b \in B$ tal que $h(b) = c$. Puesto que g es sobreyectiva, existe $a \in A$ tal que $g(a) = c$, luego $h(f(a)) = (h \circ f)(a) = g(a) = c$ y encontramos que $b = f(a)$. Así, h es un homomorfismo sobreyectivo de B en C como se quería ver; más aún, si h' es otro homomorfismo sobreyectivo que también satisface $h' \circ f = g$ entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
h'(b) &= h'(f(a)) = (h' \circ f)(a) = g(a) \\
&= (h \circ f)(a) = h(f(a)) = h(b)
\end{aligned}$$

para todo $b \in B$, luego $h' = h$ y tenemos que h es único. En el otro sentido, para todo $a \in \operatorname{Ker}(f)$ tenemos que $f(a) = 0$, luego

$$g(a) = (h \circ f)(a) = h(f(a)) = h(0) = 0$$

y en consecuencia $a \in \operatorname{Ker}(g)$, lo que prueba que $\operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Ker}(g)$.

Si h es un isomorfismo, se quiere ver $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(g)$. Dado $a \in \operatorname{Ker}(g)$ tenemos que $h(f(a)) = (h \circ f)(a) = g(a) = 0$, pero h es inyectiva, entonces $f(a) = 0$, luego $a \in \operatorname{Ker}(f)$ en consecuencia $\operatorname{Ker}(g) \subset \operatorname{Ker}(f)$ y comprobamos que si h es un isomorfismo entonces $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(g)$. En el sentido opuesto, si $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(g)$ queremos ver que h es un isomorfismo. En la primera parte de esta demostración comprobamos que h

es sobre cuando $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$; resta probar que h es inyectiva bajo la condición de que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(g)$. Dado $b \in \mathrm{Ker}(h)$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$, entonces $g(a) = (h \circ f)(a) = h(f(a)) = h(b) = 0$, de modo que $a \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(f)$, luego $b = f(a) = 0$ y comprobamos que h también es inyectiva. ■

Teorema 1.1.19. Si $g : A \to B$ es un homomorfismo de álgebras sobreyectivo, y $\mathrm{Ker}(g) = K$ entonces hay un único isomorfismo $h : A/K \to B$ tal que $h(a+K) = g(a)$ para todo $a \in A$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[dr, "\pi"'] & B \\ & A/K \arrow[u, dashed, two heads, "h"'] \end{tikzcd}$$

Demostración. En Proposición 1.1.16 comprobamos que K es ideal de A; de la Definición 1.1.17 sea $\pi : A \to A/K$. Dado que tenemos que $\mathrm{Ker}(\pi) = K = \mathrm{Ker}(g)$ entonces en virtud del Teorema 1.1.18 existe un único isomorfismo $h : A/K \to B$ tal que $h(a+K) = g(a)$ para todo $a \in A$. ■

Finalizamos esta sección definiendo algunas álgebras más:

Definición 1.1.20. Dada un álgebra A, para todo $a, b, c \in A$ definimos:

- A es asociativa si $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- A es conmutativa si $a \cdot b = b \cdot a$
- A es unitaria si A tiene una unidad 1 tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

Ejemplo 1.1.21. 1. $\mathbb{F}$ es asociativa, conmutativa y unitaria.

2. $UT_n(\mathbb{F})$ es asociativa y unitaria, pero es no conmutativa.

1.1.4. Álgebras libres

Los espacios de polinomios definidos a continuación, satisfacen ciertas características fundamentales que se plantean importantes en el desarrollo de este trabajo. El álgebra libre cociente con el ideal generado por polinomios que asocian (y conmutan), es el álgebra relativamente libre asociativa (y conmutativa). Como explicamos antes, los polinomios módulo estos ideales, adquieren propiedades como las de asociar o conmutar y en consecuencia se pueden expresar de manera compacta en relación a su forma original (ver [9]). A continuación definimos dichos objetos y demostramos algunas de sus propiedades.

Definición 1.1.22. Sea $X = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots\}$, con $i_j \in \Delta$ (un conjunto arbitrario de índices), el **álgebra libre** generada por X es el álgebra F que cumple la propiedad de que para cualquier álgebra A y cualquier función $f : X \to A$ existe un único homomorfismo de álgebras $\phi : F \to A$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\bar{i}"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "\phi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta. $\bar{i}$ es la función inclusión.

Proposición 1.1.23. El álgebra $\mathbb{F}\{X\}$ cuya base son los monomios no asociativos ni conmutativos $x_{i_1}\ x_{i_2} \cdots x_{i_n}$, y con el producto

$$(x_{i_1}\ \cdots x_{i_n})(x_{j_1}\ \cdots x_{j_n}),$$

es el álgebra libre.

Demostración. Dada A un álgebra y $f : X \to A$, definimos $\phi(x_i) = f(x_i)$ para todo $i \in \Delta$. Luego extendemos linealmente a ϕ es decir,

$$\phi(\alpha x_{i_1} x_{i_2} + \beta x_{i_3} x_{i_4}) = \alpha\phi(x_{i_1})\phi(x_{i_2}) + \beta\phi(x_{i_3})\phi(x_{i_4}).$$

Ahora veamos que ϕ es única. Supongamos que existe ψ otro homomorfismo de álgebras tal que $\psi(x_i) = f(x_i)$ para todo $i \in \Delta$, y dado $y = \alpha x_{i_1} x_{i_2} + \beta x_{i_3} x_{i_4} \in \mathbb{F}\{X\}$, entonces

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \psi(\alpha x_{i_1} x_{i_2} + \beta x_{i_3} x_{i_4}) = \alpha\psi(x_{i_1})\psi(x_{i_2}) + \beta\psi(x_{i_3})\psi(x_{i_4}) \\ &= \alpha f(x_{i_1}) f(x_{i_2}) + \beta f(x_{i_3}) f(x_{i_4}) = \alpha\phi(x_{i_1})\phi(x_{i_2}) + \beta\phi(x_{i_3})\phi(x_{i_4}) \\ &= \phi(\alpha x_{i_1} x_{i_2} + \beta x_{i_3} x_{i_4}) = \phi(y), \end{aligned}$$

para todo $y \in \mathbb{F}\{X\}$, luego $\psi = \phi$ y tenemos que ϕ es único. ■

Ejemplo 1.1.24. Si $X = \{x, y\}$ entonces una base para $\mathbb{F}\{X\}$ es

$$\{1,\ x,\ y,\ xx,\ yy,\ xy,\ yx,\ (xy)y,\ x(yy),\ (yy)x,\ y(yx),$$
$$(xx)y,\ x(xy),\ (xy)x,\ x(yx),\ (yx)x,\ y(xx),\ (yx)y,\ y(xy),\ xxx,\ yyy, \cdots\}$$

Definición 1.1.25. Sea $X = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots\}$, donde los i_j pertenecen a un conjunto arbitrario de índices Δ. El **álgebra libre asociativa** sobre X es el álgebra asociativa F que cumple la propiedad de que para cualquier álgebra asociativa A y cualquier función $f : X \to A$ existe un único homomorfismo de álgebras asociativas $\phi : F \to A$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\bar{i}"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "\phi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 1.1.26. El álgebra de polinomios asociativos $\mathbb{F}\langle X\rangle$ es el álgebra libre asociativa sobre X.

Demostración. La prueba es análoga a la de la proposición (1.1.23). ■

Ejemplo 1.1.27. Sea $X = \{x, y\}$ y sea $I = \langle (xy)z - x(yz)\rangle$ para todo $x,\ y,\ z \in \mathbb{F}\{X\}$, el ideal generado por la relación de asociatividad. Las clases en el conjunto $\mathbb{F}\{X\}/I$ quedan definidas por la relación de asociatividad, por ejemplo

$$x(xy) = (xx)y = x^2y$$

Así, muchos de los elementos de la base de $\mathbb{F}\{X\}$ se definen por un único representante en $\mathbb{F}\{X\}/I$. De esta manera, $\mathbb{F}\{X\}/I \cong \mathbb{F}\langle X\rangle$ y, una base para $\mathbb{F}\langle X\rangle$ es

$$\{1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ yx,\ y^2,\ xy^2,\ yxy,\ y^2x,\ x^2y,\ xyx,\ yx^2,\ x^3,\ y^3, \cdots\}$$

Definición 1.1.28. Sea $X = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots\}$, donde los i_j pertenecen a un conjunto de índices arbitrario Δ. El **álgebra libre asociativa y conmutativa** sobre X es el álgebra asociativa y conmutativa F que cumple la propiedad de que para cualquier álgebra asociativa y conmutativa A y cualquier función $f : X \to A$ existe un único homomorfismo de álgebras asociativas y conmutativas $\phi : F \to A$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "\bar{i}"] \arrow[dr, "f"'] & F \arrow[d, "\phi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

conmuta.

Proposición 1.1.29. El álgebra de polinomios asociativos y conmutativos $\mathbb{F}[X]$ es el álgebra asociativa y conmutativa libre sobre X

Demostración. La prueba es análoga a la de la proposición (1.1.23). ■

Ejemplo 1.1.30. Sea $X = \{x, y\}$ y sea $I = \langle (xy)z - x(yz),\ xy - yx \rangle$ para todo $z \in X$ el ideal generado por las relaciones de asociatividad y conmutatividad. Las clases en el conjunto $\mathbb{F}\{X\}/I$ quedan definidas por la relación de asociatividad y conmutatividad; por ejemplo

$$x(xy) = (xx)y = x^2y = yx^2.$$

Así, muchos de los elementos de la base de $\mathbb{F}\{X\}$ se definen por un único representante en $\mathbb{F}\{X\}/I$. De esta manera, $\mathbb{F}\{X\}/I \cong \mathbb{F}[X]$ y, una base para $\mathbb{F}[X]$ es

$$\{1,\ x,\ y,\ x^2,\ xy,\ y^2,\ xy^2,\ x^2y,\ x^3,\ y^3, \cdots\}.$$

Los polinomios de grado menor o igual que 2 son una subálgebra de $\mathbb{F}[X]$.

1.2. PI-Álgebras

Dada un álgebra cualquiera se hace de especial interés determinar si existe algún polinomio no trivial del álgebra relativamente libre, tal que al ser evaluado en cualesquiera de los elementos del álgebra, se anule; de existir, diremos que tal álgebra cuenta con al menos una identidad polinomial, en cuyo caso es una PI-álgebra. De hecho, para cualquier álgebra, un problema importante es ver si existe algún conjunto finito de polinomios que genere al conjunto de todas sus identidades polinomiales (si este existe). En este trabajo centraremos nuestra atención en encontrar dicho conjunto para el álgebra de matrices triangulares de tamaño dos, caracterización que realizaremos más adelante en el capítulo 3.

En esta sección, de acuerdo con Drensky en [9] y Giambruno en [16], conoceremos las definiciones básicas concernientes a PI-álgebras, mostraremos algunos ejemplos de interés, y también veremos que de hecho es posible, para ciertos ideales del álgebra relativamente libre, determinar el conjunto de sus identidades polinomiales.

1.2.1. Identidades Polinomiales

Dado $X = \{x_1,\ x_2, \cdots\}$ un conjunto numerable de variables, y $\mathbb{F}\langle X\rangle$ el álgebra libre asociativa sobre X, empezamos con lo siguiente:

Definición 1.2.1. Sea $f = f(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ un polinomio y sea A un álgebra asociativa. Decimos que $f \equiv 0$ es una **identidad polinomial** para A si

$$f(a_1, \cdots, a_n) = 0$$

para todo $a_1, \cdots, a_n \in A$. En ocasiones escribiremos f en lugar de $f \equiv 0$ para referirnos a una identidad polinomial.

Definición 1.2.2. Si un álgebra A satisface alguna identidad polinomial no trivial (es decir, $f \neq 0$) entonces A es una **PI-álgebra** (o simplemente A es PI).

Ejemplo 1.2.3.

1. Sea A un álgebra conmutativa. Entonces A es una PI-álgebra porque satisface la identidad polinomial

$$f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1 = [x_1, x_2],$$

es decir, $f(a_1, a_2) = a_1a_2 - a_2a_1 = a_1a_2 - a_1a_2 = 0$ para todo $a_1,\ a_2 \in A$.

2. Un álgebra A es **nil**, de índice n, si $a^n = 0$ para todo $a \in A$. Las álgebras nil son PI pues satisfacen la identidad $x^n \equiv 0$.

3. Un álgebra A es **nilpotente** de índice n si $a_1a_2 \cdots a_n = 0$ para todo $a_1,\ a_2, \cdots,\ a_n \in A$. En este caso A es PI, pues satisface la identidad

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1x_2 \cdots x_n \equiv 0.$$

4. Si A es un álgebra tal que $\dim(A) < n$ entonces A satisface la "**identidad estándar** f de grado n" definida por

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (\mathrm{sgn}\ \sigma)\ x_{\sigma(1)}\ x_{\sigma(2)} \cdots\ x_{\sigma(n)}.$$

Cabe resaltar que f es también conocido como **polinomio alternante**. Sea por ejemplo A un álgebra de dimensión 2, y sea $n = 3$. tenemos entonces que f definida por

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3 - x_1x_3x_2 + x_3x_1x_2 - x_3x_2x_1 + x_2x_3x_1 - x_2x_1x_3,$$

es la identidad estándar de grado 3. Dado que $\dim(A) = 2$, sea $\{e_1,\ e_2\}$ una base para A; si f se evalúa de modo que $x_1 = e_1$, $x_2 = e_2$ y $x_3 = \alpha e_1 + \beta e_2$, para cualesquier $\alpha,\ \beta \in \mathbb{F}$; tenemos entonces lo siguiente,

$$\begin{aligned} f(e_1,e_2,\alpha e_1+\beta e_2) &= e_1e_2(\alpha e_1+\beta e_2) - e_2e_1(\alpha e_1+\beta e_2) - (\alpha e_1+\beta e_2)e_2e_1 \\ &- e_1(\alpha e_1+\beta e_2)e_2 + (\alpha e_1+\beta e_2)e_1e_2 + e_2(\alpha e_1+\beta e_2)e_1 \\ &= \alpha e_1e_2e_1 + \beta e_1e_2^2 - \alpha e_2e_1^2 - \beta e_2e_1e_2 - \alpha e_1e_2e_1 - \beta e_2^2e_1 \\ &- \alpha e_1^2e_2 - \beta e_1e_2^2 + \alpha e_1^2e_2 + \beta e_2e_1e_2 + \alpha e_2e_1^2 + \beta e_2^2e_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Notemos además que

$$f(e_1,e_2,\alpha e_1+\beta e_2) = \alpha f(e_1,e_2,e_1) + \beta f(e_1,e_2,e_2) = 0 + 0 = 0.$$

Dado que cualquier otro elemento de A puede ser escrito como combinación lineal de e_1 y e_2; este, al ser evaluado en f, dará como resultado cero. En general, si $\dim A < n$ y f es la identidad estándar de grado n, tenemos que

$$\begin{aligned} f(e_1,e_2,\cdots,e_{n-1},a_n) &= f\left(e_1,e_2,\cdots,e_{n-1},\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_ie_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i\ f(e_1,e_2,\cdots,e_{n-1},e_i) \\ &= 0. \end{aligned}$$

De esta manera comprobamos también que toda álgebra de dimensión finita es PI-álgebra.

5. $\mathbb{F}\{X\}$ el álgebra libre no es PI pues no satisface ninguna identidad polinomial.

Proposición 1.2.4. $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ es una identidad polinomial para un álgebra A si y sólo si f está en el kernel de todos los homomorfismos de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ en A.

Demostración. Si $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ es una identidad polinomial para el álgebra A, queremos ver que $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, para cualquier homomorfismo φ de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ en A. Sea $\Phi = \{\varphi_i \mid i \in K\}$ el conjunto de todos los homomorfismos de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ en A con los que definimos

$$\varphi_i(x_j) = a_{ij}$$

con $i \in K,\ j = 1,\ 2\cdots$, y para cada $x_j \in X$. Sea

$$f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{l_1,\cdots,l_n} \alpha_{l_1\cdots l_n} x_{l_1}\cdots x_{l_n},$$

donde $1 \leq l \leq n$; veamos que $\varphi_i(f) = 0$ para todo $i \in K$.

$$\begin{aligned}\varphi_i(f(x_1,\cdots,x_n)) &= \varphi_i\left[\sum_{l_1,\cdots,l_n} \alpha_{l_1\cdots l_n} x_{l_1}\cdots x_{l_n}\right] = \sum_{l_1,\cdots,l_n} \alpha_{l_1\cdots l_n} \varphi_i(x_{l_1})\cdots\varphi_i(x_{l_n})\\ &= f(\varphi_i(x_{l_1}),\cdots,\varphi_i(x_{l_n}))\\ &= f(a_{il_1},\cdots,a_{il_n})\\ &= 0\end{aligned}$$

pues f es PI. De esta manera $f \in \bigcap_{\varphi\in\Phi} \mathrm{Ker}(\varphi)$.

En el otro sentido, si $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ para todo homomorfismo φ de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ en A queremos ver que f es una identidad polinomial para A. Dado que por hipótesis $\varphi(f) = 0$ para todo $\varphi \in \Phi$, tenemos que

$$0 = \varphi(f(x_1,\cdots,x_n)) = f(\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_n))$$

y dado $\{a_1,\cdots,a_n\}$ un subconjunto de A, existe $\varphi' \in \Phi$ tal que $\varphi'(x_1) = a_1,\cdots,\ \varphi'(x_n) = a_n$, luego

$$f(a_1,\cdots,a_n) = f(\varphi'(x_1),\cdots,\varphi'(x_n)) = 0$$

y tenemos que $f(a_1,\cdots,a_n) = 0$ para cualquier combinación de n elementos de A. Así, f es identidad polinomial para A. ■

1.2.2. T-ideales

Definición 1.2.5. Un ideal I de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ es **T-ideal** si $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo φ de $\mathbb{F}\langle X\rangle$.

Definición 1.2.6. Dada A un álgebra, denotamos por $\mathrm{Id}(A)$ al **conjunto de identidades polinomiales** de A, es decir,

$$\mathrm{Id}(A) = \{f \in \mathbb{F}\langle X\rangle \mid f \equiv 0 \ \text{ en } \ A\}.$$

Proposición 1.2.7. $\mathrm{Id}(A)$ es T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$.

Demostración. Veamos que $\mathrm{Id}(A)$ es subálgebra de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Es subespacio porque dados $f = f(x_{i_1},\cdots,x_{i_n})$ y $g = g(x_{j_1},\cdots,x_{j_m})$ en $\mathrm{Id}(A)$, y sea $\ell = \text{máx}\{m,\ n\}$ entonces

$$\begin{aligned}(\alpha f+\beta g)(a_1,\cdots,a_\ell) &= (\alpha f)(a_1,\cdots,a_\ell)+(\beta g)(a_1,\cdots,a_\ell)\\ &= \alpha f(a_1,\cdots,a_\ell)+\beta g(a_1,\cdots,a_\ell)\\ &= 0+0=0,\end{aligned}$$

entonces $\alpha f+\beta g \in \mathrm{Id}(A)$ para todo $f,\ g \in \mathrm{Id}(A)$ y todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{F}$. Además $fg \in \mathrm{Id}(A)$ porque

$$(fg)(a_1,\cdots,a_\ell) = f(a_1,\cdots,a_\ell)\cdot g(a_1,\cdots,a_\ell) = 0\cdot 0 = 0.$$

Comprobemos ahora que $\mathrm{Id}(A)$ es un ideal bilateral de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Para esto, debe ser que

$$\mathrm{Id}(A)\mathbb{F}\langle X\rangle \subseteq \mathrm{Id}(A) \qquad \text{y} \qquad \mathbb{F}\langle X\rangle\mathrm{Id}(A) \subseteq \mathrm{Id}(A).$$

Dados $f \in \mathrm{Id}(A)$ y $h \in \mathbb{F}\langle X\rangle$, se desea ver que $fh \in \mathrm{Id}(A)$. Veamos,

$$(fh)(a_1,\cdots,a_\ell) = f(a_1,\cdots,a_\ell)\ h(a_1,\cdots,a_\ell) = 0\ h(a_1,\cdots,a_\ell) = 0$$

entonces $fh \in \mathrm{Id}(A)$ y tenemos que $\mathrm{Id}(A)\mathbb{F}\langle X\rangle \subseteq \mathrm{Id}(A)$. La prueba para comprobar que $\mathbb{F}\langle X\rangle\mathrm{Id}(A) \subseteq \mathrm{Id}(A)$ es análoga. Para ver que $\mathrm{Id}(A)$ es T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ queremos ver que

$\varphi(\mathrm{Id}(A)) \subseteq \mathrm{Id}(A)$ para todo endomorfismo φ de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Dados $f \in \mathrm{Id}(A)$ y $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{F}\langle X\rangle)$

$$\begin{aligned}
\varphi(f)(a_1,\cdots,a_n) &= f(\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_n))(a_1,\cdots,a_n)\\
&= f(g_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,g_n(x_1,\cdots,x_n))(a_1,\cdots,a_n)\\
&= f(g_1(a_1,\cdots,a_n),\cdots,g_n(a_1,\cdots,a_n))\\
&= f(b_1,\cdots,b_n) = 0
\end{aligned}$$

de donde concluimos que $\mathrm{Id}(A)$ es T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. ■

Proposición 1.2.8. Cada T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ es el conjunto de identidades de alguna álgebra.

Demostración. Dado I un T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$, veamos que $I = \mathrm{Id}(\mathbb{F}\langle X\rangle/I)$. Dado $f \in I$ queremos ver que $f \in \mathrm{Id}(\mathbb{F}\langle X\rangle/I)$ es decir, $f(\overline{g_1},\cdots,\overline{g_n}) = 0$ para todo $\overline{g_1},\cdots,\overline{g_n} \in \mathbb{F}\langle X\rangle/I$. Sea $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{F}\langle X\rangle)$ tal que $\varphi(x_1) = g_1,\cdots,\varphi(x_n) = g_n$, entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(f(x_1,\cdots,x_n)) &= f(\varphi(x_1),\cdots,\varphi(x_n))\\
&= f(g_1,\cdots,g_n) \in I
\end{aligned}$$

para todo $g_1,\cdots,g_n \in \mathbb{F}\langle X\rangle$; luego tenemos que

$$f(\overline{g_1},\cdots,\overline{g_n}) = \overline{f(g_1,\cdots,g_n)} = I$$

es decir, $f(\overline{g_1},\cdots,\overline{g_n})$ es la clase del cero $(\overline{0})$ para cualquier subconjunto de n elementos de $\mathbb{F}\langle X\rangle/I$, en consecuencia $f \in \mathrm{Id}(\mathbb{F}\langle X\rangle/I)$.

De otra parte, dada $f \in \mathrm{Id}(\mathbb{F}\langle X\rangle/I)$ queremos ver que $f \in I$, es decir, $\overline{f} = I$. Veamos,

$$\overline{f(x_1,\cdots,x_n)} = f(\overline{x_1},\cdots,\overline{x_n}) = I \quad \text{pues} \quad f \in \mathrm{Id}(\mathbb{F}\langle X\rangle/I),$$

de esta manera $f \in I$ y concluimos que $I = \mathrm{Id}(\mathbb{F}\langle X\rangle/I)$. ■

1.2.3. Variedades

Definición 1.2.9. Dado S un subconjunto de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ denotamos por $\langle S\rangle_{\mathrm{T}}$ al **T-ideal** generado por S. Definimos a $\langle S\rangle_{\mathrm{T}}$ como la intersección de todos los T-ideales que contienen a S; es decir,

$$\langle S\rangle_{\mathrm{T}} = \bigcap_{I\supseteq S} I, \quad (I \text{ es T-ideal})$$

Definición 1.2.10. Dado S un subconjunto de polinomios de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ y $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle$; decimos que f es una **consecuencia** de S si $f \in \langle S\rangle_{\mathrm{T}}$.

Proposición 1.2.11. $\langle S\rangle_{\mathrm{T}}$ generado como T-ideal tiene la siguiente caracterización:

$$\langle S\rangle_{\mathrm{T}} = \left\{ \sum p_i \; f_i(h_{i_1}, \cdots, h_{i_n}) \; q_i \;\middle|\; f_i \in S, \;\; p_i, \; h_{i_j}, \; q_i \in \mathbb{F}\langle X\rangle \right\}$$

Demostración. Si $S = \emptyset$ (el conjunto vacío), entonces $\langle S\rangle_{\mathrm{T}} = \bigcap_{I \supseteq \emptyset} I$, incluyendo por supuesto al ideal $I = \{0\}$; de esta manera, cero es el único elemento que pertenece a $\langle S\rangle_{\mathrm{T}}$ y concluimos que $\langle S\rangle_{\mathrm{T}} = \{0\}$. Ahora sea $S \neq \emptyset$ y sea

$$G = \left\{ \sum p_i \; f_i(h_{i_1}, \cdots, h_{i_n}) \; q_i \;\middle|\; f_i \in S, \;\; p_i, \; h_{i_j}, \; q_i \in \mathbb{F}\langle X\rangle \right\}$$

y veamos primero que $\langle S\rangle_{\mathrm{T}} \subseteq G$ es decir, que G es un T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ que contiene a S.

- Dado $f \in S$, entonces $f = 1f1$, luego $S \subseteq G$.

- Para probar que G es una subálgebra de $\mathbb{F}\langle X\rangle$, debe verse antes que G es un subespacio de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Sean $p, \; q \in G$ tal que,

  $$p = \sum g_{i_1} \; f_i(h_{i_1}, \cdots, h_{i_n}) \; g_{i_2} \qquad \text{y} \qquad q = \sum g'_{i_1} \; f'_i(h'_{i_1}, \cdots, h'_{i_n}) \; g'_{i_2}$$

  ahora, $p + q$ se escribe como

  $$p + q = \sum_{i=1}^{n} g_{i_1} \; f_i(h_{i_1}, \cdots, h_{i_n}) \; g_{i_2} + \sum_{i=n+1}^{m} g'_{i_1} \; f'_i(h'_{i_1}, \cdots, h'_{i_n}) \; g'_{i_2} = \sum_{j=1}^{m} g^*_{i_1} f^*_i g^*_{i_2}$$

  donde $g^*_{i_j} = \begin{cases} g_{i_j} & \text{si} \quad 1 \leq j \leq n \\ g'_{i_j} & \text{si} \quad n+1 \leq j \leq m \end{cases}$ y también $f^*_i = \begin{cases} f_i & \text{si} \quad 1 \leq j \leq n \\ f'_i & \text{si} \quad n+1 \leq j \leq m \end{cases}$

  es decir, se organizan los sumandos de manera que hasta cierto punto encontramos a los de p, y después los de q. Por otra parte, para todo $\alpha \in \mathbb{F}$ tenemos que

  $$\alpha \sum g_{i_1} \; f_i(h_{i_1}, \cdots, h_{i_n}) \; g_{i_2} = \sum (\alpha g_{i_1}) \; f_i(h_{i_1}, \cdots, h_{i_n}) \; g_{i_2},$$

  con $\alpha g_{i_1} \in \mathbb{F}\langle X\rangle$; luego G es cerrado también para el producto por escalar. Ahora comprobemos que G es subálgebra. Queremos ver que $pq \in G$ veamos,

$$\begin{aligned} pq &= \sum g_{i_1}\ f_i\ g_{i_2} \cdot \sum g'_{i_1}\ f'_i\ g'_{i_2} \\ &= (g_{1_1} f_1 g_{1_2} + \cdots + g_{n_1} f_n g_{n_2})(g'_{1_1} f'_1 g'_{1_2} + \cdots + g'_{m_1} f'_m g'_{m_2}) \\ &= (g_{1_1} f_1 g_{1_2})(g'_{1_1} f'_1 g'_{1_2}) + \cdots + (g_{n_1} f_n g_{n_2})(g'_{m_1} f'_m g'_{m_2}) \\ &= (g_{1_1} f_1 g_{1_2} g'_{1_1}) f'_1 g'_{1_2} + \cdots + (g_{n_1} f_n g_{n_2} g_{m_1}) f'_m g'_{m_2} \\ &= g^*_{1_1} f'_1 g'_{1_2} + \cdots + g^*_{m_1} f'_m g'_{m_2} \end{aligned}$$

puesto que $g^*_{1_1}, \cdots, g^*_{n_m} \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ tenemos que $pq \in G$, luego G es subálgebra de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Para ver que G es ideal, sea $g \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ entonces,

$$g \cdot \sum g_{i_1}\ f_i\ g_{i_2} = \sum g g_{i_1}\ f_i\ g_{i_2} = \sum g'_{i_1}\ f_i\ g_{i_2} \in G.$$

Análogamente para cuando g se opera por derecha.

- Ahora veamos que G es T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$. Dado $z \in G$ queremos ver que $\varphi(z) \in G$ para todo $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{F}\langle X\rangle)$ veamos,

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi\Big(\sum p_i\ f_i(h_{i_1}, \cdots, h_{i_n})\ q_i\Big) \\ &= \sum \varphi(p_i)\ \varphi[f_i(h_{i_1}, \cdots, h_{i_n})]\ \varphi(q_i) \\ &= \sum \varphi(p_i)\ f_i[\varphi(h_{i_1}), \cdots, \varphi(h_{i_n})]\ \varphi(q_i). \end{aligned}$$

Sean $r_i = \varphi(p_i)$, $s_i = \varphi(q_i)$ y $t_{i_j} = \varphi(h_{i_j})$ polinomios en $\mathbb{F}\langle X\rangle$, tenemos entonces que

$$\varphi(z) = \sum r_i\ f_i(t_{i_1}, \cdots, t_{i_n})\ s_i \in G,$$

de modo que G es un T-ideal que contiene a S, luego $\langle S\rangle_{\mathrm{T}} \subseteq G$.

Ahora comprobemos la contenencia recíproca. Dado I un T-ideal que contiene a S queremos ver que $G \subseteq I$. Sea $z = \sum g_{i_1}\ f_i\ g_{i_2} \in G$, como I contiene a S entonces $f_i \in I$ y dado que I es ideal entonces $z \in I$, en consecuencia $z \in \bigcap_{I \supseteq S} I$. Tenemos entonces que $G \subseteq \langle S\rangle_{\mathrm{T}}$ y concluimos que $\langle S\rangle_{\mathrm{T}} = G$. ■

Definición 1.2.12. Dos conjuntos de polinomios son **equivalentes** si estos generan el mismo T-ideal.

Definición 1.2.13. Un par de álgebras A_1 y A_2 se llaman **PI-equivalentes**, denotado por $A_1 \sim_{\mathrm{PI}} A_2$, si $\mathrm{Id}(A_1) = \mathrm{Id}(A_2)$.

Definición 1.2.14. Dado un conjunto no vacío $S \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle$, la clase de todas las álgebras asociativas A tales que $f \equiv 0$ en A para todo $f \in S$ se llama la **variedad** $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ determinada por S. Una variedad es no trivial si $S \neq \{0\}$.

Ejemplo 1.2.15. Sea $S = \{xy - yx\}$, entonces $\mathcal{V}(S)$ la variedad determinada por S consiste de todas las álgebras conmutativas.

Definición 1.2.16. Sea $\mathcal{V}$ una variedad, $A \in \mathcal{V}$ un álgebra y $Y \subseteq A$. Decimos que A es relativamente libre en Y con respecto a $\mathcal{V}$ si para alguna función $g : Y \to B$, donde B es algún álgebra, existe un único homomorfismo de álgebras $\varphi : A \to B$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "g"'] & A \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & B \end{tikzcd}$$

conmuta.

Observación: Si $\mathrm{Id}(\mathcal{V})$ es el conjunto de identidades polinomiales asociado a la variedad $\mathcal{V}$, entonces $\mathbb{F}\langle X\rangle/\mathrm{Id}(\mathcal{V})$ es el álgebra relativamente libre sobre el conjunto $\overline{X} = \{x + \mathrm{Id}(\mathcal{V}) \mid x \in X\}$.

Proposición 1.2.17. Hay una correspondencia uno a uno entre T-ideales de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ ($\mathcal{I}_{\mathrm{T}}(\mathbb{F}\langle X\rangle)$ y variedades de álgebras ($\mathscr{V}$). Esta correspondencia cumple que, dados $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2 \in \mathscr{V}$, entonces $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$ si y sólo si $I_1 \supseteq I_2$ donde I_1, $I_2 \in \mathcal{I}_{\mathrm{T}}(\mathbb{F}\langle X\rangle)$ son los T-ideales que determinan respectivamente a $\mathcal{V}_1$ y $\mathcal{V}_2$.

Demostración. Veamos primero que $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$ equivale a $I_1 \supseteq I_2$. Sea $f \in I_2$ entonces f es identidad polinomial para todo $A \in \mathcal{V}_2$, en consecuencia f es identidad polinomial para todo $A \in \mathcal{V}_1$, en particular f es identidad para $\mathbb{F}\langle \mathrm{X}\rangle/I_1$, luego $f \in I_1$. Así, $I_1 \supseteq I_2$.
En el otro sentido, sea $A \in \mathcal{V}_1$ entonces $f \equiv 0$ en A para todo $f \in I_1$, de modo que $f \equiv 0$ en A para todo $f \in I_2$, en consecuencia $A \in \mathcal{V}_2$. Concluimos entonces que $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}_2$ es equivalente a tener $I_1 \supseteq I_2$.

Para probar que $\mathcal{I}_{\mathrm{T}}(\mathbb{F}\langle X\rangle) \cong \mathscr{V}$ sea Γ la función que a cada T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ asigna la variedad de álgebras correspondiente, es decir,

$$\begin{aligned} \Gamma: \quad \mathcal{I}_{\mathrm{T}}(\mathbb{F}\langle X\rangle) &\longrightarrow \mathscr{V} \\ I \qquad &\longmapsto \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Esta función está bien definida puesto que dado $I \in \mathcal{I}_{\mathrm{T}}(\mathbb{F}\langle X\rangle)$, $\Gamma(I) = \mathcal{V}$ existe en $\mathscr{V}$ y es distinta de vacío ya que al menos $\mathbb{F}\langle X\rangle/I \in \mathcal{V}$ además, por la primera conclusión de esta prueba si $I_1 = I_2 \in \mathcal{I}_{\mathrm{T}}(\mathbb{F}\langle X\rangle)$ entonces $\Gamma(I_1) = \Gamma(I_2) \in \mathscr{V}$; dicha conclusión determina también que Γ es una función inyectiva. Probemos ahora que Γ es sobreyectiva.

Dado $\mathcal{W} \in \mathscr{V}$ queremos ver que existe $I \in \mathcal{I}_{\mathrm{T}}(\mathbb{F}\langle X\rangle)$ tal que $\Gamma(I) = \mathcal{W}$. Por definición para $\mathcal{W} \in \mathscr{V}$ existe $S \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle$ tal que $\mathcal{W} = \mathcal{W}(S)$. Sea $I = \langle S\rangle_{\mathrm{T}}$, entonces para todo $f \in I$, tenemos que $f \equiv 0$ para todo $A \in \mathcal{W}$. Veamos, dado $f \in I$ tenemos que

$$f = \sum p_i\, f_i(h_{i_1}, \cdots, h_{i_n})\, q_i, \quad \text{donde} \quad f_i \in S \;\text{ y }\; p_i, h_{i_j}, q_i \in \mathbb{F}\langle X\rangle$$

entonces

$$\begin{aligned} f(\vec{a}) &= \sum p_i(\vec{a})\, f_i(h_{i_1}(\vec{a}), \cdots, h_{i_n}(\vec{a}))\, q_i(\vec{a}) \\ &= \sum p_i(\vec{a})\, f_i(b_1, \cdots, b_n)\, q_i(\vec{a}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

con $h_{i_j}(a_j) = b_j \in A$ y, para todo $\vec{a} \in A^n$ y todo $A \in \mathcal{W}$. Notemos que $f(\vec{a}) = 0$ pues $f_i \equiv 0$ para todo $A \in \mathcal{W}$. De esta manera $f \equiv 0$ para todo $A \in \mathcal{W}$ y todo $f \in I$, como se quería ver; así, $\Gamma(I) = \mathcal{W}$. Dado que Γ es una función biyectiva, se ha comprobado que $\mathcal{I}_{\mathrm{T}}(\mathbb{F}\langle X\rangle) \cong \mathscr{V}$. ■

1.3. Álgebras graduadas

Dado un grupo arbitrario, podemos descomponer un álgebra cualquiera como suma directa de subespacios vectoriales marcados con los elementos del grupo; decimos que cada subespacio generado es de grado homogéneo el elemento correspondiente del grupo. A esta acción la llamamos graduación del álgebra, y es importante en este trabajo pues permite clasificar las identidades del espacio de matrices triangulares de orden dos de acuerdo a su grado homogéneo. Empezamos con lo siguiente:

Definición 1.3.1. Un álgebra A es **graduada** si admite una descomposición de la forma

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

donde cada uno de los A_n es un subespacio vectorial de A.

Definición 1.3.2. Sea G un grupo y A un álgebra; decimos que A es **G-graduada** si podemos escribir a A como una suma directa de subespacios A_g para cada $g \in G$, es decir,

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g,$$

y con la condición de que $A_g A_h \subseteq A_{gh}$ para todo $g,\ h \in G$. Los subespacios A_g se llaman **componentes homogéneas** de A. Un elemento $a \in A$ se llama homogéneo de grado g si $a \in A_g$.

Dado $a \in A$ podemos escribirlo como

$$a = \sum_{g \in G} a^{(g)}$$

de manera única, y donde $a^{(g)} \in A_g$ para todo $g \in G$.

Si $e \in G$ es la identidad de G entonces A_e es una subálgebra de A.

Definición 1.3.3. A un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada se le conoce como **superálgebra** .

Ejemplo 1.3.4. Sea $A = M_2(\mathbb{F})$ el álgebra de matrices de tamaño 2×2 y sea $\mathbb{Z}_2 = \{0,\ 1\}$ el grupo de orden 2. Entonces $A = A_0 \oplus A_1$ tiene estructura de superálgebra haciendo que

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a,\ d \in \mathbb{F} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

y

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; b,\ c \in \mathbb{F} \right\} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

sean las componentes homogéneas de A.

Demostración. Puesto que $\alpha x,\ x + y \in A_0$ para todo $x,\ y \in A_0$ y para todo $\alpha \in \mathbb{F}$ comprobamos que A_0 es subespacio de A, de manera análoga podemos comprobar que A_1 también lo es. Por otra parte, $A_0 \cap A_1 = \{0\}$ y $A = A_0 \oplus A_1$ como mostramos a continuación; dado $x \in M_2(\mathbb{F})$ tenemos que

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \in A_0 \oplus A_1,$$

probando así que $A \subseteq A_0 \oplus A_1$. La contenencia recíproca es trivial. Ahora se probará que $A_g A_h \subseteq A_{gh}$ para todo $g,\ h \in G$.

- Dados $x = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix}$ en A_0 tenemos que

$$xy = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & 0 \\ 0 & x_2y_2 \end{pmatrix} \in A_0,$$

  en consecuencia $A_0A_0 \subseteq A_0$.

- Ahora sean $x = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} \in A_0$ y $y = \begin{pmatrix} 0 & y_1 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix} \in A_1$ de esta manera,

$$xy = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & y_1 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_1y_1 \\ x_2y_2 & 0 \end{pmatrix} \in A_1$$

  de modo que $A_0A_1 \subseteq A_{0 \cdot 1} = A_1$. De manera análoga, $A_1A_0 \subseteq A_1$.

- Por último, dados $x = \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix} \in A_1$, y $y = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} \in A_1$ observamos que

$$xy = \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ x_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_1y_2 \\ x_2y_1 & 0 \end{pmatrix} \in A_1;$$

  así, $A_1A_1 \subseteq A_{1 \cdot 1} = A_0$.

De esta manera comprobamos que $M_2(\mathbb{F}) = A_0 \oplus A_1$ es una $\mathbb{Z}_2$-graduación. ■

Ejemplo 1.3.5. Un álgebra A puede ser graduada por un grupo G haciendo $A_e = A$ donde e es el elemento neutro de G, y $A_g = \{0\}$ para todo $g \neq e$. Esta se conoce como la graduación trivial.

Ejemplo 1.3.6. Sea $A = M_2(\mathbb{R})$ y $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1)\}$ el grupo de Klein. Sean también

$$A_{(0,0)} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1\right\}, \qquad A_{(1,0)} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = E_2\right\},$$
$$A_{(0,1)} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_3\right\}, \qquad A_{(1,1)} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = E_4\right\},$$

entonces

$$M_2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{g\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2} A_g$$

está $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2)$-graduada.

Demostración. Dado $x \in A_{(0,0)} \oplus A_{(1,0)} \oplus A_{(0,1)} \oplus A_{(1,1)}$ trivialmente $x \in M_2(\mathbb{R})$. Por otra parte, sea $x \in M_2(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{a+d}{2}E_1 + \frac{a-d}{2}E_2 + \frac{b+c}{2}E_3 + \frac{b-c}{2}E_4,$$

y tenemos que $x \in A_{(0,0)} \oplus A_{(1,0)} \oplus A_{(0,1)} \oplus A_{(1,1)}$, en consecuencia $M_2(\mathbb{R}) = \bigoplus\limits_{g\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2} A_g$. Ahora Verifiquemos que $A_{(0,1)}A_{(1,1)} \subseteq A_{(1,0)}$. Dados $x \in A_{(0,1)}$ y $y \in A_{(1,1)}$ tenemos que

$$xy = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha\beta & 0 \\ 0 & \alpha\beta \end{pmatrix} = -\alpha\beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in A_{(1,0)},$$

para todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$. Análogamente se prueba que $A_gA_h \subseteq A_{gh}$ para todo g y todo h en $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. ■

1.3.1. Ideal G-graduado

Definición 1.3.7. Un ideal I de un álgebra G-graduada A se llama **ideal G-graduado** si $I = \bigoplus_{g\in G} I_g$, donde $I_g = I \cap A_g$. En otras palabras I es graduado si, para todo $b \in I$, $b = \sum_{g\in G} b^{(g)}$ implica que $b^{(g)} \in I_g$ para todo $g \in G$.

Proposición 1.3.8. Si I es un ideal G-graduado de A entonces

$$A/I = \bigoplus_{g\in G} A_g/I_g$$

es un álgebra G-graduada, donde $(a+I)^{(g)} = a^{(g)} + I_g$.

Demostración. Dado $a + I \in A/I$ tenemos lo siguiente:

$$a + I = \sum_{g\in G} a^{(g)} + \sum_{g\in G} I_g = \sum_{g\in G}(a^{(g)} + I_g) = \sum_{g\in G}(a+I)^{(g)} \in \bigoplus_{g\in G} A_g/I_g.$$

La contenencia recíproca es equivalente. ■

A continuación definimos graduación para el álgebra relativamente libre:

Definición 1.3.9. Sea $\mathbb{F}\langle X\rangle$ el álgebra libre asociativa sobre un conjunto contable X y sea G un grupo finito. Escribimos X en la forma $X = \bigcup_{g\in G} X_g$, donde los $X_g = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, x_3^{(g)}, \cdots\}$ son conjuntos disjuntos. Las variables de X_g para algún $g \in G$ se conocen como homogéneas de grado g. El grado homogéneo de un monomio $x_1^{(g_1)}x_2^{(g_2)}\cdots x_n^{(g_n)} \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ es $g_1g_2\cdots g_n \in G$, mientras que su grado total es n. Denotamos por $\mathbb{F}\langle X\rangle^{(g)}$ al subespacio del álgebra $\mathbb{F}\langle X\rangle$ generado por todos los monomios de grado homogéneo g. Aquí $\mathbb{F}\langle X\rangle^{(g)}\mathbb{F}\langle X\rangle^{(h)} \subseteq \mathbb{F}\langle X\rangle^{(gh)}$ para todo $g,\ h \in G$. Se sigue que

$$\mathbb{F}\langle X\rangle = \bigoplus_{g\in G} \mathbb{F}\langle X\rangle^{(g)},$$

de tal manera que $\mathbb{F}\langle X\rangle$ es G-graduada. Denotamos por $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ al álgebra $\mathbb{F}\langle X\rangle$ con esta graduación. $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ es el **álgebra libre asociativa *G*-graduada**.

Ejemplo 1.3.10. Un polinomio $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ es

$$f = f\left(x_1^{(g_1)},\ x_1^{(g_2)},\ x_2^{(g_2)},\ x_3^{(g_2)}\right) = \underbrace{x_1^{(g_1)}x_3^{(g_2)}}_{f_1} - \underbrace{x_1^{(g_1)}x_1^{(g_2)}x_1^{(g_1)}x_2^{(g_2)}x_1^{(g_1)}x_3^{(g_2)}}_{f_2}.$$

Aquí el grado homogéneo de f_1 es g_1g_2 y su grado total es 2, mientras que el grado homogéneo de f_2 es $g_1g_2g_1g_2g_1g_2$ y su grado total es 6.

Definición 1.3.11. Dado G un grupo y dada A un álgebra G-graduada, decimos que un polinomio $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ es una **identidad polinomial *G*-graduada** de A si evaluando el polinomio $f = f\left(x_1^{(g_1)}, x_2^{(g_2)}, \cdots, x_n^{(g_n)}\right)$ en $a_1^{(g_1)}, a_2^{(g_2)}, \cdots, a_n^{(g_n)}$ obtenemos cero, es decir,

$$f\left(a_1^{(g_1)}, a_2^{(g_2)}, \cdots, a_n^{(g_n)}\right) = 0$$

para todo $a_1^{(g_1)} \in A_{g_1},\ a_2^{(g_2)} \in A_{g_2}, \cdots,\ a_n^{(g_n)} \in A_{g_n}$. Si A satisface una identidad G-graduada no trivial entonces A es PI-álgebra G-graduada.

Definición 1.3.12. Dada A un álgebra, denotamos por

$$\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A) = \{f \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}} \mid f \equiv 0 \ \text{ en } \ A\}$$

al **ideal de identidades polinomiales graduadas** de A.

A fin de probar que para $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ se satisface la propiedad universal, definimos lo siguiente:

Definición 1.3.13. Dadas A y B álgebras G-graduadas de modo que

$$A = \bigoplus_{g\in G} A_g \qquad \text{y} \qquad B = \bigoplus_{g\in G} B_g$$

se dice que $\varphi : A \to B$ es un **homomorfismo de álgebras G-graduadas** si es homorfismo de álgebras y además

$$\varphi(A_g) \subseteq B_g$$

para todo $g \in G$.

Proposición 1.3.14. $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ cumple la propiedad universal de álgebras G-graduadas: para toda álgebra G-graduada A y cualquier mapeo $f : X \to A$ que preserve graduaciones, existe un único homomorfismo de álgebras G-graduadas $\varphi : \mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}} \to A$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}} \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Demostración. Basta con definir $\varphi(x) = f(x)$ para todo $x \in X$ y extender linealmente a cada una de las variables de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$, es decir,

$$\varphi(\alpha xy + \beta zw) = \alpha\varphi(x)\varphi(y) + \beta\varphi(z)\varphi(w),$$

para todo $x,\ y,\ z,\ w \in X$ y todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{F}$. Ahora veamos que $\varphi(\mathbb{F}\langle X\rangle^{(g)}) \subseteq A_g$ para todo $g \in G$. Dado $a \in \varphi(\mathbb{F}\langle X\rangle^{(g)})$ queremos ver que $a \in A_g$. Puesto que $a \in \varphi(\mathbb{F}\langle X\rangle^{(g)})$ entonces

$$a = \varphi\left(\sum \alpha_i p_i^{(g)}\right) = \sum \alpha_i \varphi(p_i^{(g)}) = \sum \alpha_i f(p_i^{(g)}),$$

donde los $p_i^{(g)}$ son monomios no nulos de grado homogeneo g y $\alpha_i \in \mathbb{F}$. Puesto que f preserva graduaciones, tenemos que $f(p_i^{(g)}) \in A_g$ para cada $g \in G$, y como A_g es subespacio de A, entonces $a \in A_g$.

Ahora veamos que φ es único. Supongamos que existe ψ otro homomorfismo de álgebras tal que $\psi(x) = f(x)$ para todo $x \in X$, y dado $t = \alpha xy + \beta zw \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ entonces

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \psi(\alpha xy + \beta zw) = \alpha\psi(x)\psi(y) + \beta\psi(z)\psi(w)\\ &= \alpha f(x)f(y) + \beta f(z)f(w) = \alpha\varphi(x)\varphi(y) + \beta\varphi(z)\varphi(w)\\ &= \varphi(\alpha xy + \beta zw) = \varphi(t),\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$, luego $\psi = \varphi$ y tenemos que φ es único. ∎

Para $UT_2(\mathbb{F})$, podemos clasificar las identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas en $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$, como mostramos a continuación:

Ejemplo 1.3.15. Sea $A = UT_2(\mathbb{F})$ el álgebra de matrices triangulares superiores y sea $G = \mathbb{Z}_2 = \{0,\ 1\}$. Sean además

$$A_0 = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & c\end{pmatrix}\right\} \qquad \text{y} \qquad A_1 = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\},$$

las componentes homogeneas de A; es decir, $A = A_0 \oplus A_1$. En el Ejemplo 1.3.4 verificamos que esta es una $\mathbb{Z}_2$-graduación apropiada. El álgebra $UT_2(\mathbb{F})$ (graduada de esta manera), satisface la identidad

$$f\left(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)}\right) = x_1^{(1)}\ x_2^{(1)}$$

puesto que $a_1^{(1)}a_2^{(1)} = 0$ para todo $a_1^{(1)}, a_2^{(1)} \in A_1$, como mostramos a continuación,

$$\begin{pmatrix} 0 & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & d\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

En general $\mathrm{Id}(A) \subseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ puesto que, dada $f \in \mathrm{Id}(A)$ se sabe que $f(a_1, \cdots, a_n) = 0$ para cualquier $a_1, \cdots, a_n \in A$, luego f es identidad para A bajo cualquier G-graduación y tenemos entonces que $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$. La contenencia recíproca no es cierta puesto que, en $UT_2(\mathbb{F})$ por ejemplo, el polinomio $x_1^{(1)}\ x_2^{(1)} \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ no puede ser evaluado en los elementos de A_0 y de hecho, $f(x_1, x_2) = x_1x_2$ no es identidad polinomial para $UT_2(\mathbb{F})$.

Ejemplo 1.3.16. Otras identidades polinomiales $\mathbb{Z}_2$-graduadas en $UT_2(\mathbb{F})$ son:

1. $f\left(x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right) = x_1^{(1)}x_1^{(0)}x_2^{(1)}$ puesto que para cualquier $a^{(0)} \in A_0$ y para cualesquier

$b_1^{(1)},\ b_2^{(1)} \in A_1$ tenemos que:

$$f\left(a^{(0)}, b_1^{(1)}, b_2^{(1)}\right) = b_1^{(1)} a^{(0)} b_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. $f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) = \left[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right] = x_1^{(0)} x_2^{(0)} - x_2^{(0)} x_1^{(0)}$ puesto que para cualesquier $a_1^{(0)},\ a_2^{(0)} \in A_0$ tenemos que:

$$\begin{aligned} f(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}) = a_1^{(0)} a_2^{(0)} - a_2^{(0)} a_1^{(0)} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ 0 & cc' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a'a & 0 \\ 0 & c'c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

pues las entradas de cada matriz conmutan por pertenecer a $\mathbb{F}$.

1.3.2. Polinomios multilineales

Un polinomio multilineal es aquel cuyas variables aparecen todas de grado uno en cada uno sus monomios. De acuerdo con Giambruno en [16], debido a sus propiedades y caracterización, el estudio de las identidades polinomiales se puede simplificar usando polinomios multilineales. Más adelante en el Capítulo 3 mostraremos como cualquier identidad polinomial graduada del álgebra de matrices superiores de orden dos, puede linealizarse y escribirse como una identidad multilineal graduada. Empezamos con lo siguiente:

Definición 1.3.17. Un polinomio $f(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ es **multilineal** de grado n si cada variable $x_1, \cdots, x_n$ aparece de grado total 1 en cada uno de los monomios de f. Denotamos por $\boldsymbol{P_n}$ al subespacio de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ de todos los polinomios multilineales de grado n.

De esta manera,

$$P_n = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$$

y dado que el orden de S_n es $n!$, tenemos que $\dim(P_n) = n!$.

Ejemplo 1.3.18. Algunos polinomios multilineales y no multilineales son:

- $f(x, y, z) = xyz$ es multilineal.

- $f(x,y) = xy - yx$ es multilineal.
- $f(x,y,z) = xyz - xz$ no es multilineal.
- $f(x) = x^2$ no es multilineal.
- $f(x,y) = 3x - 6xy$ no es multilineal.

Ejemplo 1.3.19. Si $X = \{x,\ y,\ z\}$ entonces P_3 es el subespacio de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ de todos los polinomios multilineales de grado 3; es decir, $P_3 = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{xyz,\ xzy,\ yzx,\ yxz,\ zxy,\ zyx\}$ y, claramente $\dim(P_3) = 6$.

En el siguiente ejemplo mostramos como un polinomio se puede organizar como una suma de componentes homogéneas de grado $i = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ en la variable x.

Ejemplo 1.3.20. Sea f definida por

$$f(x,y,z) = x^2y + xz - x^3zy + zx^2 + y^2.$$

Este polinomio se puede organizar haciendo a f_i de grado i en la variable x, de la siguiente manera,

$$f(x,y,z) = \underbrace{y^2}_{f_0} + \underbrace{xz}_{f_1} + \underbrace{x^2y + zx^2}_{f_2} - \underbrace{x^3z}_{f_3} = \sum_{i=0}^{3} f_i(x,y,z).$$

Evaluando en $x = \alpha x,\ y = y,\ z = z$, tenemos,

$$\begin{aligned} f(\alpha x,y,z) &= \sum_{i=0}^{3} f_i(\alpha x,y,z) \\ &= y^2 + \alpha xz + \alpha^2(x^2y + zx^2) - \alpha^3x^3z \\ &= \sum_{i=0}^{3} \alpha^i f_i(x,y,z). \end{aligned}$$

La siguiente proposición plantea que, bajo ciertas condiciones, si la suma de varios polinomios es identidad polinomial, es porque cada uno de estos también lo es.

Proposición 1.3.21. Sea A un álgebra y

$$f(x_1,\cdots,x_t) = \sum_{i=0}^{n} f_i \ \in \mathbb{F}\langle X\rangle,$$

donde los f_i son las componentes homogéneas de grado i en la variable x_1. Si el campo $\mathbb{F}$ contiene más de n elementos (por ejemplo $\mathbb{F}$ infinito) y si $f \equiv 0$ es una identidad polinomial de A, entonces cada componente homogénea f_i con $i = 0, 1, \cdots, n$, es también una identidad polinomial de A.

Demostración. Elegimos $n+1$ elementos $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ distintos en $\mathbb{F}$. Como $\mathrm{Id}(A)$ es T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ (ver Proposición 1.2.7) para cada $j = 0, \cdots, n$ tenemos que $f(\alpha_j x_1, x_2, \cdots, x_t) \in \mathrm{Id}(A)$ y por lo tanto

$$f(\alpha_j x_1, x_2, \cdots, x_t) = \sum_{i=0}^{n} f_i(\alpha_j x_1, x_2, \cdots, x_t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i\, f_i(x_1, \cdots, x_t) \in \mathrm{Id}(A), \tag{1.5}$$

para cada $j = 0, \cdots, n$. Ahora, para cada $a_1, \cdots, a_t \in A$ y cada $i = 0, \cdots, n$ escribimos $\hat{f}_i = f_i(a_1 \cdots, a_n) \in A$ y, debido a la Ecuación (1.5) y a que $f \in \mathrm{Id}(A)$ obtenemos

$$f(\alpha_j a_1, \cdots, a_t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i\, f_i(a_1, \cdots, a_t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_j^i\, \hat{f}_i = 0. \tag{1.6}$$

Consideremos ahora, para los $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ elegidos, la matriz de Vandermonde

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \cdots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix}_{n+1}$$

que, junto a la Ecuación (1.6), nos permite escribir el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \cdots & \alpha_0^n \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \cdots & \alpha_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 & \cdots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_0 \\ \hat{f}_1 \\ \vdots \\ \hat{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{1.7}$$

y, dado que los $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ son distintos, tenemos que $\mathrm{Det}(\Delta) = \prod_{i<j} (\alpha_j - \alpha_i) \neq 0$; con lo cual el sistema (1.7) es un sistema homogéneo con una única solución, la trivial; es decir,

$$\hat{f}_i = f_i(a_1, \cdots, a_t) = 0$$

para cada $i = 0, \cdots, n$ y cada $a_1, \cdots, a_t \in A$, por lo tanto $f_i \in \mathrm{Id}(A)$ para cada $i = 0, \cdots, n$. ■

Ejemplo 1.3.22. Sean $x_1^{(0)} = y_1$, $x_2^{(0)} = y_2$ y $x^{(1)} = z$, y sea $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ de manera que $f(y_1, y_2, z) = zy_2zy_1z + z^2 + z[y_1, y_2] - zy_1z$. Aquí podemos ordenar el polinomio multihomogéneo como suma de componentes homogéneas de grado i en la variable z de la siguiente manera:

$$f(y_1, y_2, z) = \underbrace{zy_2zy_1z}_{f_3} + \underbrace{z^2 - zy_1z}_{f_2} + \underbrace{z[y_1, y_2]}_{f_1};$$

Evaluando en $UT_2(\mathbb{F}) = A_0 \oplus A_1$ encontramos que este polinomio es una identidad polinomial de $UT_2(\mathbb{F})$; por la Proposición 1.3.21, $f_i \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$, $i = 1, 2, 3$.

Definición 1.3.23. Dada un álgebra A, entonces $P_n \cap \mathrm{Id}(A)$ es el espacio de identidades multilineales y definimos el espacio vectorial

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}$$

como el espacio de elementos multilineales de grado n en el álgebra relativamente libre $\mathbb{F}\langle X\rangle/\mathrm{Id}(A)$. La ***n*-codimensión** de A denotada por $c_n(A)$ es

$$c_n(A) = \dim P_n(A) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}.$$

Ejemplo 1.3.24. Sea A un álgebra nilpotente de índice m (ver Ejemplo 1.2.3, item 3). Entonces para $n \geq m$, $c_n(A) = 0$. Veamos; si $n \geq m$ entonces A satisface la identidad polinomial

$$x_1x_2\cdots x_n \equiv 0$$

entonces

$$P_n \cap \mathrm{Id}(A) = \{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in s_n\} = P_n,$$

luego

$$\frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)} = \frac{P_n}{P_n} = \{P_n\} = \{0\}$$

y obtenemos que

$$c_n(A) = \dim\{0\} = 0$$

Ejemplo 1.3.25. Sea A un álgebra conmutativa. Entonces $c_n(A) = 1$ para todo $n \geq 1$. Veamos; sabemos que $x_1x_2 - x_2x_1 \equiv 0$ es una identidad polinomial de A, o lo que es equivalente, $x_1x_2 \equiv x_2x_1 \mod \mathrm{Id}(A)$ para todo $x_1, x_2 \in P_n$. Luego tenemos que en el cociente, las variables $x_1, \cdots, x_n$ conmutan y de esta manera obtenemos que

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)} = \mathrm{Span}\{x_1x_2\cdots x_n\},$$

y en consecuencia $c_n(A) = \dim \dfrac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)} = 1$.

Capítulo 2

Módulos y Representaciones

En este capítulo mostramos algunas propiedades sobre teoría de módulos para álgebras ([31]) y teoría de la representación en álgebras ([12]); estas serán importantes en el estudio de identidades multilineales para el álgebra de matrices triangulares de orden dos $UT_2(\mathbb{F})$.

Mostraremos que un módulo puede verse como una representación y viceversa, es decir, son equivalentes; por eso más adelante no haremos distinción entre ambas nociones. También presentaremos algunos conceptos fundamentales como el radical de Jacobson ([17]) y mostraremos las tablas de Young, entre otras técnicas de teoría de la representación necesarias en el desarrollo del Capítulo 3.

2.1. A-módulos

Definición 2.1.1. Dada un álgebra A, decimos que un grupo abeliano aditivo M es un ***A*-módulo** a izquierda (o una **acción** de A en M) si hay un mapeo de $A \times M$ en M, que envía la pareja (a, m) al elemento am, y que satisface las siguientes condiciones:

M1. $(a+b)m = am + bm$;

M2. $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2$;

M3. $a(bm) = (ab)m$.

para todo $m,\ m_1, m_2 \in M$ y todo $a,\ b \in A$. En tal caso decimos que A **actúa** sobre M. Si los elementos de A actúan por la derecha, se dice entonces que M es un A-módulo a derecha.

Dado N un subgrupo de M, decimos que N es un A-**submódulo** de M si $an \in N$ para todo $a \in A$ y todo $n \in N$. Si el álgebra A se sobrentiende, decimos simplemente que N es submódulo de M.

Decimos que un submódulo N de un módulo M es **propio** si $N \neq M$.

Ejemplo 2.1.2. Sea $\mathbb{F}G$ el álgebra de grupo (ver Ejemplo B.0.3). Un $\mathbb{F}G$-módulo (o simplemente G-módulo) es un grupo aditivo abeliano M en donde $\mathbb{F}G$ hace las veces de álgebra.

Ejemplo 2.1.3. Si $M = M_2(\mathbb{F})$ y $A = UT_2(\mathbb{F})$ se satisfacen los axiomas M1, M2 y M3 en consecuencia $M_2(\mathbb{F})$ es un $UT_2(\mathbb{F})$-módulo.

Proposición 2.1.4. Si M es un A-módulo a derecha entonces $S = \{m \in M \mid mA = \{0\}\}$ es un submódulo de M.

Demostración. Dados $m \in S$ y $a \in A$ queremos ver que $ma \in S$. En efecto, $(ma)A = m(aA) \subseteq mA = \{0\}$. De modo que $ma \in S$ y comprobamos que S es submódulo de M. ■

Proposición 2.1.5. Si M es un A-módulo a derecha y $m \in M$ entonces $mA = \{ma \mid a \in A\}$ es un submódulo de M.

Demostración. Dados $ma \in mA$ y $b \in A$ tenemos que $(ma)b = m(ab) \in mA$. ■

Definición 2.1.6. Si M y N son A-módulos a izquierda, la función $\varphi : M \to N$ es un **homomorfismo** de A-módulos si para cualquier $a, b \in A$ y $m, n \in M$ se cumple que

$$\varphi(am + bn) = a\varphi(m) + b\varphi(n).$$

Proposición 2.1.7. Dado M un A-módulo y $m \in M$, entonces la aplicación $\varphi : A \to M$ definida por $\varphi(a) = am$ es un homomorfismo de A-módulos.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\varphi(a_1 b_1 + a_2 b_2) &= (a_1 b_1 + a_2 b_2)m \\
&= (a_1 b_1)m + (a_2 b_2)m \\
&= a_1(b_1 m) + a_2(b_2 m) \\
&= a_1 \varphi(b_1) + a_2 \varphi(b_2),
\end{aligned}$$

para todo $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$. ■

Proposición 2.1.8. Dado $\varphi : A \to M$ un homomorfismo de A-módulos definido por $\varphi(a) = ma$ para un m fijo en M, entonces $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{b \in A \mid \varphi(b) = 0\}$ es un ideal a derecha de A.

Demostración. Dados $b \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ y $a \in A$ se sigue que $\varphi(ba) = m(ba) = (mb)a = \varphi(b)a = 0$ luego $ba \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ y se prueba que $\mathrm{Ker}(\varphi)A \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$. ∎

Proposición 2.1.9. Dado $\varphi : A \to M$ el homomorfismo de A-módulos tal que $\varphi(a) = ma$ para todo $a \in A$ y un m fijo en M, y dado I un ideal de A que contiene propiamente a $\mathrm{Ker}(\varphi)$, entonces el subconjunto $mI = \{mb \mid b \in I\}$ es un submódulo de M que es diferente de cero.

Demostración. Dados $b \in I$ y $a \in A$ entonces $(mb)a = m(ba) \in mI$ lo que comprueba que mI es submódulo de M. Puesto que I contiene propiamente a $\mathrm{Ker}(\varphi)$, existe $b \in I \backslash \mathrm{Ker}(\varphi)$ entonces $\varphi(b) = mb \neq 0$, luego $mI \neq \{0\}$. ∎

Proposición 2.1.10. Sea P_n el espacio de polinomios multilineales de grado n en el álgebra libre asociativa $\mathbb{F}\langle X\rangle$; entonces se cumplen las siguientes afirmaciones [9]:

(i) P_n bajo la acción

$$\sigma\Big(\sum \alpha_i x_{i_1}\cdots x_{i_n}\Big) = \sum \alpha_i x_{\sigma(i_1)}\cdots x_{\sigma(i_n)}, \quad \sigma \in S_n,\ \alpha_i \in \mathbb{F},\ x_{i_1},\cdots,x_{i_n} \in P_n,$$

es un $\mathbb{F}S_n$-módulo a izquierda que además es isomorfo al álgebra de grupo $\mathbb{F}S_n$.

(ii) Si U es un T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ (Definición 1.2.5), entonces $U \cap P_n$ es submódulo de P_n.

Demostración. Para probar (i), veamos primero que P_n es un S_n-módulo a izquierda bajo la acción propuesta. Debemos probar entonces las tres propiedades en la Definición 2.1.1. Por comodidad escribiremos f en lugar de $f(x_{i_1},\cdots x_{i_n})$ para cada $f \in P_n$. Dados $\lambda,\ \tau \in \mathbb{F}S_n$, definimos la acción del elemento $\lambda + \tau$ sobre cualquier $f \in P_n$ como $(\lambda+\tau)f = \lambda f + \tau f$. De esta manera tenemos A1. Para ver A2, sean $f, g \in P_n$ y $\tau \in S_n$; tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\tau(f+g) &= \tau\Big(\sum \alpha_i x_{i_1}\cdots x_{i_n} + \sum \beta_i x_{i_1}\cdots x_{i_n}\Big) \\
&= \tau \sum(\alpha_i+\beta_i)x_{i_1}\cdots x_{i_n} = \sum(\alpha_i+\beta_i)x_{\tau(i_1)}\cdots x_{\tau(i_n)} \\
&= \sum \alpha_i x_{\tau(i_1)}\cdots x_{\tau(i_n)} + \sum \beta_i x_{\tau(i_1)}\cdots x_{\tau(i_n)} \\
&= \tau\sum \alpha_i x_{i_1}\cdots x_{i_n} + \tau\sum \beta_i x_{i_1}\cdots x_{i_n} \\
&= \tau f + \tau g.
\end{aligned}$$

Para probar A3 tenemos,

$$\begin{aligned}\tau(\lambda f) &= \tau\left(\lambda \sum \alpha_i x_{i_1} \cdots x_{i_n}\right) = \tau \sum \alpha_i x_{\lambda(i_1)} \cdots x_{\lambda(i_n)} \\ &= \sum \alpha_i x_{\tau\lambda(i_1)} \cdots x_{\tau\lambda(i_n)} = \tau\lambda \sum \alpha_i x_{i_1} \cdots x_{i_n} = (\tau\lambda) f.\end{aligned}$$

Ahora veamos que P_n es isomorfo a $\mathbb{F}S_n$ visto como S_n-módulo. Sea $\psi : \mathbb{F}S_n \to P_n$ tal que $\psi(\sigma) = x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ para todo $\sigma \in S_n$. Dado que ψ está definido sobre las bases de ambos espacios, tenemos que este es un isomorfismo de espacios vectoriales. Para ver que ψ es un homomorfismo de S_n-módulos (Definición 2.1.6), sean $\sigma,\ \tau,\ \lambda_1,\ \lambda_2 \in S_n$ y $a,\ b \in \mathbb{F}$; tenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned}\psi(\lambda_1(a\sigma) + \lambda_2(b\tau)) &= \psi(a\lambda_1\sigma) + \psi(b\lambda_2\tau) = a\ \psi(\lambda_1\sigma) + b\ \psi(\lambda_2\tau) \\ &= a\ x_{\lambda_1\sigma(1)} \cdots x_{\lambda_1\sigma(n)} + b\ x_{\lambda_2\tau(2)} \cdots x_{\lambda_2\tau(n)} \\ &= \lambda_1(a\ x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}) + \lambda_2(b\ x_{\tau(2)} \cdots x_{\tau(n)}) \\ &= \lambda_1\psi(a\sigma) + \lambda_2\psi(b\tau).\end{aligned}$$

Para probar *(ii)*, queremos ver que si $f \in U \cap P_n$ entonces $\sigma f \in U \cap P_n$ para todo $\sigma \in S_n$. Veamos,

$$\sigma f = \sigma \sum \alpha_i x_{i_1} \cdots x_{i_n} = \sum \alpha_i x_{\sigma(i_1)} \cdots x_{\sigma(i_n)},$$

y dado que $\alpha_i x_{\sigma(i_1)} \cdots x_{\sigma(i_n)} \in P_n$ para cada i, tenemos entonces que $\sigma f \in P_n$. Por otra parte queremos ver que σf también pertenece a U. Definamos el mapeo $\varphi_\sigma : \mathbb{F}\langle X\rangle \to \mathbb{F}\langle X\rangle$ tal que $\varphi_\sigma(x_i) = \sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}$ para cada $x_i \in \mathbb{F}\langle X\rangle$. Dado que φ_σ está definido sobre elementos de la base de $\mathbb{F}\langle X\rangle$ tenemos que $\varphi_\sigma \in \mathrm{End}(\mathbb{F}\langle X\rangle)$. Tenemos entonces lo siguiente,

$$\varphi_\sigma(f) = \varphi_\sigma\left(\sum \alpha_i x_{i_1} \cdots x_{i_n}\right) = \sum \alpha_i \varphi_\sigma(x_{i_1}) \cdots \varphi_\sigma(x_{i_n}) = \sum \alpha_i x_{\sigma(i_1)} \cdots x_{\sigma(i_n)} = \sigma f$$

y dado que U es T-ideal de $\mathrm{End}(\mathbb{F}\langle X\rangle)$ tenemos que $\sigma f = \varphi_\sigma(f) \in U$. Ya que $\sigma f \in U \cap P_n$ se concluye que $U \cap P_n$ es un S_n-submódulo de P_n. ■

2.2. El radical de Jacobson

Herstein en [17] desarrolla la teoría concerniente al subespacio denominado radical de Jacobson para anillos; en esta sección presentamos el mismo desarrollo enfocado a álgebras, a fin de calcular dicho subespacio del álgebra de matrices triangulares de orden dos, establecer que su dimensión es uno, y proporcionar dicho resultado para pruebas posteriores.

2.2.1. El anulador de un módulo

Definición 2.2.1. Si M es un A-módulo, definimos el **anulador de M** como

$$\mathrm{Ann}(M) = \{a \in A \mid aM = \{0\}\}$$

Lema 2.2.2. $\mathrm{Ann}(M)$ es un ideal bilateral de A.

Demostración. Para ver que $\mathrm{Ann}(M)$ es un ideal a izquierda de A, dados $b \in \mathrm{Ann}(M)$ y $a \in A$ se quiere comprobar que $ab \in \mathrm{Ann}(M)$. Por A3 de la Definición 2.1.1 tenemos que $(ab)M = a(bM) = a\{0\} = \{0\}$, de modo que $ab \in \mathrm{Ann}(M)$. Por otra parte, para ver que $\mathrm{Ann}(M)$ es un ideal a derecha de A, dados $a \in A$ y $b \in \mathrm{Ann}(M)$ y puesto que M es A-módulo, tenemos que $(ba)M = b(aM) \subseteq bM = \{0\}$. De esta manera comprobamos que $\mathrm{Ann}(M)$ es un ideal bilateral de A. ■

Definición 2.2.3. Se dice que M es un ***A*-módulo irreducible** si $MA \neq \{0\}$ y si los únicos submódulos de M son $\{0\}$ y M.

Lema 2.2.4. Si M es un A-módulo irreducible entonces M es isomorfo a A/I (visto como A-módulo), para algún ideal maximal a derecha I de A. Más aún, hay un elemento $a \in A$ tal que $b - ab \in I$ para todo $b \in A$. De manera recíproca, para todo ideal maximal a derecha I de A, A/I es un A-módulo irreducible.

Demostración. Dado que M es irreducible, $MA \neq \{0\}$. Ya que $S = \{m \in M \mid mA = \{0\}\}$ es un submódulo de M (ver Proposición 2.1.4) que no es M (si lo fuera $MA = \{0\}$), entonces debe ser que $S = \{0\}$ o equivalentemente, si $m \neq 0$ está en M entonces $mA \neq 0$. Sin embargo, mA es un submódulo de M (ver Proposición 2.1.5) por lo tanto debe ser M. Sea $\varphi : A \to M$ definida por $\varphi(a) = ma$ para todo $a \in A$. Debido a la Proposición 2.1.7 tenemos que φ es un homomorfismo de A-módulos, y dado que $\varphi(A) = mA = M$ entonces φ es una función sobreyectiva. Ahora sea $\mathrm{Ker}(\varphi)$ el ideal a derecha I de A. Por el teorema fundamental de homomorfismos (ver Teorema 1.1.19), M es isomorfo a A/I visto como A-módulo, lo que prueba la primera parte del Lema.

Sea J un ideal de A que contiene propiamente a I. Ya que $\varphi(J) = mJ$ es un submódulo de M que es diferente de cero (ver Proposición 2.1.9), entonces I es un ideal maximal de A con respecto a la propiedad de que su imagen (vía φ) sea cero.

Dado que $mA = M$, existe $a \in A$ tal que $ma = m$. Por lo tanto para cualquier $b \in A$ tener $mab = mb$ equivale a

$$\begin{aligned} mb - mab &= 0 \\ m(b - ab) &= 0 \\ \varphi(b - ab) &= 0 \end{aligned}$$

y de esta manera $b - ab \in \mathrm{Ker}(\varphi) = I$ para todo $b \in A$.

Para demostrar el recíproco de este lema, si I es ideal maximal de A queremos ver que $M = A/I$ es un A-módulo irreducible, es decir, que $MA \neq \{0\}$ y los únicos submódulos de M son $\{0\}$ y el mismo M. Para esto, debemos suponer que $MA = \{0\}$ o que M tiene submódulos propios no triviales. Sea $\varphi : A \to A/I$ un homomorfismo de A-módulos definido por $\varphi(a) = ma$, como I es maximal de A entonces $I = \mathrm{Ker}(\varphi)$ y, como se mostró en el párrafo anterior, esto significa que existe $a \in A$ tal que $b - ab \in I$ para todo $b \in A$. Supongamos primero que $MA = \{0\}$, entonces $(x + I)b = xb + I = I$ para todo $x,\ b \in A$, lo que significa que $xb \in I$ para todo $x,\ b \in A$. En particular, sea $x = a$, de esta manera $ab \in I$, pero $b - ab$ también pertenece a I, con lo cual $b \in I$ para todo $b \in A$ y tenemos que $I = A$ contradiciendo el hecho de que I es maximal, por lo tanto $MA \neq \{0\}$. Ahora supongamos que existe un submódulo propio no trivial de M, dicho submódulo debe ser de la forma S/I, donde S es una subálgebra de A que contiene a I. Ahora verifiquemos que S es un ideal de A, dado que S/I es submódulo de M, tenemos que $(s + I)a = sa + I \in S/I$ con $sa \in S$ para todo $s \in S$ y todo $a \in A$, es decir $SA \subseteq S$. De esta manera, S es un ideal que contiene a I, contradiciendo el hecho de que I es maximal. Por lo tanto M no tiene submódulos propios no triviales. ■

2.2.2. El radical de Jacobson

Definición 2.2.5. El **radical de Jacobson** de un álgebra A, escrito como $\mathrm{J}(A)$, es el conjunto de todos los elementos de A que anulan a todos los A-módulos irreducibles M, es decir,

$$\mathrm{J}(A) = \{a \in A \mid Ma = \{0\},\ M \text{ es un } A\text{-módulo irreducible}\}$$

Si A no tiene módulos irreducibles $\mathrm{J}(A) = A$. Se deduce de la Definición 2.2.1 que

$$\mathrm{J}(A) = \bigcap \mathrm{Ann}(M)$$

para todo A-módulo irreducible M.

Proposición 2.2.6. Dada A un álgebra, entonces $\mathrm{J}(A)$ es un ideal bilateral de A.

Demostración. Dado $a \in \mathrm{J}(A)$ y $b \in A$ queremos ver que ab y ba pertenecen a $\mathrm{J}(A)$. Puesto que $a \in \mathrm{J}(A)$ entonces $a \in \bigcap \mathrm{Ann}(M)$; como se mostró en el Lema 2.2.2, los $\mathrm{Ann}(M)$ son ideales bilaterales de A, luego ab y ba pertenecen a cada uno de los $\mathrm{Ann}(M)$, en consecuencia ab y ba pertenecen a $\bigcap \mathrm{Ann}(M) = \mathrm{J}(A)$. ■

Ejemplo 2.2.7. Dado I un ideal maximal del álgebra $A = UT_2(\mathbb{F})$, se construye el A-módulo irreducible A/I y comprobamos a continuación que $(A/I)\mathrm{J}(A) = \{0\}$. Veamos; para todo $u + I \in A/I$, tenemos lo siguiente,

$$(u+I)\mathrm{J}(A) \subseteq \mathrm{J}(A) \subset I.$$

Dado que I es la clase del cero en A/I se concluye que $(A/I)\mathrm{J}(A) = \{0\}$.

Definición 2.2.8. Se dice que un ideal a derecha I de A es **regular** si existe $a \in A$ tal que $b - ab \in I$ para todo $b \in A$. Si A es unitario entonces todos sus ideales son regulares, en efecto, con $a = 1$ (la unidad en A) entonces $0 = b - 1b \in I$ para todo ideal I de A.

Proposición 2.2.9. El conjunto $I_a = \{b - ab \mid b \in A\}$ es un ideal regular a derecha de A.

Demostración. Dado $b - ab \in I_a$ y $c \in R$ tenemos que $(b - ab)c = bc - a(bc) \in I_a$, luego I_a es un ideal a derecha de A que también es regular porque el elemento a es justamente el que satisface la Definición 2.2.8. ■

Definición 2.2.10. Si I es un ideal a derecha de A definimos el **ideal cociente** de A como

$$(I : A) = \{s \in A \mid As \subseteq I\}.$$

Proposición 2.2.11. Si I es un ideal maximal a derecha de A que es regular y si $M = A/I$, entonces $\mathrm{Ann}(M) = (I : A)$ y tenemos que este es el ideal de A más grande contenido en I.

Demostración. Sea $s \in \mathrm{Ann}(M)$ entonces $Ms = \{0\}$ de modo que $(a + I)s = as + I = I$ para todo $a \in A$, lo que quiere decir que $as \in I$, para todo $a \in A$, en consecuencia $As \subseteq I$ y por Definición 2.2.10 tenemos que $s \in (I : A)$. Así, $\mathrm{Ann}(M) \subseteq (I : A)$.

Por otra parte, dado $b \in (I : A)$, tenemos que $Ab \subseteq I$ o equivalentemente $ab \in I$ para todo $a \in A$. De esta manera $(a + I)b = ab + I = I$ para todo $a + I \in M$, y resulta que

$Mb = \{0\}$, en consecuencia $b \in \operatorname{Ann}(M)$ y se concluye que $(I : A) \subseteq \operatorname{Ann}(M)$. Hemos probado entonces que $\operatorname{Ann}(M) = (I : A)$.

Como I es regular existe $a \in A$ tal que $b - ab \in I$ para todo $b \in A$. Si $b \in (I : A)$ entonces $ab \in Ab \subseteq I$ luego $b \in I$ con lo cual $(I : A) \subseteq I$. Ahora probemos que $\operatorname{Ann}(M) = (I : A)$ es el ideal bilateral más grande de A contenido en I. Dado I_0 un ideal de A contenido en I, queremos ver que $I_0 \subseteq \operatorname{Ann}(M)$. Sea $r \in I_0$, para cualquier $a \in A$ tenemos que $ra \in I_0 \subseteq I$, entonces $(a + I)r = ar + I = I$, luego $Mr = \{0\}$ para todo $r \in I_0$, en consecuencia $r \in \operatorname{Ann}(M)$. ∎

Teorema 2.2.12. $\mathrm{J}(A) = \bigcap (I : A)$ donde I recorre todos los ideales regulares maximales a derecha de A y donde $(I : A)$ es el ideal más grande de A contenido en I.

Demostración.. Dado M un A-módulo irreducible, debido al Lema 2.2.4 tenemos que M es isomorfo a A/I, siendo I un ideal maximal regular a derecha de A. Del mismo lema se sabe que cada A/I es un A-módulo irreducible, luego existe una biyección entre la familia de los A-módulos irreducibles y la familia de los cocientes A/I con I ideal maximal regular a derecha de A. Dado que $\mathrm{J}(A) = \bigcap \operatorname{Ann}(M)$ para todo A-módulo irreducible M, tenemos entonces que $\mathrm{J}(A) = \bigcap \operatorname{Ann}(A/I)$ y debido a la Proposición 2.2.11 se concluye que $\mathrm{J}(A) = \bigcap (I : A)$. ∎

Lema 2.2.13. Si I es un ideal regular de A entonces I está incluido en un ideal maximal regular de A.

Demostración.. Dado que I es regular, sea $a \in A$ tal que $b - ab \in I$ para todo $b \in A$. También sucede que $a \notin I$, de otra manera $ab \in I$ y tendríamos que $b \in I$ para todo $b \in A$, luego $I = A$. Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de todos los ideales propios de A que contienen a I. Si $I' \in \mathcal{M}$ entonces $a \notin I'$, de otra manera $ab \in I'$ y $b - ab \in I \subseteq I'$ luego $b \in I'$ para todo $b \in A$ entonces $I' = A$.

Ahora verifiquemos que $\mathcal{M} = \{I' \in \mathcal{I}(A) \mid I' \supseteq I,\ a \notin I'\}$ ordenado por contenencia, satisface la hipótesis del Lema de Zorn, es decir, es no vacío, está parcialmente ordenado y todo subconjunto totalmente ordenado tiene una cota superior en $\mathcal{M}$.

- Dado que $I \in \mathcal{M}$ tenemos que $\mathcal{M}$ es no vacío además, debido al orden por contenencia, $\mathcal{M}$ está parcialmente ordenado.

- Veamos que todo subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{M}$ tiene una cota superior en $\mathcal{M}$. Sea $\mathcal{L}$ un subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{M}$ y consideremos $\bigcup_{I' \in \mathcal{L}} I'$ la unión de todos los ideales de $\mathcal{L}$. Dicha unión pertenece a $\mathcal{M}$ pues $a \notin I'$ para todo $I' \in \mathcal{L}$ lo que implica $a \notin \bigcup_{I' \in \mathcal{L}} I'$. También, dado que $I \subseteq I'$ para todo $I' \in \mathcal{L}$ entonces $I \subseteq \bigcup_{I' \in \mathcal{L}} I'$. Por último, comprobemos que $\bigcup_{I' \in \mathcal{L}} I'$ es ideal a derecha; Sea $bc \in (\bigcup I')A$ con $b \in \bigcup I'$ y $c \in A$. Dado que b pertenece a la unión, existe $I' \in \mathcal{L}$ tal que $b \in I'$ luego $bc \in I'$ y concluimos que $bc \in \bigcup_{I' \in \mathcal{L}} I'$. De manera análoga podemos comprobar que $\bigcup_{I' \in \mathcal{L}} I'$ es ideal a izquierda y en consecuencia un ideal.

De esta manera $\bigcup_{I' \in \mathcal{L}} I'$ es una cota superior para $\mathcal{L}$ en $\mathcal{M}$, por lo tanto se satisface la hipótesis del Lema de Zorn y debe existir un ideal maximal I_0 en $\mathcal{M}$. Ahora debe probarse que I_0 es maximal en A también. Si no lo fuera, debe existir J ideal de A que contiene propiamente a I_0. Dado que $J \supset I_0$ debe ser que $J \supset I$ y $a \notin J$ (de otra manera $J = A$) luego $J \in \mathcal{M}$, contradiciendo el hecho de que I_0 es maximal en $\mathcal{M}$. De esta manera I_0 también es maximal en A y dado que $b - ab \in I \subseteq I_0$ para todo $b \in A$, se sabe también que I_0 es un ideal regular. ∎

Teorema 2.2.14. $\mathrm{J}(A) = \bigcap I$ donde I recorre todos los ideales maximales regulares a derecha de A.

Demostración.. Dado $a \in \mathrm{J}(A)$ por el Lema 2.2.12 $a \in \bigcap(I : A)$, de esta manera $a \in (I : A)$ para todo ideal maximal a derecha I de A y en virtud del Teorema 2.2.11, a pertenece a todo I, entonces $a \in \bigcap I$ lo que permite concluir que $\mathrm{J}(A) \subseteq \bigcap I$.

Por otro lado, dado $r \in \bigcap I$ entonces el conjunto $\{rb + b \mid b \in A\}$ debe ser todo A, si no es así, dado que con $r = -a$ este conjunto es un ideal regular a derecha (ver Proposición 2.2.9), entonces debe estar contenido en un ideal maximal regular I_0 de A (ver Lema 2.2.13). Ya que $r \in \bigcap I$ tenemos que $r \in I_0$, luego $rb \in I_0$ y como $rb + b \in I_0$ entonces $b \in I_0$ para todo $b \in A$, lo que es una contradicción, en consecuencia $\{rb + b \mid b \in A\} = A$. En particular, debe existir $t \in A$ tal que $-r = t + rt$, esto es $r + t + rt = 0$. Si $\bigcap I \not\subseteq \mathrm{J}(A)$ entonces existe un A-módulo irreducible M tal que $M \bigcap I \neq \{0\}$ (ver Definición 2.2.5), luego $m \bigcap I \neq \{0\}$ para algún $m \in M$. Como $m \bigcap I \neq \{0\}$ es un submódulo de M (ver Proposición 2.1.5) que es diferente de cero, tenemos que $m \bigcap I = M$. Así, para algún $p \in \bigcap I$, $mp = -m$; ya que $p \in \bigcap I$ existe un $q \in A$ tal que $p + q + pq = 0$ entonces

$$\begin{aligned} 0 = m(q + p + pq) &= mp + mq + mpq \\ &= mq - m - mq \\ &= -m, \end{aligned}$$

y obtenemos $m = 0$ que es una contradicción. Así, $M \bigcap I = \{0\}$ para todo A-módulo irreducible M, de modo que $\bigcap I \subseteq \mathrm{J}(A)$ y por lo tanto $\mathrm{J}(A) = \bigcap I$. ∎

Ejemplo 2.2.15. En $A = UT_2(\mathbb{F})$ los únicos ideales maximales son

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a,\, b \in \mathbb{F} \right\} \quad \text{y} \quad J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a,\, b \in \mathbb{F} \right\},$$

debido a que el único ideal que los contiene propiamente es el mismo $UT_2(\mathbb{F})$.

La intersección entre ambos da como resultado el radical de Jacobson para $UT_2(\mathbb{F})$ esto es,

$$\mathrm{J}(A) = I \cap J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{F} \right\} = \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y concluimos que la dimensión del radical de Jacobson para $UT_2(\mathbb{F})$ es 1.

2.2.3. Ideal cuasi-regular

Definición 2.2.16. A un elemento $a \in A$ se le conoce como **cuasi-regular** a derecha si existe $a' \in A$ tal que $a + a' + aa' = 0$. Al elemento a' se conoce como el **cuasi-inverso** a derecha de a.

Se dice que un ideal a derecha de A es **cuasi-regular a derecha** si cada uno de sus elementos lo es.

Teorema 2.2.17. $\mathrm{J}(A)$ es el ideal cuasi-regular a derecha más grande de A; esto es, $\mathrm{J}(A)$ es el único ideal maximal cuasi-regular a derecha.

Demostración. Dado $r \in \mathrm{J}(A)$ entonces $r \in \bigcap I$ para todo ideal maximal regular de A. En la demostración del Teorema 2.2.14 probamos que $A = \{rs + s \mid s \in R\}$, entonces debe existir $t \in A$ tal que $-r = t + rt$, luego $r + t + rt = 0$ y, de acuerdo con la Definición 2.2.16, se infiere que $\mathrm{J}(A)$ es un ideal cuasi-regular a derecha de A.

Dado I un ideal cuasi-regular a derecha de A, supongamos que $I \not\subseteq \mathrm{J}(A)$. Entonces existe un A-módulo M tal que $MI \neq \{0\}$ (ver Definición 2.2.5), entonces $mI \neq \{0\}$ para algún $m \in M$. Como $mI \neq \{0\}$ es submódulo de M (Proposición 2.1.5) diferente de cero, entonces $mI = M$. Para algún $p \in I$, entonces $mp = -m$ y, debe existir algún $q \in R$ tal que $p + q + pq = 0$ (puesto que I es cuasi-regular). De esta manera tenemos que

$$\begin{aligned} 0 = m(q + p + pq) &= mp + mq + mpq \\ &= mq - m - mq \\ &= -m, \end{aligned}$$

y obtenemos que $m = 0$, una contradicción. Luego $MI = \{0\}$ para todo A-módulo irreducible M y comprobamos que $I \subseteq \mathrm{J}(A)$. De esta manera, $\mathrm{J}(A)$ es el ideal cuasi regular a derecha más grande que tiene A. ■

Proposición 2.2.18. Si un elemento $a \in A$ es cuasi-regular a derecha y a izquierda, entonces su cuasi-inverso a derecha y a izquierda es el mismo.

Demostración. Dado que $a \in A$ es cuasi-regular a derecha y a izquierda, existen b, $c \in A$ tal que

$$a + b + ba = 0 \quad \text{y} \quad a + c + ac = 0. \tag{2.1}$$

Por lo tanto,

$$ac + bc + bac = 0 \quad \text{y} \quad ba + bc + bac = 0, \tag{2.2}$$

al sumar la primera ecuación con el inverso de la segunda en (2.2) obtenemos $ac = ba$. De acuerdo con esto, al sumar la primera ecuación con el inverso de la segunda en (2.1), obtenemos $b = c$. ■

Corolario 2.2.19. $\mathrm{J}(A)$ es un ideal cuasi-regular a izquierda de A.

Demostración. Dado $a \in \mathrm{J}(A)$, existe $a' \in A$ tal que $a+a'+aa' = 0$. Puesto que $a' = -a-aa'$ y a, $aa' \in \mathrm{J}(A)$ tenemos que $a' \in \mathrm{J}(A)$. De esta manera, existe $a'' \in A$ tal que $a'+a''+a'a'' = 0$. Así, a' tiene al elemento a como cuasi-inverso a izquierda, y al elemento a'' como cuasi-inverso a derecha, y por la Proposición 2.2.18 tenemos que $a = a''$, lo que permite decir que $a' + a + a'a = 0$, equivalente a decir que a es cuasi-regular a izquierda también, por lo tanto, $\mathrm{J}(A)$ es un ideal cuasi-regular a izquierda de A. ■

2.2.4. Ideales nilpotentes

Definición 2.2.20.

(a) Decimos que un elemento $a \in A$ es **nilpotente** si $a^m = 0$ para algún entero positivo m.

(b) Decimos que un ideal a derecha (izquierda, bilateral) es **nil** si cada uno de sus elementos es nilpotente.

(c) Decimos que un ideal a derecha (izquierda, bilateral) I es nilpotente si existe un entero positivo m tal que $a_1 a_2 \cdots a_m = 0$ para todo $a_1, a_2 \cdots a_m \in I$.

De acuerdo con esta definición podemos inferir que todo ideal nilpotente es nil. En efecto, si un ideal I de A es nilpotente, entonces existe un entero positivo m tal que $a_1 a_2 \cdots a_m = 0$ para todo $a_1, a_2 \cdots a_m \in I$, luego $a^m = 0$ para todo $a \in I$, lo que muestra que I en un ideal nil también. El recíproco de esta afirmación en general no es cierto puesto que si $a^m = 0$ para todo $a \in I$ no necesariamente $a_1 a_2 \cdots a_m = 0$ para todo $a_1, a_2 \cdots a_m \in I$.

El siguiente lema concluye esta sección y será importante para la obtención de resultados en cuanto a graduaciones en $UT_2(\mathbb{F})$.

Lema 2.2.21. Dada un álgebra A, entonces $\mathrm{J}(A)$ contiene todos los ideales nil de A.

Demostración. Dado I un ideal nil de A y $a \in I$, existe un entero positivo m tal que $a^m = 0$. Sea $b \in A$ tal que

$$b = -a + a^2 - a^3 + \cdots + (-1)^{m-1} a^{m-1}, \tag{2.3}$$

al multiplicar la Ecuación (2.3) por a tenemos,

$$\begin{aligned}
ab &= -a^2 + a^3 - a^4 + \cdots + (-1)^{m-1} \cancelto{0}{a^m} \\
ab &= -a^2 + a^3 - a^4 + \cdots + (-1)^{m-2} a^{m-1} \\
ab &= -a - b,
\end{aligned}$$

de donde se concluye que $a + b + ab = 0$ y en consecuencia I es un ideal cuasi-regular a derecha de A. Por el Teorema 2.2.17 se concluye que $I \subseteq \mathrm{J}(A)$. ■

Ejemplo 2.2.22. El ideal

$$J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{F} \right\}$$

es nil pues $x^2 = 0$ para cada $x \in J$ (ver Definición 2.2.20); luego está contenido en $\mathrm{J}(UT_2(\mathbb{F}))$. Más aún, de acuerdo con el Ejemplo 2.2.15, tenemos que $J = \mathrm{J}(UT_2(\mathbb{F}))$.

2.3. Teoría de representación

2.3.1. Representación de un álgebra

Definición 2.3.1. Dado un grupo G; una **representación** de G es un homomorfismo de grupos

$$\begin{array}{rccccc} \rho: & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) & & \\ & g & \longmapsto & \rho_g : V & \longrightarrow & V \\ & & & v & \longmapsto & \rho_g(v), \end{array}$$

donde $\mathrm{GL}(V)$ es el de la Definición B.0.4, para algún espacio vectorial V de dimensión finita. La dimensión del espacio V es llamada el **grado** de la representación.

Para álgebras tenemos una definición igual salvo que el homomorfismo ya no es de grupos sino de álgebras.

Definición 2.3.2. Dada un álgebra A; una **representación** de A es un homomorfismo de álgebras

$$\begin{array}{rccccc} \rho: & A & \longrightarrow & \mathrm{GL}(V) & & \\ & a & \longmapsto & \rho_a : V & \longrightarrow & V \\ & & & v & \longmapsto & \rho_a(v), \end{array}$$

para algún espacio vectorial V de dimensión finita.

Ejemplo 2.3.3. Dada A un álgebra, entonces el mapeo $\rho : A \to \mathrm{End}(A)$ definido por $\rho_a(b) = ab$, para todo $a,\ b \in A$, es una representación de A.

Ejemplo 2.3.4 (**Representación trivial**)**.** Dado G un grupo y V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, la representación trivial ρ_1 de G es aquella tal que

$$\begin{array}{rccc} \rho_1: & G & \longrightarrow & \mathrm{GL}_1(\mathbb{F}) \\ & g & \longmapsto & 1 \end{array}$$

para todo $g \in G$.

Ejemplo 2.3.5 (**Representación alternante**)**.** Sean $G = S_n$ y $V \cong \mathbb{F}$, la representación alternante ρ_2 del grupo simétrico S_n es aquella tal que

$$\begin{array}{rccc} \rho_2: & S_n & \longrightarrow & \mathrm{GL}_1(\mathbb{F}) \\ & \sigma & \longmapsto & \mathrm{sgn}(\sigma)\cdot 1, \end{array}$$

para todo $\sigma \in S_n$ y donde $\operatorname{sgn}(\sigma)$ es el signo de σ.

Teorema 2.3.6. Una representación de un álgebra A determina de manera única un A-módulo de dimensión finita. De manera recíproca, un A-módulo de dimensión finita determina una representación de A.

Demostración. Sea $\rho : A \to \mathrm{GL}(V)$ una representación de A. Si definimos la acción $av = \rho_a(v)$ entonces V se convierte en un A-módulo a izquierda (ver la Definición 2.1.1 y el Ejemplo 2.1.2). Para ver M1, tenemos lo siguiente:

$$(a_1 + a_2)v = \rho_{a_1+a_2}(v) = (\rho_{a_1} + \rho_{a_2})(v) = \rho_{a_1}(v) + \rho_{a_2}(v) = a_1 v + a_2 v,$$

para todo $a_1,\ a_2 \in A$ y todo $v \in V$. A continuación veamos M2:

$$a(v_1 + v_2) = \rho_a(v_1 + v_2) = \rho_a(v_1) + \rho_a(v_2) = av_1 + av_2$$

para cada $a \in A$ y cada $v_1,\ v_2 \in V$. Por último, veamos M3:

$$a_1(a_2 v) = a_1(\rho_{a_2}(v)) = \rho_{a_1}(\rho_{a_2}(v)) = \rho_{a_1}\rho_{a_2}(v) = \rho_{a_1 a_2}(v) = a_1 a_2(v).$$

Recíprocamente, sea M un A-módulo de dimensión finita vista como espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ si consideramos el álgebra de grupo $\mathbb{F}M$. Entonces sea $\rho : A \to \mathrm{GL}(\mathbb{F}M)$ tal que $\rho_a(m) = am$ para todo $a \in A$ y todo $m \in M$. Veamos que ρ es un homomorfismo de álgebras: ρ es transformación lineal porque

$$\begin{aligned}
\rho_{\alpha a_1 + \beta a_2}(m) &= (\alpha a_1 + \beta a_2)m \\
&= (\alpha a_1)m + (\beta a_2)m \\
&= \alpha(a_1 m) + \beta(a_2 m) \\
&= \alpha\rho_{a_1}(m) + \beta\rho_{a_2}(m).
\end{aligned}$$

Para cada $a_1,\ a_2 \in A$, cada $m \in M$ y cada $\alpha,\ \beta \in \mathbb{F}$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\rho_{a_1 a_2}(m) &= (a_1 a_2)(m) \\
&= a_1(a_2(m)) \\
&= a_1(\rho_{a_2}(m)) \\
&= \rho_{a_1}\rho_{a_2}(m)
\end{aligned}$$

De esta manera, se concluye que ρ es homomorfismo de álgebras y por tanto una representación de A. ∎

Así, la representación del Ejemplo 2.3.3 puede verse como un A-módulo a izquierda. Recíprocamente, A visto como A-módulo define la representación $\rho : A \to \mathrm{GL}(A)$ tal que $\rho_a(b) = ab$ para cada $a,\ b \in A$.

En la siguiente sección mostramos que una representación de grupos finitos se puede descomponer en subrepresentaciones irreducibles (Teorema de Maschke).

2.3.2. Representaciones irreducibles

Definición 2.3.7. Dado un grupo G y dada una representación $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$; un subespacio W de V es ***G*-invariante** si $\rho_g(w) \in W$ para todo $g \in G$ y todo $w \in W$.

Definición 2.3.8. Una **subrepresentación** de una representación $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ es un subespacio W de V que es G-invariante, esto es, $\rho_g(W) \subseteq W$ para todo $g \in G$.

Definición 2.3.9. Dada $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación, se dice que ρ es **irreducible** si y sólo si V no tiene subespacios propios no triviales que sean G-invariantes; esto es, ρ no tiene subrepresentaciones propias no triviales.

Ejemplo 2.3.10. Sea V tal que $\dim V = 1$, entonces la representación $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ es irreducible porque V no tiene subespacios propios no triviales.

Definición 2.3.11. Una representación $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ se dice **descomponible** si ρ se puede expresar como una suma directa de subrepresentaciones; es decir,

$$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V_1 \oplus V_2) = \mathrm{GL}(V),$$

donde $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ y $\rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$. Si ρ es descomponible entonces no es irreducible.

Definición 2.3.12. Una representación $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ se dice **completamente reducible** si $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, donde los $V_i,\ i = 1, \cdots, n$ son subespacios G-invariantes de V. De manera equivalente, $\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_n$.

Lema 2.3.13. Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ una representación con $V \neq \{0\}$ y G un grupo finito. Entonces ρ es irreducible o descomponible.

Demostración. Si ρ es irreducible acabamos. Supongamos que ρ no es irreducible y probemos que es descomponible.

Como V no es irreducible, entonces por la Definición 2.3.9 existe un subespacio W propio no trivial G-invariante. Queremos ver que existe W' subespacio propio no trivial G-invariante de V tal que $V = W \oplus W'$ y $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$, donde $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}(W)$ y $\rho_2 : G \to \mathrm{GL}(W')$.

Sea W' un complemento de W en V, es decir, $V = W \oplus W'$. Sea P la transformación proyección tal que P restringida a W es la identidad y P restringida a W' es cero; es decir, $P(W) = W$ y $P(W') = \{0\}$. Consideremos la transformación lineal

$$\overline{P} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_g P \rho_{g^{-1}}.$$

Notemos que como $\rho_g,\ \rho_{g^{-1}} \in \mathrm{End}(V)$ entonces $\rho_g P \rho_{g^{-1}} \in \mathrm{End}(V)$. Sea $W' = \ker \overline{P}$ el cual es un subespacio de V. Notemos que $\overline{P}$ restringido a W es la identidad. Veamos, dado $w \in W$ queremos ver que $\overline{P}(w) = w$. Tenemos entonces,

$$\overline{P}(w) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_g P \rho_{g^{-1}}(w) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_g P(\rho_{g^{-1}}(w)),$$

y dado que $\rho_{g^{-1}}(w) \in W$ (pues W es G-invariante), por la construcción de P, tenemos que $P(\rho_{g^{-1}}) = \rho_{g^{-1}}$; luego,

$$\overline{P}(w) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_g \rho_{g^{-1}}(w) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{gg^{-1}}(w) = \frac{1}{|G|}(|G|\, w) = w.$$

de modo que $\overline{P}$ restringido a W es la identidad.

Ahora veamos que $\mathrm{Im}(\overline{P}) = W$. Dado $w \in \mathrm{Im}(\overline{P})$, tenemos que existe $v \in V$ tal que $\overline{P}(v) = w$. Como $v \in V = W \oplus W'$, entonces $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in W$ y $v_2 \in W'$. Luego tenemos que,

$$w = \overline{P}(v) = \overline{P}(v_1 + v_2) = \overline{P}(v_1) + \overline{P}(v_2) = v_1 + 0 = v_1 \in W.$$

La contenencia recíproca es análoga. Ahora veamos que $\overline{P}$ es idempotente. Dado $v \in V$

tenemos por una parte,

$$\begin{aligned}\overline{P}^2(v) &= \overline{P}^2(v_1+v_2) = \overline{P}^2(v_1)+\overline{P}^2(v_2)\\ &= \overline{P}(\overline{P}(v_1))+\overline{P}(\overline{P}(v_2))\\ &= \overline{P}(v_1)+\overline{P}(0)\\ &= v_1.\end{aligned}$$

también,

$$\overline{P}(v) = \overline{P}(v_1+v_2) = \overline{P}(v_1)+\overline{P}(v_2) = v_1;$$

luego $\overline{P}^2(v) = \overline{P}(v)$ para todo $v \in V$ y tenemos que $\overline{P}$ es idempotente. Por la Proposición A.0.11 y puesto que $W' = \ker \overline{P}$ y $W = \mathrm{Im}(\overline{P})$ tenemos que,

$$V = \ker \overline{P} \oplus \mathrm{Im}(\overline{P}) = W' \oplus W.$$

Resta comprobar que W' es también G-invariante; es decir, dado $y \in W'$ queremos ver que $\overline{P}(\rho_g(y)) = 0$ para todo $g \in G$. Veamos, dado $h \in G$,

$$\begin{aligned}\overline{P}(\rho_h(y)) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_g P \rho_{g^{-1}}(\rho_h(y))\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_g P \rho_{g^{-1}h}(y).\end{aligned}$$

Sea $\ell^{-1} = g^{-1}h$ entonces $\ell = h^{-1}g$ y también $h\ell = g$. De esta manera tenemos,

$$\begin{aligned}\overline{P}(\rho_h(y)) &= \frac{1}{|G|}\sum_{\ell\in G}\rho_{h\ell} P \rho_{\ell^{-1}}(y)\\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{\ell\in G}\rho_h\rho_\ell P \rho_{\ell^{-1}}(y)\\ &= \rho_h \frac{1}{|G|}\sum_{\ell\in G}\rho_\ell P \rho_{\ell^{-1}}(y)\\ &= \rho_h\, \overline{P}(y) = \rho_h(0) = 0.\end{aligned}$$

Como $V = W \oplus W'$ y tanto W como W' son G-invariantes, entonces por la Definición 2.3.12, ρ es descomponible. ■

Teorema 2.3.14 (**Teorema de Maschke**)**.** Toda representación $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(V)$ de un grupo finito G, es completamente reducible.

Demostración. Vamos a aplicar inducción sobre la dimensión de V. Como $n = \dim(V)$, supongamos que la afirmación es verdadera para representaciones de grado menor que n. Si ρ es irreducible, estamos listos.

Supongamos que ρ no es irreducible, entonces por el Lema 2.3.13 ρ es descomponible, luego existen subrepresentaciones $\rho_1 : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ y $\rho_2 : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ tal que $\rho_1 \oplus \rho_2 = \rho$ o, por abuso de notación escribimos, $V_1 \oplus V_2 = V$, donde $V_1 \neq 0$ y $V_2 \neq 0$. Entonces, $\dim(V_1) < n$ y $\dim(V_2) < n$; por hipótesis de inducción V_1 y V_2 son completamente reducibles, luego existen subespacios tales que

$$V_1 = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s, \quad V_1 = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t;$$

por tanto, $V = V_1 \oplus V_2 = W_1 \oplus \cdots \oplus W_s \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$. ■

2.3.3. Caracter de una representación

Definición 2.3.15. Sea $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$, definimos la **traza** de A (en símbolos $\mathrm{Tr}(A)$) como la suma de los elementos de su diagonal principal; esto es,

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Definición 2.3.16. Sea ρ una representación de un grupo G. El **caracter** de ρ es una función $\chi_\rho : G \to \mathbb{F}$ tal que

$$\begin{array}{rccl} \chi_\rho : & G & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ & g & \longmapsto & \chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho_g) \end{array}$$

para cada $g \in G$. De esta manera, si M es un A-módulo determinado por ρ, entonces $\chi(M) = \chi_\rho$ es el caracter asociado a M.

Ejemplo 2.3.17. Sea $\rho : S_3 \to \mathrm{GL}_2(V)$ tal que

$$\rho(1\ 2) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \rho(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De esta manera, $\chi_\rho : S_3 \to \mathbb{C}$ viene dado por

$$\chi_\rho(1\ 2) = \mathrm{Tr}(\rho_{(1\ 2)}) = 0 \quad \text{y} \quad \chi_\rho(1\ 2\ 3) = \mathrm{Tr}(\rho_{(1\ 2\ 3)}) = -1.$$

Proposición 2.3.18. Sea $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(V)$ una representación, entonces $\chi_\rho(1) = n$, siendo 1 el neutro de G.

Demostración. Dado que $\rho(1) = \rho_1 = I_{n\times n}$ (en un homomorfismo el nuetro va al neutro); tenemos entonces, $\chi_\rho(1) = \mathrm{Tr}(\rho_1) = \mathrm{Tr}(I_{n\times n}) = n = \dim(V)$. ■

Proposición 2.3.19. Sea φ una representación de un grupo G. Entonces para todo $g,\ h \in G$, tenemos que $\chi_\varphi(g) = \chi_\varphi(hgh^{-1})$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\chi_\rho(hgh^{-1}) &= \mathrm{Tr}(\varphi_{hgh^{-1}}) = \mathrm{Tr}(\varphi(hgh^{-1})) \\
&= \mathrm{Tr}(\varphi(h)\varphi(g)\varphi(h^{-1})) = \mathrm{Tr}(\varphi(g)\varphi(h^{-1})\varphi(h)) \\
&= \mathrm{Tr}(\varphi(g)\varphi(h^{-1}h)) = \mathrm{Tr}(\varphi(g)) \\
&= \chi_\varphi(g).
\end{aligned}$$

■

Definición 2.3.20. Definimos las m copias de un espacio vectorial V como

$$mV = \underbrace{V \oplus V \oplus \cdots \oplus V}_{m \text{ veces}};$$

de manera equivalente,

$$m\rho = \underbrace{\rho \oplus \rho \oplus \cdots \oplus \rho}_{m \text{ veces}};$$

a m la conocemos como la **multiplicidad** de la representación.

Lema 2.3.21. Sea $\rho = \varphi \oplus \psi$, entonces $\chi_\rho = \chi_\varphi \oplus \chi_\psi$.

Demostración. Sean $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V)$ y $\rho : G \to \mathrm{GL}(W)$, de acuerdo con la Definición 2.3.11

$$\begin{aligned}
\rho = \varphi \oplus \psi : \quad G &\longrightarrow \quad \mathrm{GL}(V \oplus W) \\
g &\longmapsto \quad \rho_g = \begin{pmatrix} \varphi_g & 0 \\ 0 & \psi_g \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

luego,

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho_g) = \mathrm{Tr}(\varphi_g) + \mathrm{Tr}(\psi_g) = \chi_\varphi(g) + \chi_\psi(g),$$

por lo tanto $\chi_\rho = \chi_\varphi + \chi_\psi$. ■

2.3.4. Representaciones del grupo simétrico

Definición 2.3.22. Sea n un entero positivo. Una **partición** λ de n es una secuencia finita de enteros $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ tal que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$ y $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = n$. La notación $\lambda \vdash n$ o $|\lambda| = n$ indica que λ es una partición de n.

Si $r = 1$ entonces $\lambda_1 = n$ y escribimos $\lambda = (n)$. Para la partición $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$ utilizamos la notación $\lambda = (1^n)$. De manera similar, escribimos $\lambda = (k^d)$ siempre que $\lambda = (k, \cdots, k)$ y $n = kd$.

Ejemplo 2.3.23. Los siguientes son ejemplos de particiones para los enteros $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$ y 5.

- Para $n = 1$ tenemos una única partición $\lambda = (1)$.

- Para $n = 2$ tenemos las particiones $\lambda(1) = (2)$ y $\lambda(2) = (1, 1) = (1^2)$.

- Para $n = 3$ tenemos las particiones

$$\begin{aligned} \lambda(1) &= (3), \\ \lambda(2) &= (2, 1), \\ \lambda(3) &= (1^3). \end{aligned}$$

- Para $n = 4$ tenemos las particiones

$$\begin{aligned} \lambda(1) &= (4), \\ \lambda(2) &= (3, 1), \\ \lambda(3) &= (2, 2), \\ \lambda(4) &= (2, 1, 1), \\ \lambda(5) &= (1^4). \end{aligned}$$

- Para $n = 5$ tenemos las particiones

$$\begin{aligned}
\lambda(1) &= (5),\\
\lambda(2) &= (4,1),\\
\lambda(3) &= (3,2),\\
\lambda(4) &= (3,1,1),\\
\lambda(5) &= (2,2,1),\\
\lambda(6) &= (2,1,1,1),\\
\lambda(7) &= (1^5).
\end{aligned}$$

Definición 2.3.24 (**Tipo de ciclo**). Dada una permutación $\sigma \in S_n$, le podemos asignar una partición, llamada el **"tipo de ciclo"** de σ (Tipo (σ)). Podemos descomponer a σ en producto de ciclos disjuntos; esta descomposición es única si requerimos que

$$\sigma = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_r,$$

donde π_1 es un ciclo de tamaño λ_1, π_2 es un ciclo de tamaño λ_2, y sucesivamente, π_r es un ciclo de tamaño λ_r; además, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 1$. De esta manera

$$\text{Tipo } (\sigma) = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r).$$

Ejemplo 2.3.25. Si $n = 3$ se sabe que $S_3 = \{\text{id}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$. La descomposición adecuada para cada $\sigma \in S_3$ es la siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{id} &= (1)(2)(3),\\
(1\ 2) &= (1\ 2)(3),\\
(1\ 3) &= (1\ 3)(2),\\
(2\ 3) &= (2\ 3)(1),\\
(1\ 2\ 3) &= (1\ 2\ 3),\\
(1\ 3\ 2) &= (1\ 3\ 2).
\end{aligned}$$

Dado que por ejemplo, la permutación $(1\ 2)$ se descompone como $(1\ 2)(3)$, un ciclo de tamaño 2 y otro de tamaño 1, el tipo de ciclo de $(1\ 2)$ es $(2,1)$. De esta manera obtenemos que el tipo ciclo de cada una de las permutaciones de S_3 es:

$$\begin{aligned} &\text{Tipo (id)} = (1^3), && \text{Tipo } ((1\ 2)) = (2,1),\\ &\text{Tipo } ((1\ 3)) = (2,1), && \text{Tipo } ((2\ 3)) = (2,1),\\ &\text{Tipo } ((1\ 2\ 3)) = (3), && \text{Tipo } ((1\ 3\ 2)) = (3). \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.26. De manera recíproca, dada una partición λ podemos escribir la **clase de equivalencia asociada** a dicha partición (c(λ)); por ejemplo, para $\lambda = (3,1) \vdash 4$ tenemos que la clase de equivalencia asociada a λ es

$$\overline{(1\ 2\ 3)} = \{(1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2),\ (1\ 2\ 4),\ (1\ 4\ 2),\ (1\ 3\ 4),\ (1\ 4\ 3),\ (2\ 3\ 4),\ (2\ 4\ 3)\},$$

que claramente es de orden 8. Para las particiones de $n = 4$ tenemos las siguientes clases de equivalencia asociadas:

$$\begin{aligned} c((4)) &= \overline{(1\ 2\ 3\ 4)},\\ c((3,1)) &= \overline{(1\ 2\ 3)(4)},\\ c((2,2)) &= \overline{(1\ 2)(3\ 4)},\\ c((2,1,1)) &= \overline{(1\ 2)(3)(4)},\\ c((1^4)) &= \overline{\text{id}}. \end{aligned}$$

Si $\equiv$ es la relación de equivalencia de la Ecuación (B.1), tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.3.27. Dada ρ una representación de un grupo G, y dado $\overline{\sigma} \in G/\equiv$; entonces $\chi_\rho(\gamma) = \chi_\rho(\sigma)$ para todo $\gamma \in \overline{\sigma}$.

Demostración. Como $\gamma \in \overline{\sigma}$, entonces existe $\pi \in G$ tal que $\gamma = \pi\sigma\pi^{-1}$ (ver Ecuación (B.1)). Por la Proposición 2.3.19 tenemos entonces que

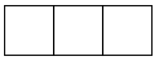
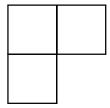
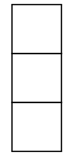
$$\chi_\rho(\sigma) = \chi_\rho(\pi\sigma\pi^{-1}) = \chi_\rho(\gamma). \qquad \blacksquare$$

2.3.5. Tablas de Young

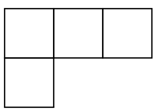
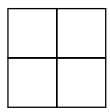
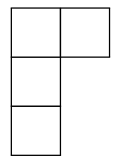
Definición 2.3.28. Para una partición $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ de un entero positivo n está asociado un **diagrama de Young** D_λ que es un arreglo de cajas con r filas y cada fila contiene λ_i cajas para cada i.

Ejemplo 2.3.29. Los siguientes son arreglos para algunas particiones $\lambda \vdash n$:

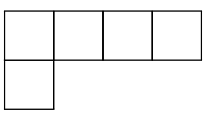
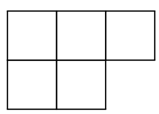
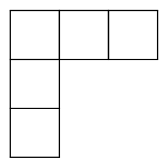
- Para $n = 3$ las particiones $\lambda(1) = (3)$, $\lambda(2) = (2,1)$ y $\lambda(3) = (1^3)$ tienen los siguientes arreglos:

$D_{\lambda(1)} =$  $D_{\lambda(2)} =$  $D_{\lambda(3)} =$ 

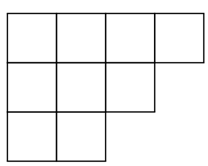
- Para $n = 4$ las particiones $\lambda(1) = (3,1)$, $\lambda(2) = (2,2)$ y $\lambda(3) = (2,1,1)$ tienen los siguientes arreglos:

$D_{\lambda(1)} =$  $D_{\lambda(2)} =$  $D_{\lambda(3)} =$ 

- Para $n = 5$ las particiones $\lambda(1) = (4,1)$, $\lambda(2) = (3,2)$ y $\lambda(3) = (3,1,1)$ tienen los siguientes arreglos:

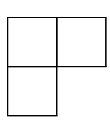
$D_{\lambda(1)} =$  $D_{\lambda(2)} =$  $D_{\lambda(3)} =$ 

- Para $n = 9$ la partición $\lambda = (4,3,2)$ tiene el arreglo

$D_\lambda =$ 

Definición 2.3.30. Dada una partición $\lambda \vdash n$; una **tabla de Young** del diagrama D_λ es un llenado de D_λ con los enteros $1,\ 2, \cdots, n$. Se denota por $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$ donde a_{ij} es el entero positivo en el cuadrado correspondiente a la fila i, columna j. De esta manera decimos que T_λ es de forma λ.

Ejemplo 2.3.31. Sea $\lambda = (2,1)$ entonces

$D_\lambda =$ 

y un par de llenados para D_λ son:

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad\qquad T_\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Dado que un diagrama D_λ tiene n cuadrados diferentes, si al primer cuadrado se le asigna un número cualquiera desde 1 hasta n, para el siguiente cuadrado tendremos que descontar dicho número de modo que, tendremos $n-1$ opciones distintas; y así de manera sucesiva hasta el último cuadrado en donde sólo tendremos una posibilidad. De esta manera, la cantidad de posibles llenados de D_λ es $n!$

Definición 2.3.32. Decimos que T_λ con forma λ es **estándar** si los números naturales incrementan de izquierda a derecha en cada fila y arriba hacia abajo en cada columna.

Ejemplo 2.3.33. Para la partición $\lambda = (5,2,1)$ un par de tablas de Young llenadas de forma estándar son:

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 6 & 7 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-2} 8 & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad\qquad T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 5 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-2} 3 & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Dada una partición $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ con diagrama de Young asociado D_λ, decimos que $\lambda' = (\lambda'_1, \cdots, \lambda'_s)$ es la **partición conjugada** de λ, y resulta de rotar el diagrama D_λ con respecto a la diagonal que parte desde arriba a la izquierda en el diagrama y termina abajo a la derecha en el mismo. Para representar esto veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.3.34. Sea $\lambda = (2,1,1) \vdash 4$. El diagrama correspondiente a esta partición es

$$D_\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Si este diagrama se gira con respecto a la diagonal mencionada obtenemos el diagrama

$$D_{\lambda'} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

luego la partición conjugada de λ es $\lambda' = (3,1) \vdash 4$.

En el siguiente capítulo veremos que las tablas de Young con llenado estándar están estrechamente relacionadas con el polinomio generador de algún submódulo irreducible del espacio de identidades polinomiales multilineales de $UT_2(\mathbb{F})$; más aún, cada tabla proporciona las herramientas necesarias para generar dichos submódulos.

2.3.6. Caracter asociado a una partición

Definición 2.3.35. Dada A un álgebra, para $n \geq 1$, el caracter de $P_n(A) = P_n/(P_n \cap \mathrm{Id}(A))$ es llamado el ***n*-ésimo cocaracter** de A y se denota por $\chi_n(A)$.

Si descomponemos a $\chi_n(A)$ en subrepresentaciones irreducibles escribimos

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda \tag{2.4}$$

donde χ_λ es el caracter irreducible asociado a la partición $\lambda \vdash n$ y $m_\lambda \geq 0$ es su correspondiente multiplicidad.

Como explica Drensky en [9, Capítulo 12, Sección 2], cada representación irreducible ρ de S_n se relaciona uno a uno con una partición n. De esta manera, $\chi_\lambda(\sigma)$ es el valor del caracter de la representación ρ en σ. Terminamos esta sección mostrando las tablas de caracteres para las representaciones irreducibles de S_2, S_3, y S_4.

λ \ Clase	$\overline{(1)}$	$\overline{(1\ 2)}$
orden	1	1
$(1,1)$	1	-1
(2)	1	1

Tabla 2.1: Tabla de caracteres de S_2.

λ \ Clase	$\overline{(1)}$	$\overline{(1\ 2)}$	$\overline{(1\ 2\ 3)}$
orden	1	3	2
$(1,1,1)$	1	-1	1
$(2,1)$	2	0	-1
(3)	1	1	1

Tabla 2.2: Tabla de caracteres de S_3.

Observación 2.3.36. En la parte superior de las tablas aparece únicamente el representante de cada una de las clases de conjugación de S_2, S_3 y S_4 respectivamente, porque como vimos en la Proposición 2.3.27, el caracter de cada elemento de una clase es igual al caracter del representante de esta.

Clase / λ	$\overline{(1)}$	$\overline{(1\ 2)}$	$\overline{(1\ 2\ 3)}$	$\overline{(1\ 2\ 3\ 4)}$	$\overline{(1\ 2)(3\ 4)}$
orden	1	6	8	6	3
$(1,1,1,1)$	1	-1	1	-1	1
$(2,1,1)$	3	-1	0	1	-1
$(3,1)$	3	1	0	-1	-1
(4)	1	1	1	1	1
$(2,2)$	2	0	-1	0	2

Tabla 2.3: Tabla de caracteres de S_4.

Ejemplo 2.3.37. De la Tabla (2.1) tenemos por ejemplo que si $\lambda = (1,1)$ y $\sigma \in \overline{(1\ 2)}$, entonces $\chi_\lambda(\sigma) = -1$; en la Tabla (2.2) si $\lambda = (2,1)$ y $\sigma = (1)$, entonces $\chi_\lambda(\sigma) = 2$ y en la Tabla (2.3) si $\lambda = (2,2)$ y $\sigma \in \overline{(1\ 2)(3\ 4)}$, entonces $\chi_\lambda(\sigma) = 2$.

Capítulo 3

Identidades Graduadas en $UT_2(\mathbb{F})$

El desarrollo de este capítulo se basa fundamentalmente en el trabajo de A. Valenti en [28]. Empezamos mostrando que toda $\mathbb{Z}_2$-graduación de $UT_2(\mathbb{F})$ es isomorfa a la graduación canónica; continuamos haciendo una caracterización del espacio de identidades multilineales graduadas de $UT_2(\mathbb{F})$ y, dado que una representación de dicho espacio se puede descomponer en la suma directa de subrepresentaciones, calculamos la multiplicidad de cada una de estas subrepresentaciones; luego terminamos el capítulo calculando algunos invariantes numéricos para $UT_2(\mathbb{F})$.

3.1. Graducaciones en $UT_2(\mathbb{F})$

En adelante asumiremos que $\mathbb{F}$ es un **campo de característica cero** , es decir, no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot 1_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}$.

Definición 3.1.1. Dado G un grupo arbitrario, decimos que $UT_2(\mathbb{F})$ tiene una **G-graduación canónica** si existe $g \in G$, $g \neq e$, tal que $UT_2(\mathbb{F}) = B_e \oplus B_g$, donde $B_e = \mathbb{F}E_{11} + \mathbb{F}E_{22}$ y $B_g = \mathbb{F}E_{12}$.

Teorema 3.1.2. Toda G-graduación en $UT_2(\mathbb{F})$ es, salvo isomorfismos, trivial o canónica.

Demostración. Sea $A = UT_2(\mathbb{F})$ y sea e el elemento identidad de G. Si $\dim(A_e) = 3$, entonces $A = A_e \oplus \{0\}$ tiene una graduación trivial. Asumamos que $\dim(A_e) \leq 2$.

Caso 1: Supongamos primero que $\dim(A_e) = 2$. De esta manera, asumamos que $E_{11} + E_{22}$ y $aE_{11} + bE_{12}$ forman una base para A_e sobre $\mathbb{F}$, es decir,

$$A_e = \operatorname{Span}\{E_{11} + E_{22}\ ,\ aE_{11} + bE_{12}\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{con } 1,\ a,\ b \in \mathbb{F}$$

y 1 es el neutro multiplicativo de $\mathbb{F}$. Como $\dim(A) = 3$ debe existir $g \neq e \in G$ tal que $\dim(A_g) = 1$. Dados $a',\ b',\ c' \in \mathbb{F}$ asumamos que

$$A_g = \operatorname{Span}\{a'E_{11} + b'E_{12} + c'E_{22}\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}\right\}.$$

Veamos que si $a = 0$ la condición de que $A_eA_g \subseteq A_g$ lleva a que $c' = 0$. Sea $x \in A_eA_g$ entonces

$$x = \begin{pmatrix} \alpha + \cancelto{0}{\beta a} & \beta b \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \gamma a' & \gamma b' \\ 0 & \gamma c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma a' & \alpha\gamma b' + \beta\gamma b c' \\ 0 & \alpha\gamma c' \end{pmatrix},$$

para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$. Para que $x \in A_g$ debe suceder que $c' = 0$, de esta manera

$$x = \alpha\gamma\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Por otro lado, la condición $A_gA_e \subseteq A_g$ lleva a que $a' = 0$. Veamos, dado $y \in A_gA_e \subseteq A_g$ entonces

$$y = \begin{pmatrix} \gamma a' & \gamma b' \\ 0 & \gamma c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta b \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\gamma a' & \beta\gamma a' b + \alpha\gamma b' \\ 0 & \alpha\gamma c' \end{pmatrix},$$

para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$. Si $a' = 0$ obtenemos que $y \in A_g$ puesto que

$$y = \alpha\gamma\begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}\right\}.$$

Así, si $a = 0$ debe ser que $a' = c' = 0$. Luego

$$A_g = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \subseteq \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} = A_e,$$

lo que resulta en una contradicción pues no se cumple que $A_g \cap A_e = \{0\}$. De esta manera $a \neq 0$, y debido a que

$$\frac{1}{a}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

obtenemos que $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ puede reemplazar al elemento $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en la base para A_e. Dado

que
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
podemos escribir una nueva base para A_e sobre $\mathbb{F}$, esto es,

$$A_e = \text{Span}\{E_{11} + bE_{12},\ E_{22} - bE_{12}\} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}. \tag{3.1}$$

Caso 1.a: Ahora, supongamos que $b \neq 0$ en la Ecuación (3.1). Por la condición $A_gA_e \subseteq A_g$ tenemos que
$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & a'b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a'\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A_g,$$
pero esta matriz también pertenece a A_e, luego

$$a'\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A_g \cap A_e = \{0\},$$

hecho que solo es posible si $a' = 0$. Debido a la condición $A_eA_g \subseteq A_g$, también tenemos que
$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = c'\begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in A_g \cap A_e = \{0\},$$
lo que lleva a que $c' = 0$. Entonces, si $b \neq 0$ obtenemos que $a' = c' = 0$. Por otra parte $b' \neq 0$, de lo contrario $A_g = \{0\}$. Esto permite decir que

$$A_g = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\},$$

Así, A se puede escribir de la siguiente manera,

$$A = A_e \oplus A_g = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \oplus \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Esta es una G-graduación isomorfa a la G-graduación canónica para $UT_2(\mathbb{F})$ expuesta en la Definición 3.1.1. Para ver esto, definimos una función φ_b sobre los elementos de ambas bases como sigue,

$$\begin{array}{rccc}
\varphi_b: & B_e \oplus B_g & \longrightarrow & A_e \oplus A_g \\
& \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{array}$$

En general, φ_b queda definido por

$$\begin{array}{rccc}
\varphi_b: & UT_2(\mathbb{F}) & \longrightarrow & UT_2(\mathbb{F}) \\
& \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} \alpha & (\alpha-\gamma)b+\beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix},
\end{array}$$

para todo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}$. Debemos comprobar, de acuerdo con la Definición 1.3.13, que φ_b es un isomorfismo de álgebras G-graduadas. Primero, φ_b es transformación lineal como veremos a continuación; para todo $\alpha,\ \beta,\ \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{F}$ con $i = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned}
\varphi_b\left[\alpha\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 \end{pmatrix}\right] &= \varphi_b\left[\begin{pmatrix} \alpha\alpha_1+\beta\beta_1 & \alpha\alpha_2+\beta\beta_2 \\ 0 & \alpha\alpha_3+\beta\beta_3 \end{pmatrix}\right] \\
&= \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1+\beta\beta_1 & (\alpha\alpha_1+\beta\beta_1-\alpha\alpha_3-\beta\beta_3)b+\alpha\alpha_2+\beta\beta_2 \\ 0 & \alpha\alpha_3+\beta\beta_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha\alpha_1+\beta\beta_1 & (\alpha\alpha_1-\alpha\alpha_3)b+\alpha\alpha_2+(\beta\beta_1-\beta\beta_3)b+\beta\beta_2 \\ 0 & \alpha\alpha_3+\beta\beta_3 \end{pmatrix} \\
&= \alpha\begin{pmatrix} \alpha_1 & (\alpha_1-\alpha_3)b+\alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} \beta_1 & (\beta_1-\beta_3)b+\beta_2 \\ 0 & \beta_3 \end{pmatrix} \\
&= \alpha\varphi_b\left[\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}\right] + \beta\varphi_b\left[\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & \beta_3 \end{pmatrix}\right].
\end{aligned}$$

En segundo lugar, φ_b es homomorfismo de álgebras, veamos,

$$\begin{aligned}
\varphi_b\left[\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ 0 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ 0 & \beta_3\end{pmatrix}\right] &= \varphi_b\left[\begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_3\\ 0 & \alpha_3\beta_3\end{pmatrix}\right]\\
&= \begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1 & (\alpha_1\beta_1-\alpha_3\beta_3)b+\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_3\\ 0 & \alpha_3\beta_3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1 & \alpha_1\beta_1 b-\alpha_1\beta_3 b+\alpha_1\beta_2+\alpha_1\beta_3 b-\alpha_3\beta_3 b+\alpha_2\beta_3\\ 0 & \alpha_3\beta_3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\alpha_1\beta_1 & \alpha_1[(\beta_1-\beta_3)b+\beta_2]+\beta_3[(\alpha_1-\alpha_3)b+\alpha_2]\\ 0 & \alpha_3\beta_3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\alpha_1 & (\alpha_1-\alpha_3)b+\alpha_2\\ 0 & \alpha_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1 & (\beta_1-\beta_3)b+\beta_2\\ 0 & \beta_3\end{pmatrix}\\
&= \varphi_b\left[\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ 0 & \alpha_3\end{pmatrix}\right]\varphi_b\left[\begin{pmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ 0 & \beta_3\end{pmatrix}\right].
\end{aligned}$$

Resta comprobar que $\varphi_b(B_e)\subseteq A_e$ y que $\varphi_b(B_g)\subseteq A_g$. Dada $y\in\varphi_b(B_e)$, entonces existe $x\in B_g$ tal que $\varphi_b(x)=y$. Como $x\in B_g$, entonces $x=\alpha E_{11}+\beta E_{22}$ y tenemos que

$$\begin{aligned}
y=\varphi_b(x)=\varphi_b(\alpha E_{11}+\beta E_{22}) &= \alpha\varphi_b(E_{11})+\beta\varphi_b(E_{22})\\
&= \alpha(E_{11}+bE_{12})+\beta(-bE_{12}+E_{22})\in A_e,
\end{aligned}$$

lo que comprueba que $\varphi_b(B_e)\subseteq A_e$. Por otra parte, dado $y\in\varphi_b(B_g)$, existe $x=\gamma E_{12}\in B_g$ tal que $y=\varphi_b(\gamma E_{12})=\gamma E_{12}\in A_g$, luego $\varphi_b(B_g)\subseteq A_g$.

Caso 1.b: Si $b=0$ en la Ecuación (3.1) entonces

$$A_e=\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\},$$

y por un razonamiento similar al hecho en el caso anterior ($b\neq 0$), se concluye que $a'=c'=0$; esto es, $A_gA_e\subseteq A_g$ implica que

$$\begin{pmatrix}a' & b'\\ 0 & c'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a' & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\in A_g\cap A_e=\{0\},$$

que solo es posible si $a' = 0$. La condición $A_eA_g \subseteq A_g$ implica que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in A_g \cap A_e = \{0\},$$

que conlleva a $c' = 0$, y llegamos a que

$$A = A_e \oplus A_g = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} \oplus \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\},$$

que es justamente la graduación canónica de $UT_2(\mathbb{F})$.

Caso 2: Si $\dim(A_e) = 1$, tenemos dos casos; en el primero, $UT_2(\mathbb{F}) = A_e \oplus A_g \oplus A_h$, donde $\dim(A_g) = \dim(A_h) = 1$; en el segundo $UT_2(\mathbb{F}) = A_e \oplus A_g$, donde $\dim(A_g) = 2$.

Caso 2.a: Supongamos primero que $UT_2(\mathbb{F}) = A_e \oplus A_g \oplus A_h$, donde $\dim(A_g) = \dim(A_h) = 1$. Si $gh \neq e$, entonces $A_gA_h \subseteq A_{gh} = \{0\} = A_{hg}$, de no ser así, $UT_2(\mathbb{F}) = A_e \oplus A_g \oplus A_h \oplus A_{gh} \oplus \cdots$, lo que implicaría que $\dim(UT_2(\mathbb{F})) > 3$, que es una contradicción. Surgen entonces los siguientes casos:

Caso 2.a.I: Si $g^2 \neq e$ y $h^2 \neq e$, entonces $A_g \oplus A_h$ es un ideal nilpotente de dimensión 2 de $UT_2(\mathbb{F})$. Para ver esto, se presentan los siguientes pasos:

***i*)** **$A_g \oplus A_h$ es subespacio de $UT_2(\mathbb{F})$**. Dados $(x_1 + x_2), (y_1 + y_2) \in A_g \oplus A_h$ verificamos que $\alpha(x_1 + x_2) + \beta(y_1 + y_2) = (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) \in A_g \oplus A_h$. Luego $A_g \oplus A_h$ es subespacio vectorial de $UT_2(\mathbb{F})$.

***ii*)** **$A_g \oplus A_h$ es subálgebra de $UT_2(\mathbb{F})$** . Queremos ver que $(A_g \oplus A_h)(A_g \oplus A_h) \subseteq A_g \oplus A_h$. Para esto tenemos antes que

$$(A_g \oplus A_h)(A_g \oplus A_h) = A_gA_g \oplus A_hA_h \subseteq A_{g^2} \oplus A_{h^2},$$

y surgen las siguientes posibilidades:

P1) Si $g^2 = h$, entonces

$$(A_g \oplus A_h)(A_g \oplus A_h) \subseteq A_h \oplus A_{h^2}$$

y si, $h^2 = g$ tenemos que

$$(A_g \oplus A_h)(A_g \oplus A_h) \subseteq A_h \oplus A_g,$$

luego $A_g \oplus A_h$ es subálgebra de $UT_2(\mathbb{F})$. Si $h^2 \neq g$, entonces $A_{h^2} = \{0\}$ y tenemos que

$$(A_g \oplus A_h)(A_g \oplus A_h) \subseteq A_h \oplus \{0\} \subseteq A_g \oplus A_h,$$

lo que permite decir que $A_g \oplus A_h$ es subálgebra de $UT_2(\mathbb{F})$.

P2) Si $g^2 \neq h$ entonces $A_{g^2} = \{0\}$ y obtenemos

$$(A_g \oplus A_h)(A_g \oplus A_h) \subseteq \{0\} \oplus A_{h^2}.$$

Si $h^2 \neq g$ entonces $A_{h^2} = \{0\}$, luego

$$(A_g \oplus A_h)(A_g \oplus A_h) \subseteq \{0\} \subseteq A_g \oplus A_h,$$

y $A_g \oplus A_h$ es subálgebra de $UT_2(\mathbb{F})$. Si $h^2 = g$ entonces

$$(A_g \oplus A_h)(A_g \oplus A_h) \subseteq A_g \subseteq A_g \oplus A_h.$$

Así, tenemos que $A_g \oplus A_h$ es subálgebra de $UT_2(\mathbb{F})$ en cualquier caso.

iii) $\boldsymbol{A_g \oplus A_h}$ **es un ideal de** $\boldsymbol{UT_2(\mathbb{F})}$. Para ver esto, debemos probar que

$$(A_g \oplus A_h)(UT_2(\mathbb{F})) \subseteq A_g \oplus A_h,$$

como verificamos a continuación:

$$\begin{aligned}(A_g \oplus A_h)(UT_2(\mathbb{F})) &= (A_g \oplus A_h)(A_e \oplus A_g \oplus A_h)\\ &\subseteq A_gA_e \oplus A_gA_g \oplus \cancelto{0}{A_gA_h} \oplus A_hA_e \oplus \cancelto{0}{A_hA_g} \oplus A_hA_h\\ &\subseteq A_g \oplus A_h \oplus A_{g^2} \oplus A_{h^2},\end{aligned}$$

pero antes comprobamos que $A_{g^2} \oplus A_{h^2} \subseteq A_g \oplus A_h$, luego

$$(A_g \oplus A_h)(UT_2(\mathbb{F})) \subseteq A_g \oplus A_h \oplus A_g \oplus A_h = A_g \oplus A_h.$$

iv) $\boldsymbol{A_g \oplus A_h}$ **es un ideal nilpotente de** $\boldsymbol{UT_2(\mathbb{F})}$**.** Queremos ver que existe un número entero positivo m tal que $(A_g \oplus A_h)^m = \{0\}$. Surgen las siguientes posibilidades:

P1) Si $g^2 \neq h$ y $h^2 \neq g$ entonces

$$(A_g \oplus A_h)^2 \subseteq A_{g^2} \oplus A_{h^2} = \{0\},$$

con lo cual $m = 2$ y $A_g \oplus A_h$ es nilpotente.

P2) Si $g^2 = h$ o $h^2 = g$ entonces

$$\begin{aligned}(A_g \oplus A_h)^3 &\subseteq (A_g \oplus A_h)^2 (A_g \oplus A_h)\\ &\subseteq (A_g A_g \oplus A_h A_h)(A_g \oplus A_h)\\ &\subseteq A_{g^2} A_g \oplus A_g \overset{0}{\cancel{(A_g A_h)}} \oplus A_h \overset{0}{\cancel{(A_h A_g)}} \oplus A_{h^2} A_h\\ &\subseteq A_{g^2} A_g \oplus A_{h^2} A_h.\end{aligned}$$

P2.1) Si $g^2 = h$ y $h^2 = g$ entonces $(A_g \oplus A_h)^3 = \{0\}$ y tenemos que $m = 3$.

P2.2) Ahora supóngase que $g^2 = h$ y $h^2 \neq g$, entonces

$$(A_g \oplus A_h)^3 \subseteq A_{h^2} A_h \subseteq A_{h^3},$$

donde $h^3 \neq gh$. Si $h^3 \neq g$ y $h^3 \neq e$ entonces $(A_g \oplus A_h)^3 = \{0\}$ y se concluye que $m = 3$.

P2.3) Si $h^3 = e$, entonces

$$\begin{aligned}(A_g \oplus A_h)^4 &= (A_g \oplus A_h)^3 (A_g \oplus A_h)\\ &\subseteq (A_{h^2} A_h)(A_g \oplus A_h)\\ &\subseteq A_{h^2} \overset{0}{\cancel{(A_h A_g)}} \oplus A_{h^2} A_h A_h\\ &\subseteq A_{h^3} A_h = A_e A_h \subseteq A_h,\end{aligned}$$

entonces,

$$(A_g \oplus A_h)^5 = (A_g \oplus A_h)^4 (A_g \oplus A_h) \subseteq A_h (A_g \oplus A_h) \subseteq A_{h^2}$$

y como $h^2 \neq g$, entonces $(A_g \oplus A_h)^5 = \{0\}$, luego $m = 5$.

P2.4) si $h^3 = g$, entonces $(A_g \oplus A_h)^3 \subseteq A_g$, luego

$$(A_g \oplus A_h)^4 \subseteq A_g (A_g \oplus A_h) \subseteq A_{g^2},$$

y puesto que $g^2 = h$, entonces $A_{g^2} = A_h$ y tenemos

$$(A_g \oplus A_h)^5 = (A_g \oplus A_h)^4 (A_g \oplus A_h) \subseteq A_h (A_g \oplus A_h) = \{0\},$$

y de nuevo $m = 5$.

El caso en el que $h^2 = g$ y $g^2 \neq h$ es análogo a lo visto desde las posibilidades **P2.1)** hasta **P2.4)**. De esta manera, hemos probado que si $gh \neq e$, $g^2 \neq e$ y $h^2 \neq e$ entonces $A_g \oplus A_h$ es un ideal nilpotente de $UT_2(\mathbb{F})$.

Por el Lema 2.2.21, dicho ideal debería estar contenido en $\mathrm{J}(UT_2(\mathbb{F}))$, pero de acuerdo con el Ejemplo 2.2.15, se contradice el hecho de que $\dim[\mathrm{J}(UT_2(\mathbb{F}))] = 1$. Así, debe ser que $g^2 \neq e$ y $h^2 = e$ (o al contrario), o que $g^2 = h^2 = e$.

Caso 2.a.II: Supongamos que $g^2 \neq e$ y $h^2 = e$, de esta manera comprobamos a continuación que $A_g = \mathrm{J}(UT_2(\mathbb{F}))$. Si $g^2 = h$ tenemos que

$$A_g A_g A_g \subseteq A_g A_{g^2} = A_g A_h = \{0\},$$

con lo cual A_g es un ideal nilpotente de dimensión uno de $UT_2(\mathbb{F})$ y debido al Lema 2.2.21 este debe estar contenido en $\mathrm{J}(UT_2(\mathbb{F}))$, pero $\dim(A_g) = \dim[\mathrm{J}(UT_2(\mathbb{F}))] = 1$ entonces $A_g = \mathrm{J}(UT_2(\mathbb{F}))$. Ahora, si $g^2 \neq h$ entonces $A_g A_g \subseteq A_{g^2} = \{0\}$ obteniendo de nuevo que A_g es nilpotente y en consecuencia $A_g = \mathrm{J}(UT_2(\mathbb{F}))$. Ahora sea $A_h = \mathbb{F}(aE_{11} + bE_{12} + cE_{22})$; de la condición $A_g A_h = \{0\}$ y $A_h A_g = \{0\}$ tenemos que $a = c = 0$. Veamos, dado $\beta \neq 0 \in \mathbb{F}$ tenemos,

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A_{gh} = \{0\}$$

y

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A_{hg} = \{0\},$$

que solo es posible si $a = c = 0$. De esta manera $A_g = A_h$, lo que es una contradicción. El caso en el que $g^2 = e$ y $h^2 \neq e$ es análogo.

Caso 2.a.III: Si $g^2 = h^2 = e$, verifiquemos primero que la matriz identidad (denotada por 1) pertenece al subespacio A_e, es decir,

$$A_e = \mathrm{Span}\{E_{11}+E_{22}\} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}.$$

Supongamos que la identidad admite una descomposición como suma de componentes homogéneas, es decir, que $1 = 1_e + 1_g + 1_h \in A_e \oplus A_g \oplus A_e$, y verifiquemos que $1_g = 1_h = 0$. Puesto que $\dim(A_g) = 1$, sea $A_g = \mathbb{F}w$ y notemos que para cada $u \in A_g,\ u \neq 0$, tenemos que

$$u \cdot 1 = u1_e + u1_g + u1_h, \tag{3.2}$$

donde $u1_e \in A_g,\ u1_g \in A_e$, y $u1_h \in A_{hg} = \{0\}$. También, para cada $u \in A_g$ existe $\alpha_u \in \mathbb{F}$ tal que $u = \alpha_u w$; del mismo modo, ya que $1_g \in A_g$ existe $\alpha \in \mathbb{F}$ tal que $1_g = \alpha u$. Como $u \in A_g$, la Ecuación (3.2) se satisface solo si $u1_g = 0$ para cada $u \in A_g$. De esta manera tenemos que

$$0 = 1_g \cdot u = (\alpha w)(\alpha_u w) = \alpha\alpha_u w^2,$$

para cada $u \in A_g$. Si se supone que $\alpha\alpha_u \neq 0$, entonces $w^2 = 0$, o de manera equivalente $A_gA_g \subseteq \{0\}$, y como se explicó en el Caso 2.a.*ii*, $A_g = A_h = \mathrm{J}(UT_2(\mathbb{F}))$, una contradicción. De esta manera $\alpha\alpha_u = 0$ para cada $u \in A_g$, pero $u \neq 0$ luego $\alpha_u \neq 0$, entonces $\alpha = 0$ y tenemos que $1_g = 0$. Por un razonamiento análogo comprobamos que $1_h = 0$ y, en consecuencia $1 = 1_e \in A_e$.

Dado que $u^2 \in A_{g^2} = A_e$ y $v^2 \in A_{h^2} = A_e$ para todo u y v en A_g y A_h respectivamente, podemos escoger $u_0 \in A_g$ y $v_0 \in A_h$ tal que $u_0^2 = v_0^2 = 1$. Así, $u_0v_0 \neq 0$, de lo contrario tendríamos que $u_0^2v_0^2 = 1 \cdot 1 = 0$, absurdo. En consecuencia $0 \neq u_0v_0 \in A_{gh} = \{0\}$, contradicción que surge de suponer que $g^2 = h^2 = e$.

De esta manera hemos comprobado que cuando $gh \neq e$ entonces no podemos escribir a $UT_2(\mathbb{F})$ como suma directa de los subespacios A_e, A_g y A_h. Para los siguientes casos asumimos que $gh = e$, de esta manera $g^2 \neq e$, de lo contrario, $g^2 = gh$ de donde tenemos que $g = h$, una contradicción. Por un razonamiento análogo, $h^2 \neq e$.

Caso 2.a.IV: Si $g^2 \neq h$ entonces $h^2 \neq g^2h = g(gh) = g$. De esta manera tenemos que

$$A_gA_g \subseteq A_{g^2} = \{0\} \quad \text{y} \quad A_hA_h \subseteq A_{h^2} = \{0\},$$

con lo cual $A_g = A_h = \mathrm{J}(UT_2(\mathbb{F}))$, una contradicción.

Caso 2.a.V: Si $g^2 = h$ entonces $h^2 = g^2h = g(gh) = g$. Procedemos a comprobar que $1 \in A_e$. Sea $A_g = \mathbb{F}w$, tenemos entonces que

$$\mathbb{F}w^2 = \mathbb{F}w\mathbb{F}w = A_gA_g \subseteq A_{g^2} = A_h,$$

donde $w^2 \neq 0$, de lo contrario $A_g = \mathrm{J}(UT_2(\mathbb{F}))$ y, como se mostró en la Proposición 2.2.6, tendríamos que A_g es un ideal bilateral, luego $A_gA_h \subseteq A_g$, pero $A_gA_h \subseteq A_e$, en consecuencia $A_gA_h \subseteq A_g \cap A_e = \{0\}$. Como comprobamos en el Caso 2.a.*ii* si A_g es el radical de Jacobson y tenemos que $A_gA_h = \{0\}$ entonces $A_g = A_h$, contradicción, por tanto $w^2 \neq 0$. Puesto que $\dim(\mathbb{F}w^2) = \dim(A_h) = 1$, podemos escribir $A_h = \mathbb{F}w^2$. Dado que $g^2 = h$ entonces $g^3 = gh = e$, y tenemos que

$$\mathbb{F}w^3 = \mathbb{F}w\mathbb{F}w\mathbb{F}w = A_gA_gA_g \subseteq A_{g^3} = A_e.$$

Supongamos, como en el Caso 2.a.*iii*, que $1 = 1_e + 1_g + 1_h$, con lo cual para todo $u \neq 0 \in A_g$ obtenemos,

$$u \cdot 1 = u1_e + u1_g + u1_h$$

donde,

$$\begin{aligned} u1_e &\in A_gA_e \subseteq A_{ge} = A_g, \\ u1_g &\in A_gA_g \subseteq A_{g^2} = A_h, \\ u1_h &\in A_gA_h \subseteq A_{gh} = A_e. \end{aligned}$$

Así, puesto que $u \in A_g$, debe ser que $u1_g = 0$ y $u1_h = 0$ para todo $u \in A_g$. Dado que $u,\ 1_g \in A_g$ entonces ambos son múltiplos de w, es decir $u = \alpha_u w$ para cada $u \in A_g$ y $1_g = \beta w$; por otra parte como $1_h \in A_h$, debe ser que $1_h = \gamma w^2$, y tenemos así lo siguiente,

$$0 = u1_g = (\alpha_u w)(\beta w) = \alpha_u \beta w^2$$

$$\text{y}$$

$$0 = u1_h = (\alpha_u w)(\gamma w^2) = \alpha_u \gamma w^3.$$

Dado que $w^2 \neq 0$ y $\alpha_u \neq 0$, tenemos que $\beta = 0$ y en consecuencia $1_g = 0$. Si $w^3 = 0$ llegamos a la misma contradicción que encontramos cuando $w^2 = 0$ pues A_g sería nilpotente; de esta manera, $w^3 \neq 0$ y tenemos que $\gamma = 0$, luego $1_h = 0$. hemos probado entonces que $1_e = 1$ y como $\mathbb{F}w^3 \subseteq A_e$ podemos decir que w^3 es múltiplo de la identidad, luego podemos escoger $w \in A_g$ tal que $w^3 = 1$ y tenemos también que $A_e = \mathbb{F}1$. Sea entonces $w = \alpha E_{11} + \beta E_{12} + \gamma E_{22}$, de manera que w^3 es

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta + \gamma\beta \\ 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^3 & [\alpha^2 + \alpha\gamma + \gamma^2]\beta \\ 0 & \gamma^3 \end{pmatrix}; \tag{3.3}$$

y para que $w^3 = 1$ surgen dos posibilidades;

1) $\beta \neq 0$, en cuyo caso α y γ deben ser raíces cúbicas de la unidad en $\mathbb{F}$ relativamente diferentes. Si suponemos que α y γ son raíces cúbicas de la unidad relativamente iguales en la Ecuación (3.3), tendríamos que

$$\begin{aligned} w^3 &= \alpha^3 E_{11} + 3\alpha^2\beta E_{12} + \gamma^3 E_{22} \\ &= E_{11} + 3\alpha^2\beta E_{12} + E_{22}, \end{aligned}$$

donde $3\alpha^2\beta \neq 0$, y en consecuencia $w^3 \notin A_e$, contradicción. las únicas raíces cúbicas de la unidad relativamente diferentes entre si son 1, $e^{\frac{2\pi}{3}i}$ y $e^{\frac{4\pi}{3}i}$, las demás son múltiplos de estas tres. Si probamos las tres posibles combinaciones de α y γ relativamente diferentes obtenemos la identidad, por ejemplo, sean $\alpha = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ y $\gamma = e^{\frac{4\pi}{3}i}$ en la Ecuación (3.3); verificamos que

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi}{3}i} & \beta \\ 0 & e^{\frac{4\pi}{3}i} \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} e^{2\pi i} & [e^{\frac{4\pi}{3}i} + (e^{\frac{2\pi}{3}i})(e^{\frac{4\pi}{3}i}) + e^{\frac{8\pi}{3}}]\beta \\ 0 & e^{4\pi i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dado que $A_e = \mathbb{F}1$, $A_g = \mathbb{F}w$ y $A_h = \mathbb{F}w^2$ tenemos entonces que

$$UT_2(\mathbb{F}) = \mathbb{F}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} \oplus \mathbb{F}\begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta(\alpha+\gamma) \\ 0 & \gamma^2 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{F}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pero la identidad se puede escribir como combinación lineal de las matrices w y w^2, esto es,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta(\alpha+\gamma) \\ 0 & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

donde $x = \alpha^{-1} + \gamma^{-1}$ e $y = -\alpha^{-1}\gamma^{-1}$. Luego $\dim(A_e \oplus A_g \oplus A_h) = 2$ lo que es una contradicción con respecto al hecho de que $\dim(UT_2(\mathbb{F})) = 3$.

2) $\beta = 0$, en cuyo caso α y γ pueden ser cualquier raíz cúbica de la unidad. Sea entonces $w = \alpha E_{11} + E_{22}$, encontramos que

$$w^2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$w^3 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y de esta manera obtenemos,

$$UT_2(\mathbb{F}) = \mathbb{F}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{F}\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{F}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pero de nuevo, la identidad puede ser escrita como combinación lineal de las matrices w y w^2, es decir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde $x = 1 + \alpha^{-1}$ e $y = -\alpha^{-1}$ si $\alpha \neq 1$. En el caso en el que $\alpha = 1$ entonces sea $x = 1$ e $y = 0$; de cualquier manera $\dim(A_e \oplus A_g \oplus A_h) < 3$, contradicción. Las contradicciones **1)** y **2)** resultan de suponer que $g^2 = h$, es decir que esto tampoco se puede dar.

Así, quedan cubiertas todas las alternativas para cuando $UT_2(\mathbb{F}) = A_e \oplus A_g \oplus A_h$, con $\dim(A_g) = \dim(A_h) = 1$, obteniendo contradicciones en cualquier caso. Resta entonces examinar cuando $UT_2(\mathbb{F}) = A_e \oplus A_g$ con $\dim(A_e) = 1$ y $\dim(A_g) = 2$.

Caso 2.b: $UT_2(\mathbb{F}) = A_e \oplus A_g$ con $\dim(A_e) = 1$ y $\dim(A_g) = 2$.

Caso 2.b.I: Si $g^2 \neq e$ entonces $A_gA_g = \{0\}$ y tenemos que A_g es nil, luego $A_g \subseteq \mathrm{J}(UT_2(\mathbb{F}))$ pero esto es una contradicción pues $\dim[\mathrm{J}(UT_2(\mathbb{F}))] = 1$.

Caso 2.b.II: Si $g^2 = e$, entonces $A_gA_g \subseteq A_e$. Como $\dim(A_g) = 2$ y $\dim(A_e) = 1$ supongamos entonces que $A_g = \mathbb{F}u \oplus \mathbb{F}v$, y que $A_e = \mathbb{F}w$, con $u,\ v,\ w \in UT_2(\mathbb{F})$. Sean

$$u = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad w = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

para elementos $a,\ b,\ c,\ a_i,\ b_i,\ c_i,\ i=1,\ 2$, fijos en $\mathbb{F}$. De esta manera tenemos que

$$A_g = \mathbb{F}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{F}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad A_e = \mathbb{F}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Con lo cual, podemos decir que $b_2u - b_1v \in A_g$; esto es,

$$b_2\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} - b_1\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix} \in A_g,$$

donde $a_3 = a_1b_2 - a_2b_1$ y $c_3 = b_2c_1 - b_1c_2$ son elementos en $\mathbb{F}$. Por un razonamiento similar tenemos que

$$\begin{pmatrix} a_4 & b_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b_5 \\ 0 & c_5 \end{pmatrix} \in A_g.$$

Dado que por hipótesis $u_1^2 \in A_e$ para todo $u_1 \in A_g$; entonces obtenemos,

$$\begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_3^2 & 0 \\ 0 & c_3^2 \end{pmatrix} \in A_e, \quad \begin{pmatrix} a_4 & b_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a_4^2 & a_4b_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in A_e,$$
$$\begin{pmatrix} 0 & b_5 \\ 0 & c_5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & b_5^2 \\ 0 & b_5c_5 \end{pmatrix} \in A_e.$$

De esta manera, estas matrices son múltiplos de la matriz w; esto es, existen $\alpha,\ \beta$ y γ diferentes de 0 en $\mathbb{F}$ tal que

$$\begin{pmatrix} a_3^2 & 0 \\ 0 & c_3^2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_4^2 & a_4b_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & b_5^2 \\ 0 & b_5c_5 \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix};$$

en consecuencia obtenemos que

$$\alpha^{-1}\begin{pmatrix} a_3^2 & 0 \\ 0 & c_3^2 \end{pmatrix} = \beta^{-1}\begin{pmatrix} a_4^2 & a_4b_4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \gamma^{-1}\begin{pmatrix} 0 & b_5^2 \\ 0 & b_5c_5 \end{pmatrix};$$

lo que implica que $a_3^2 = c_3^2 = 0$. Pero $\mathbb{F}$ es un campo de característica cero, con lo cual $a_3 = c_3 = 0$; y puesto que u y v son linealmente independientes, entonces $b_1 = b_2 = 0$. De esta manera, tenemos que

$$A_g = \mathbb{F}\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{F}\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Haciendo la combinación lineal $a_2u - a_1v$ obtenemos,

$$a_2\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} - a_1\begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_5 \end{pmatrix} \in A_g,$$

con $c_5 = a_2c_1 - a_1c_2$. Si $c_5 \neq 0$ entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_5^2 \end{pmatrix} = c_5\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_5 \end{pmatrix} \in A_g \cap A_e,$$

lo que es un absurdo pues $A_g \cap A_e = \{0\}$. Si $c_5 = 0$, de nuevo, puesto que u y v son linealmente independientes, tenemos que $a_1 = a_2 = 0$. Con lo cual,

$$A_g = \mathbb{F}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \oplus \mathbb{F}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \mathbb{F}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

pero esto también es un absurdo pues $\dim(A_g) = 2$. Así, g^2 tampoco puede ser e.

Caso 2.b.III: Si $g^2 = g$ entonces $g = e$, con lo cual $A_g = A_e$, absurdo.

De esta manera hemos abarcado todas las posibilidades del Caso 2 y encontramos que no es posible que $\dim(A_e) = 1$. Por lo tanto, $\dim(A_e) = 2$ y $\dim(A_g) = 1$, y como vimos en el Caso 1, toda $\mathbb{Z}_2$-graduación de $UT_2(\mathbb{F})$ es isomorfa a la graduación canónica de la Definición 3.1.1. ■

3.2. Caracteres graduados y codimensiones

De acuerdo con la sección anterior, asumiremos que $A = UT_2(\mathbb{F})$ es un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, como se ilustra en el Ejemplo 1.3.15. Sea $\mathbb{F}\langle X\rangle$ el álgebra libre asociativa sobre el conjunto contable $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$. De acuerdo con la Definición 1.3.9 en adelante asumiremos que $G = \mathbb{Z}_2$ y que $X = Y \cup Z$ donde $Y = \{y_1, y_2, \cdots\}$, $Z = \{z_1, z_2, \cdots\}$ y $Y \cap Z = \emptyset$. Entonces $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ tiene estructura de super-álgebra (Definición 1.3.3) asumiendo que las variables $y_i \in Y$ y $z_i \in Z$ son de grado homogéneo 0 y 1 respectivamente; más precisamente, la graduación inducida sobre $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ viene dada por

$$\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}} = \mathbb{F}\langle X\rangle^{(0)} \oplus \mathbb{F}\langle X\rangle^{(1)},$$

donde $\mathbb{F}\langle X\rangle^{(0)}$ es el subespacio de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ generado por los monomios de grado homogéneo 0, esto es, aquellos que tengan grado par solo en las variables de Z; de manera análoga, $\mathbb{F}\langle X\rangle^{(1)}$ es el subespacio generado por los monomios de grado homogéneo 1, esto es, los que tengan grado impar en las variables de Z.

Ejemplo 3.2.1. El monomio $y_1z_1y_2z_2$ es de grado homogéneo 0 puesto que $0\cdot 1\cdot 0\cdot 1 = 0 \in \mathbb{Z}_2$; mientras que el monomio $y_1z_1y_2$ es de grado homogéneo 1 pues $0\cdot 1\cdot 0 = 1 \in \mathbb{Z}_2$. Notemos que el primer monomio tiene grado usual par en las variables de Z y el segundo monomio tiene grado usual impar en las variables de Z.

En la Proposición 1.3.14 demostramos que cualquier mapeo de $Y \cup Z \to A$ que preserve graduaciones se puede extender de manera única en un homomorfismo de super-álgebras $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}} \to A$. Continuando con el álgebra libre asociativa $\mathbb{Z}_2$-graduada tenemos lo siguiente:

Definición 3.2.2. Un **$\mathbf{T_2}$-ideal** de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ es un ideal que es invariante bajo endomorfismos de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ que preservan graduaciones.

Proposición 3.2.3. Dada $A = A_0 \oplus A_1$ un álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, entonces el ideal $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A) = \{f \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}} \mid f \equiv 0 \text{ en } A\}$ es T_2-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$.

Demostración. Para ver que el ideal $I = \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ es T_2-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$, debemos comprobar que $\varphi(f) \in I$ para todo $f \in I$ y para todo $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}})$ que preserva graduaciones. Sea $f(y_1,\cdots,y_n,z_1,\cdots,z_m) \in I$ donde las variables y_i's y las variables z_i's son de grado homogéneo 0 y 1 respectivamente. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(f(y_1,\cdots,y_n,z_1,\cdots,z_m)) &= f(\varphi(y_1),\cdots,\varphi(y_n),\varphi(z_1),\cdots,\varphi(z_m))\\ &= f(g_1,\cdots,g_n,h_1,\cdots,h_m),\end{aligned}$$

donde por hipótesis, los $g_1,\cdots,g_n$ y los $h_1,\cdots,h_m$ son polinomios de grado homogéneo 0 y 1 respectivamente. Al evaluar en cualesquier elementos $a_{i_1},\cdots,a_{i_s} \in A_0$ y en cualesquier $b_{i_1},\cdots,b_{i_t} \in A_1$ obtenemos

$$f(g_1,\cdots,g_n,h_1,\cdots,h_m)(a_{i_1},\cdots,a_{i_s},b_{i_1},\cdots,b_{i_t}) = f(a_{j_1},\cdots,a_{j_s},b_{j_1}\cdots,b_{j_t}),$$

donde los elementos $a_{j_1},\cdots,a_{j_n}$ y los elementos $b_{j_1},\cdots,b_{j_m}$ son de grado homogéneo 0 y 1 respectivamente. Puesto que $f\in I$, entonces $f(a_{j_1},\cdots,a_{j_s},b_{j_1}\cdots,b_{j_t})=0$, luego $\varphi(f)\in I$. ■

Observación 3.2.4. Dado $S\subseteq\mathbb{F}\langle X\rangle^{\text{gr}}$, entonces $\langle S\rangle_{\text{T}_2}$ es el T_2-ideal generado por S en $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\text{gr}}$, caracterizado de la siguiente manera:

$$\langle S\rangle_{\text{T}_2}=\left\{\sum p_i\ f_i\left(h_{i_1}^{(g_{i_1})},\cdots,h_{i_n}^{(g_{i_n})}\right)q_i\ \middle|\ f_i\in S,\ h_{i_j}^{(g_{i_j})}\in\mathbb{F}\langle X\rangle^{(g_{i_j})},\ p_i,\ q_i\in\mathbb{F}\langle X\rangle^{\text{gr}}\right\}.$$

La prueba de esta afirmación es análoga a la vista en la prueba de la Proposición 1.2.11.

3.2.1. El espacio de Polinomios multilineales $\mathbb{Z}_2$-graduados

Definición 3.2.5. Definimos a P_n^{gr} como el **espacio de polinomios multilineales de grado *n*** en las variables de Y y Z. En este sentido, podemos escribir

$$\begin{aligned}P_n^{\text{gr}}&=\text{Span}_{\mathbb{F}}\{x_{\sigma(1)}^{(g_1)}\cdots x_{\sigma(n)}^{(g_n)}\mid\sigma\in S_n,\ g_1,\cdots,g_n\in\mathbb{Z}_2\}\\&=\text{Span}_{\mathbb{F}}\{w_{\sigma(1)}\cdots w_{\sigma(n)}\mid\sigma\in S_n,\ w_i=y_i\text{ o }w_i=z_i,\ i=1,\cdots,n\}.\end{aligned}$$

Observación 3.2.6. Por la construcción de P_n^{gr}, podemos decir de éste que es un subespacio de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\text{gr}}$ con $X=Y\cup Z$.

Dado que existen $|S_n|=n!$ monomios de la forma $x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}$, y teniendo en cuenta que existen dos posibilidades para el grado homogéneo de cada variable (el orden de $\mathbb{Z}_2$), entonces 2^n es el número de monomios de la forma $x^{(g_1)}\cdots x^{(g_n)}$. De esta manera tenemos que $\dim(P_n^{\text{gr}})=2^n n!$.

Ejemplo 3.2.7. Si $n=2$ tenemos entonces que

$$\begin{aligned}P_2^{\text{gr}}&=\text{Span}_{\mathbb{F}}\{x_{\sigma(1)}^{(g_1)},\ x_{\sigma(2)}^{(g_2)}\mid\sigma\in S_2,\ g_1,g_2\in\mathbb{Z}_2\}\\&=\text{Span}_{\mathbb{F}}\{x_1^{(0)}x_2^{(0)},\ x_1^{(0)}x_2^{(1)},\ x_1^{(1)}x_2^{(0)},\ x_1^{(1)}x_2^{(1)},\ x_2^{(0)}x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}x_1^{(1)},\ x_2^{(1)}x_1^{(0)},\ x_2^{(1)}x_1^{(1)}\}\\&=\text{Span}_{\mathbb{F}}\{y_1y_2,\ y_1z_2,\ z_1y_2,\ z_1z_2,\ y_2y_1,\ y_2z_1,\ z_2y_1,\ z_2z_1\}\\&=\text{Span}_{\mathbb{F}}\{w_{\sigma(1)}w_{\sigma(2)}\mid\sigma\in S_2,\ w_i=y_i\text{ o }w_i=z_i,\ i=1,\ 2\},\end{aligned}$$

donde $\dim(P_2^{\text{gr}})=2^2 2!=8$.

Ejemplo 3.2.8. Si $n = 3$ tenemos entonces que

$$\begin{aligned} P_3^{\mathrm{gr}} &= \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{x_{\sigma(1)}^{(g_1)},\, x_{\sigma(2)}^{(g_2)},\, x_{\sigma(3)}^{(g_3)} \mid \sigma \in S_3,\ g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{Z}_2\} \\ &= \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{x_1^{(0)}x_2^{(0)}x_3^{(0)},\, x_1^{(0)}x_2^{(0)}x_3^{(1)}, \cdots, x_3^{(1)}x_1^{(1)}x_2^{(1)}\} \\ &= \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{y_1y_2y_3,\, y_1y_2z_3, \cdots,\, z_3z_1z_2\} \\ &= \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{w_{\sigma(1)}w_{\sigma(2)}w_{\sigma(3)} \mid \sigma \in S_3,\ w_i = y_i \text{ o } w_i = z_i,\ i = 1,\ 2,\ 3\}, \end{aligned}$$

donde $\dim(P_3^{\mathrm{gr}}) = 2^3 3! = 48$.

3.2.2. H_n-módulos

Definición 3.2.9. El **producto corona** entre $\mathbb{Z}_2$ y el grupo simétrico S_n es el grupo definido por

$$H_n = \mathbb{Z}_2 \wr S_n = \{(a_1, \cdots, a_n;\ \sigma) \mid a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}_2,\ \sigma \in S_n\},$$

con operación binaria

$$(a_1, \cdots, a_n;\ \sigma)(b_1, \cdots, b_n;\ \tau) = (a_1 b_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots, a_n b_{\sigma^{-1}(n)};\ \sigma\tau),$$

para todo $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{Z}_2$ y todo $\sigma,\ \tau \in S_n$.

Observación 3.2.10. El grupo H_n es conocido como **grupo hiperoctaedral**. Dados $\mathbf{h} = (a_1, \cdots, a_n;\ \sigma) \in H_n$ y $f(x_1, \cdots, x_n) \in P_n^{\mathrm{gr}}$, entonces la operación

$$\mathbf{h} f(x_1, \cdots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}^{(a_{\sigma(1)}^{-1})}, \cdots,\ x_{\sigma(n)}^{(a_{\sigma(n)}^{-1})}),$$

define una acción del álgebra de grupo $\mathbb{F}H_n$ sobre P_n^{gr}, con lo cual este último es un $\mathbb{F}H_n$-módulo o simplemente H_n-módulo.

Ejemplo 3.2.11. Sean $\mathbf{h} = (1, 1, 0;\ (1\ 3)) \in H_3$ y $f \in P_3^{\mathrm{gr}}$ tal que

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_2x_1x_3 - 3x_3x_1x_2 + 5x_1x_2x_3 - 2x_1x_3x_2.$$

De acuerdo a la forma de $\mathbf{h}$, tenemos que $a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 0$ y que $\sigma = (1\ 3)$; entonces $a_{\sigma(1)} = a_3 = 0$; como 0 y 1 son sus propios inversos en $\mathbb{Z}_2$, tenemos que $a_3^{-1} = 0$, de forma análoga, $a_{\sigma(2)}^{-1} = a_2^{-1} = 1$ y $a_{\sigma(3)}^{-1} = a_1^{-1} = 1$. Así, de acuerdo con la acción indicada en la

Definición 3.2.9, y recordando que las variables de $Y = \{y_1, y_2, \cdots\}$ y $Z = \{z_1, z_2, \cdots\}$ son de grado homogéneo 0 y 1 respectivamente, obtenemos el polinomio

$$\begin{aligned}\mathbf{h}f(x_1,x_2,x_3) &= f(x_{\sigma(1)}^{(a_{\sigma(1)}^{-1})}, \cdots, x_{\sigma(n)}^{(a_{\sigma(n)}^{-1})}) \\ &= f(x_3^{(0)}, x_2^{(1)}, x_1^{(1)}) \\ &= f(y_3, z_2, z_1) \\ &= 2z_2y_3z_1 - 3z_1y_3z_2 + 5y_3z_2z_1 - 2y_3z_1z_2.\end{aligned}$$

3.2.3. Cocaracteres y codimensiones

En la Proposición 3.2.3 comprobamos que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ es T-ideal de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$, de acuerdo entonces con la Proposición 2.1.10, tenemos que $P_n^{\mathrm{gr}} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$, el espacio de identidades multilineales $\mathbb{Z}_2$-graduadas de grado n en las primeras n variables, es H_n-submódulo de P_n^{gr}; luego cobra sentido la siguiente definición:

Definición 3.2.12. Definimos a $P_n^{\mathrm{gr}}(A)$, el espacio de elementos multilineales de grado n en el álgebra relativamente libre $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}/\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$, como

$$P_n^{\mathrm{gr}}(A) = \frac{P_n^{\mathrm{gr}}}{P_n^{\mathrm{gr}} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)}.$$

Denotamos al caracter de $P_n^{\mathrm{gr}}(A)$ por $\chi_n^{\mathrm{gr}}(A)$.

La secuencia

$$c_n^{\mathrm{gr}}(A) = \chi_n^{\mathrm{gr}}(A)(e) = \dim P_n^{\mathrm{gr}}(A), \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{3.4}$$

donde e es el neutro de S_n, es conocida como la **secuencia de codimensiones graduadas** de A.

De acuerdo con Giambruno en [16], existe una correspondencia uno a uno entre los caracteres irreducibles de H_n y las parejas de particiones (λ, μ), donde $\lambda \vdash r$, $\mu \vdash n - r$, para todo $r = 0, 1, \cdots, n$. Si $\chi_{\lambda,\mu}$ denota el caracter irreducible de H_n correspondiente a (λ, μ) entonces podemos escribir

$$\chi_n^{\mathrm{gr}}(A) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} m_{\lambda,\mu}\, \chi_{\lambda,\mu}, \tag{3.5}$$

donde los $m_{\lambda,\mu} \geq 0$ son las correspondientes multiplicidades.

Definición 3.2.13. Para un $r \in \{0, \cdots, n\}$, sea

$$P_{r,n-r} = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n,\ w_i = y_i \text{ para } i = 1, \cdots, r \\ \text{y } \ w_i = z_i \text{ para } i = r+1, \cdots, n\}$$

el espacio de polinomios multilineales en las variables $y_1, \cdots, y_r$ y $z_{r+1}, \cdots, z_n$.

Por la multihomogeneidad de los T_2-ideales, para estudiar $P_n^{\mathrm{gr}}(A)$ será suficiente hacerlo con

$$P_{r,n-r}^{\mathrm{gr}}(A) = \frac{P_{r,n-r}}{P_{r,n-r} \cap \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)} \tag{3.6}$$

para todo $r = 0, \cdots, n$.

Si S_r actúa en las variables $y_1, \cdots, y_r$ y S_{n-r} lo hace sobre las variables $z_{r+1}, \cdots, z_n$, obtenemos una acción de $S_r \times S_{n-r}$ en $P_{r,n-r}$ definida de la siguiente manera:

$$(\sigma, \tau) f(y_1, \cdots y_r, z_{r+1}, \cdots, z_n) = f(y_{\sigma(1)}, \cdots y_{\sigma(r)}, z_{\tau(r+1)}, \cdots, z_{\tau(n)})$$

Para todo $(\sigma, \tau) \in S_r \times S_{n-r}$ y todo $f(y_1, \cdots y_r, z_{r+1}, \cdots, z_n) \in P_{r,n-r}$. De esta manera, $P_{r,n-r}^{\mathrm{gr}}(A)$ se convierte en un $S_r \times S_{n-r}$-módulo con caracter $\chi_{r,n-r}(A)$.

También, en [16, Capítulo 10, Sección 4], nos muestran que los caracteres irreducibles de $S_r \times S_{n-r}$ se obtienen tomando el producto tensorial externo entre los caracteres irreducibles de S_r y S_{n-r} respectivamente. Entonces, podemos escribir

$$\chi_{r,n-r}(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} m'_{\lambda,\mu}(\chi_\lambda \otimes \chi_\mu), \tag{3.7}$$

donde χ_λ y χ_μ son los caracteres irreducibles de S_r y S_{n-r} respectivamente y $m'_{\lambda,\mu} \geq 0$ es la multiplicidad asociada a la pareja de particiones λ y μ.

La relación entre los caracteres de H_n y los caracteres de $S_r \times S_{n-r}$ se nos presenta en [16, Capítulo 10, Sección 4] de modo que, para cualquier superálgebra A, en las ecuaciones (3.5) y (3.7) tenemos que $m_{\lambda,\mu} = m'_{\lambda,\mu}$ para todo $r \leq n$. Más aún,

$$c_n^{\mathrm{gr}}(A) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \dim_{\mathbb{F}} P_{r,n-r}^{\mathrm{gr}}(A); \tag{3.8}$$

donde la combinatoria se da porque en la Definición 3.2.13 habría que tener en cuenta (para los subíndices), las distintas posibilidades de hacer subconjuntos de r índices con

n elementos. Esto se explicará más adelante en el ejemplo 3.3.5.

3.3. Identidades graduadas de $UT_2(\mathbb{F})$

En los Ejemplos 1.3.15 y 1.3.16 observamos que los polinomios $z_1z_2 \equiv 0$ y $[y_1, y_2] \equiv 0$ son identidades graduadas de A con la graduación canónica $A = A_0 \oplus A_1$. Se quiere mostrar que estas dos identidades generan a $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ como T_2-ideal; para lo cual, tenemos lo siguiente:

3.3.1. Identidades generadoras

Lema 3.3.1. Para cualquier variable $x = y + z$, entonces $z_1xz_2 \in \langle z_1z_2, [y_1, y_2]\rangle_{\mathrm{T}_2}$.

Demostración. Por la Definición 1.3.9, escribimos a $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ como una $\mathbb{Z}_2$-graduación, esto es,

$$\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}} = \mathbb{F}\langle X\rangle^{(0)} \oplus \mathbb{F}\langle X\rangle^{(1)};$$

puesto que z_1y es un monomio de grado homogéneo 1, tenemos que $z_1y \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{(1)}$. Debido a la Observación 3.2.4 podemos evaluar el polinomio $f(z_1,z_2) = z_1z_2$ en $z_1 = z_1y$, $z_2 = z_2$ y obtenemos que $z_1yz_2 \in \langle z_1z_2\rangle_{\mathrm{T}_2}$. Por otra parte, $z_1zz_2 = f(z_1,z)z_2 \in \langle z_1z_2\rangle_{\mathrm{T}_2}$ y tenemos entonces que $z_1yz_2 + z_1zz_2 = z_1(y+z)z_2 \in \langle z_1z_2\rangle_{\mathrm{T}_2}$. De esta manera $z_1xz_2 \in \langle z_1z_2\rangle_{\mathrm{T}_2}$ y por lo tanto, $z_1xz_2 \in \langle z_1z_2, [y_1, y_2]\rangle_{\mathrm{T}_2}$. ■

Ejemplo 3.3.2. Sea $I = \langle z_1z_2, [y_1, y_2]\rangle_{\mathrm{T}_2}$. Por el Lema 3.3.1 sabemos que $z_1xz_2 \equiv 0 \bmod(I)$, de esta manera, cualquier polinomio multilineal que contenga al menos dos de las variables de grado homogéneo 1 (las variables de Z), pertenece a I. Por ejemplo el polinomio $y_1z_1y_2z_2 + z_1y_1y_2z_2$ pertenece a I, pues su primer monomio se puede escribir como $y_1(z_1y_2z_2) \in I$, y el segundo monomio puede ser escrito como $z_1(y_1y_2)z_2 \in I$; dado que ambos monomios pertenecen a I, tenemos que $y_1z_1y_2z_2 + z_1y_1y_2z_2 \in I$.

Ejemplo 3.3.3. Sea $I = \langle z_1z_2, [y_1, y_2]\rangle_{\mathrm{T}_2}$. Dado $f \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ tal que

$$f(z,\ y_1,y_2,y_3,y_4) = \sum_{\sigma\in S_4} y_{\sigma(1)}y_{\sigma(2)}\ z\ y_{\sigma(3)}y_{\sigma(4)},$$

podemos interpretar este polinomio como la suma de monomios que permutan en los subíndices de las variables y_i. De otra parte, dado que $[y_1, y_2] = y_1y_2 - y_2, y_1 \in I$ tenemos que $y_iy_j = y_jy_i$ en $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}/I$ para todo $i, j = 1, \cdots 4$. De esta manera, f visto en $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}/I$, se escribe como

$$\begin{aligned} f(z,\ y_1, y_2, y_3, y_4) = 2(&y_1y_2\,z\,y_3y_4 \ + \ y_1y_3\,z\,y_2y_4 \ + \ y_1y_4\,z\,y_2y_3 \\ &+ \ y_2y_3\,z\,y_1y_4 \ + \ y_2y_4\,z\,y_1y_3 \ + \ y_3y_4\,z\,y_1y_2), \end{aligned}$$

pues por ejemplo $y_1y_3\,z\,y_2y_4 = y_3y_1\,z\,y_4y_2$. En esta escritura $2 \in \mathbb{F}$ es la multiplicidad de cada monomio, que es la misma para todos por la simetría del polinomio. Si evaluamos de la forma $y_1 = y_2 = E_{11},\ y_3 = y_4 = E_{22}$ y $z = E_{12}$, observamos que los monomios que tienen a y_3, o bien a y_4, en alguna de las dos primeras posiciones, se anulan; es decir, solo uno de ellos (el primero) es diferente de cero, con lo cual $f = 2E_{12}$.

Teorema 3.3.4. Las identidades $z_1z_2 \equiv 0$ y $[y_1, y_2] \equiv 0$ generan $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ como T_2-ideal.

Demostración. Sea $I = \langle z_1z_2,\ [y_1, y_2]\rangle_{\mathrm{T}_2}$, queremos ver que $I = \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$. Para esto, sea $f \in I$, entonces f es generado como T_2-ideal por los polinomios $z_1z_2 \equiv 0$ y $[y_1, y_2] \equiv 0$ que son identidades de A, luego $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ y tenemos que $I \subseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$.

Para ver la contenencia recíproca, sea $f(y_1, \cdots, y_t, z_1, \cdots, z_t)$ un polinomio multilineal de $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$. Queremos ver que, módulo I, f es congruente con el polinomio nulo, es decir, $f \equiv 0 \bmod(I)$. Como se vio en el Ejemplo 3.3.2, no pertenecen a I aquellos polinomios que tengan como máximo una variable de grado homogéneo 1; luego podemos escribir entonces

$$f(y_1, \cdots, y_t, z_1, \cdots, z_t) \ \equiv \ f_1(y_1, \cdots, y_s) + f_2(z, y_1, \cdots, y_s) \ \bmod(I)$$

donde f_1 y f_2 no son congruentes con cero módulo I al mismo tiempo. Se trata entonces de ver que $f_1 \equiv 0 \bmod(I)$ y $f_2 \equiv 0 \bmod(I)$. Como $f \equiv f_1 + f_2 \bmod(I)$, por la Definición 1.1.6 tenemos que $f_1 + f_2 - f \in I \subseteq \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$, de modo que $f_1 + f_2 - f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ y puesto que por hipótesis $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ entonces $f_1 + f_2 \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$. Por la Proposición 1.3.21, tenemos que f_1 y f_2 son ambas identidades de A. Dado que $[y_1, y_2] = y_1y_2 - y_2y_1 \in I$, tenemos que $(y_1y_2 - y_2y_1) \equiv 0 \bmod(I)$ o lo que es equivalente, $y_1y_2 \equiv y_2y_1 \bmod(I)$. De esta manera, si

$$f_1(y_1, \cdots, y_s) = \sum_{\sigma \in S_s} \alpha_\sigma y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(s)} \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}},$$

con $\alpha_\sigma \in \mathbb{F}$ para cada $\sigma \in S_s$, entonces en $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}/I$ tenemos que $y_iy_j = y_jy_i$ con $i, j = 1, \ldots, s$, y por tanto los monomios de f_1 se pueden ordenar de la forma $y_1 \cdots y_s$,

obteniendo así que
$$f_1(y_1,\cdots,y_s)=\alpha y_1\cdots,y_s\in\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}/I.$$
Al realizar la sustitución $y_1=\cdots=y_s=E_{11}$ tenemos que $f_1(E_{11},\cdots,E_{11})=\alpha E_{11}$, pero dado que $f_1\in\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ debe ser que $\alpha=0$, y tenemos que $f_1=0$ en $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}/I$, o de forma equivalente $f_1\equiv 0\ \mathrm{mod}(I)$. Por otra parte, sea
$$f_2(z,y_1,\cdots,y_s)=\sum\alpha_i\, y_{i_1}\cdots y_{i_n}\, z\, y_{i_{n+1}}\cdots y_{i_s}\in\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}/I$$
el polinomio multilineal donde $i_1<\cdots<i_n$ y $i_{n+1}<\cdots<i_s$. Si se fija uno de los monomios no nulos de f_2, por ejemplo el monomio $\alpha y_1\cdots y_n\, z\, y_{n+1}\cdots y_s$ y hacemos la sustitución $y_1=\cdots=y_n=E_{11}$, $y_{n+1}=\cdots=y_s=E_{22}$ y $z=E_{12}$, solo este monomio se convierte en αE_{12} y todos los demás monomios se hacen nulos (como se vio en el Ejemplo 3.3.4); de esta manera, $f_2=\alpha E_{12}$. Puesto que $f_2\in\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$, entonces debe ser que $\alpha=0$, pero esto es una contradicción con respecto al hecho de que el monomio elegido era no nulo; así, no se hace posible escoger un monomio no nulo de $f_2\in\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}/I$ y se concluye que $f_2\equiv 0\ \mathrm{mod}(I)$. Dado que $f\equiv f_1+f_2\ \mathrm{mod}(I)$ tenemos entonces que $f\equiv 0\ \mathrm{mod}(I)$ y por tanto $f\in I$, luego $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)=\langle z_1z_2,\ [y_1,y_2]\rangle_{\mathrm{T}_2}$. ■

3.3.2. Cálculo de codimensiones graduadas

Ejemplo 3.3.5. En el Ejemplo 3.2.8 se obtuvo que
$$\begin{aligned}
P_3^{\mathrm{gr}}=\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{&y_1y_2y_3,\ y_1y_2z_3,\ y_1z_2y_3,\ z_1y_2y_3,\ y_1z_2z_3,\ z_1y_2z_3,\ z_1z_2y_3,\ z_1z_2z_3,\\
&y_2y_1y_3,\ y_2y_1z_3,\ y_2z_1y_3,\ z_2y_1y_3,\ y_2z_1z_3,\ z_2y_1z_3,\ z_2z_1y_3,\ z_2z_1z_3,\\
&y_3y_2y_1,\ y_3y_2z_1,\ y_3z_2y_1,\ z_3y_2y_1,\ y_3z_2z_1,\ z_3y_2z_1,\ z_3z_2y_1,\ z_3z_2z_1,\\
&y_1y_3y_2,\ y_1y_3z_2,\ y_1z_3y_2,\ z_1y_3y_2,\ y_1z_3z_2,\ z_1y_3z_2,\ z_1z_3y_2,\ z_1z_3z_2,\\
&y_2y_3y_1,\ y_2y_3z_1,\ y_2z_3y_1,\ z_2y_3y_1,\ y_2z_3z_1,\ z_2y_3z_1,\ z_2z_3y_1,\ z_2z_3z_1,\\
&y_3y_1y_2,\ y_3y_1z_2,\ y_3z_1y_2,\ z_3y_1y_2,\ y_3z_1z_2,\ z_3y_1z_2,\ z_3z_1y_2,\ z_3z_1z_2\}\\
=\mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{&w_{\sigma(1)}w_{\sigma(2)}w_{\sigma(3)}\mid\sigma\in S_3,\ w_i=y_i\ \text{o}\ w_i=y_i,\ i=1,2,3\}
\end{aligned}$$
donde claramente $\dim P_3^{\mathrm{gr}}=48$. De acuerdo con la Definición 3.2.12, calculamos $P_3^{\mathrm{gr}}(A)$ de la Ecuación (3.6), donde $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)=\langle z_1z_2,\ [y_1,y_2]\rangle_{\mathrm{T}_2}$. Por la forma de $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ sucede que en el cociente $P_n^{\mathrm{gr}}/P_n^{\mathrm{gr}}\cap\mathrm{Id}^{gr}(A)$, las variables de Y conmutan entre sí, y dado que para cualquier $x\in\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$, $z_1xz_2\in\mathrm{Id}^{gr}(A)$, entonces los monomios con dos o más variables

de Z se anulan, dejando como resultado lo siguiente:

$$\begin{aligned} P_3^{\mathrm{gr}}(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{&y_1y_2y_3,\ y_1y_2z_3,\ y_1y_3z_2,\ y_2y_3z_1,\ z_1y_2y_3,\ z_2y_1y_3,\\ &z_3y_1y_2,\ y_1z_2y_3,\ y_2z_1y_3,\ y_3z_2y_1,\ y_1z_3y_2,\ y_2z_3y_1,\ y_3z_1y_2\}, \end{aligned}$$

donde tenemos que $\dim P_3^{\mathrm{gr}}(A) = 13$. Por otra parte, calculamos $\dim P_3^{\mathrm{gr}}(A)$ mediante las Ecuaciones 3.4 y 3.8. Calculamos primero los $P_{r,n-r}$ de la Definición 3.2.13 para $r = 0,1,2,3$. Si $r = 2$ tenemos entonces

$$\begin{aligned} P_{2,1} &= \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{w_{\sigma(1)}w_{\sigma(2)}w_{\sigma(3)} \mid \sigma \in S_3,\ \text{con } w_3 = z_3 \text{ y } w_i = y_i \text{ para } i = 1,2\}\\ &= \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{w_1w_2w_3,\ w_2w_1w_3,\ w_3w_2w_1,\ w_1w_3w_2,\ w_2w_3w_1,\ w_3w_1w_2\}\\ &= \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{y_1y_2z_3,\ y_2y_1z_3,\ z_3y_2y_1,\ y_1z_3y_2,\ y_2z_3y_1,\ z_3y_1y_2\}, \end{aligned}$$

y de nuevo, considerando que $[y_1,y_2] \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ obtenemos

$$P_{2,1}^{\mathrm{gr}}(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{y_1y_2z_3,\ z_3y_1y_2,\ y_1z_3y_2,\ y_2z_3y_1\},$$

entonces $\dim P_{2,1}^{\mathrm{gr}}(A) = 4$. De la misma manera, y teniendo en cuenta que $z_1xz_2 \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$, obtenemos que $\dim P_{0,3}^{\mathrm{gr}}(A) = \dim P_{1,2}^{\mathrm{gr}}(A) = 0$, pues aparecen dos o más variables de Z por monomio. De igual forma, de acuerdo con la Definición 3.2.13, tenemos que

$$P_{3,0} = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{y_{\sigma(1)}y_{\sigma(2)}y_{\sigma(3)} \mid \sigma \in S_3\},$$

y teniendo en cuenta que $[y_1,y_2] \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$; esto es, las variables de Y conmutan mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$; entonces tenemos que

$$P_{3,0}^{\mathrm{gr}}(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{y_1y_2y_3\},$$

luego $\dim P_{3,0}^{\mathrm{gr}}(A) = 1$. Puesto que en $P_{2,1}$ se pueden escoger para los índices distintas combinaciones de 2 con 3 de ellos; por ejemplo, otra forma de hacerlo estaría dada por $w_2 = z_2$ y $w_i = y_i$ para $i = 1,3$; tenemos entonces que $P_{2,1}^{\mathrm{gr}}(A)$ podemos escribir de $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$ maneras diferentes. Este hecho explica el uso de la combinatoria en la Ecuación

(3.8). Empleando las Ecuaciones (3.4) y (3.8) tenemos que

$$\begin{aligned}
c_3^{\mathrm{gr}}(A) &= \binom{3}{0}\cancelto{0}{\dim_{\mathbb{F}} P_{0,3}^{\mathrm{gr}}(A)} + \binom{3}{1}\cancelto{0}{\dim_{\mathbb{F}} P_{1,2}^{\mathrm{gr}}(A)} \\
&\quad + \binom{3}{2}\cancelto{4}{\dim_{\mathbb{F}} P_{2,1}^{\mathrm{gr}}(A)} + \binom{3}{3}\cancelto{1}{\dim_{\mathbb{F}} P_{3,0}^{\mathrm{gr}}(A)} \\
&= \frac{3!}{2!1!}4 + \frac{3!}{3!0!}1 = 13,
\end{aligned}$$

como se esperaba.

Ejemplo 3.3.6. Para el caso de $n = 4$ tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
P_4^{\mathrm{gr}}(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{&y_1y_2y_3y_4,\ y_1y_2y_3z_4,\ y_1y_2y_4z_3,\ y_1y_3y_4z_2,\ y_2y_3y_4z_1,\\
&y_1y_2z_4y_3,\ y_1y_3z_4y_2,\ y_2y_3z_4y_1,\ y_1y_2z_3y_4,\ y_1y_4z_3y_2,\ y_2y_4z_3y_1,\\
&y_1y_3z_2y_4,\ y_1y_4z_2y_3,\ y_3y_4z_2y_1,\ y_2y_3z_1y_4,\ y_2y_4z_1y_3,\ y_3y_4z_1y_2,\\
&y_1z_4y_2y_3,\ y_2z_4y_1y_3,\ y_3z_4y_1y_2,\ y_1z_3y_2y_4,\ y_2z_3y_1y_4,\ y_4z_3y_1y_2,\\
&y_1z_2y_3y_4,\ y_3z_2y_1y_4,\ y_4z_2y_1y_3,\ y_2z_1y_3y_4,\ y_3z_1y_2y_4,\ y_4z_1y_2y_3,\\
&z_4y_1y_2y_3,\ z_3y_1y_2y_4,\ z_2y_1y_3y_4,\ z_1y_2y_3y_4\},
\end{aligned}$$

donde $c_4^{\mathrm{gr}}(A) = \dim P_4^{\mathrm{gr}}(A) = 33$. Por otra parte,

$$P_{0,4}^{\mathrm{gr}}(A) = P_{1,4}^{\mathrm{gr}}(A) = P_{2,2}^{\mathrm{gr}}(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{\ \emptyset\ \} = \{0\},$$

de modo que la dimensión de estos espacios es cero. Ahora, dado que

$$P_{3,1} = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{w_{\sigma(1)}w_{\sigma(2)}w_{\sigma(3)}w_{\sigma(4)} \mid \sigma \in S_4,\ w_4 = z_4 \text{ y } w_i = y_i \text{ para } i = 1,2,3\},$$

tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
P_{3,1}^{\mathrm{gr}}(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{&y_1y_2y_3z_4,\ y_1y_2z_4y_3,\ y_1y_3z_4y_2,\ y_2y_3z_4y_1,\\
&y_1z_4y_2y_3,\ y_2z_4y_1y_3,\ y_3z_4y_1y_2,\ z_4y_1y_2y_3\},
\end{aligned}$$

donde $\dim P_{3,1}^{\mathrm{gr}}(A) = 8$. También,

$$P_{4,0}^{\mathrm{gr}}(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{y_1y_2y_3y_4\},$$

y tenemos que $\dim P_{4,0}^{\mathrm{gr}}(A) = 1$. De esta manera, la codimensión $\mathbb{Z}_2$-graduada de $UT_2(\mathbb{F})$ para $n = 4$ es

$$\begin{aligned} c_4^{\mathrm{gr}}(A) &= \binom{4}{3} \cancelto{8}{\dim_{\mathbb{F}} P_{3,1}^{\mathrm{gr}}(A)} + \binom{4}{4} \cancelto{1}{\dim_{\mathbb{F}} P_{4,0}^{\mathrm{gr}}(A)} \\ &= \frac{4!}{3!1!} 8 + 1 = 33. \end{aligned}$$

Proposición 3.3.7. La codimensión de $P_n^{\mathrm{gr}}(A)$ está dada por

$$c_n^{\mathrm{gr}}(A) = 1 + n2^{n-1} \tag{3.9}$$

Demostración. A fin de calcular la codimensión de $P_n^{\mathrm{gr}}(A)$ para todo $n \geq 1$, de acuerdo con la Ecuación (3.8), se hace necesario estudiar el comportamiento de $\dim_{\mathbb{F}} P_{r,n-r}^{\mathrm{gr}}(A)$. Dado que $z_1 x z_2 \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$, tenemos que $\dim_{\mathbb{F}} P_{r,n-r}^{\mathrm{gr}}(A) = 0$ cuando $n - r > 1$ (ver Ejemplos 3.3.5 y 3.3.6); de esta manera, solo nos interesa estudiar el caso en el que $|\mu| \leq 1$. Así, si $\mu = \emptyset$, puesto que $[y_1, y_2] \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$, cualquier monomio $y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(n)}$, $\sigma \in S_n$, podemos organizarlo en la forma $y_1 \cdots y_n$, que sería el único monomio generador de $P_{n,0}^{\mathrm{gr}}(A)$, entonces $\dim_{\mathbb{F}} P_{n,0}^{\mathrm{gr}}(A) = 1$. Para el caso en el que $\mu = (1)$, de la Definición 3.2.13 tenemos que

$$P_{n-1,1} = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n,\ w_n = z,\ w_i = y_i \text{ para } i = 1, \cdots, n-1\},$$

y de esta manera, por la acción de $\sigma \in S_n$, z recorre todas las posiciones del monomio $w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(n)}$. Para los casos en los que z ocupe la primera y la última posición del monomio, es decir, los monomios

$$z y_{\sigma(i_1)} \cdots y_{\sigma(i_{n-1})} \text{ y } y_{\sigma(i_1)} \cdots y_{\sigma(i_{n-1})} z,$$

puesto que $[y_1, y_2] \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$, tenemos que estos monomios están representados en $P_{r,n-r}^{\mathrm{gr}}(A)$ por $z y_1 \cdots y_{n-1}$ y $y_1 \cdots y_{n-1} z$ respectivamente. Como z está al inicio y al final de cada monomio, el número posible de combinaciones de $n-1$ elementos que puedo hacer con $n-1$ elementos es 1 en ambos casos, luego el número

$$\binom{n-1}{n-1} = \binom{n-1}{0} = 1$$

es las veces que z aparece al inicio y al final de cada monomio. Cuando z recorre las demás posiciones de estos monomios; en $P^{\mathrm{gr}}_{r,n-r}(A)$ siempre se podrán organizar en orden ascendente los índices de los $y_i's$ que estén antes y después de z, luego será único el representante de cada uno de estos, así por ejemplo, el monomio $y_{\sigma(1)}\cdots y_{\sigma(n-2)}\, z\, y_{\sigma(n-1)}$ estará representado por $y_1\cdots y_{n-2}\, z\, y_{n-1}$ en $P^{\mathrm{gr}}_{r,n-r}(A)$. Después, debe tenerse en cuenta la cantidad de $y_i's$ que estén antes o después de z; por ejemplo, para el monomio $y_1\cdots y_{n-2}\ z\ y_{n-1}$, el número de combinaciones de $n-2$ elementos que surgen con $n-1$ elementos, es la cantidad de monomios en los que z aparece en la posición indicada (ver Ejemplo 3.3.6), de esta manera, otro de estos monomios sería por ejemplo $y_2\cdots y_{n-2}y_{n-1}z\ y_1$. Un monomio recíproco a este, es aquel en el que z aparece en la segunda posición, pues también $n-1$ combinado $n-2$ es la cantidad de monomios en los que z aparece allí. De esta manera, el número

$$\binom{n-1}{n-2} = \binom{n-1}{1}$$

representa las veces en las que z aparece en la segunda y penúltima posición. En general, recorriendo las n posibles posiciones de z tenemos que el número

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{n-i} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n-2} + \cdots + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0}, \tag{3.10}$$

representa la cantidad de monomios generadores de $P^{\mathrm{gr}}_{r,n-r}(A)$. Una propiedad muy conocida de la teoría de combinatoria es que

$$\binom{k}{0} + \binom{k}{1} + \cdots + \binom{k}{k} = 2^k$$

para cualquier k entero positivo; haciendo uso de esta propiedad en la Ecuación (3.10), tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{n-i} = 2^{n-1}. \tag{3.11}$$

Por lo tanto, en la Ecuación (3.8) tenemos que

$$\begin{aligned} c_n^{\mathrm{gr}}(A) &= \binom{n}{n} \dim_{\mathbb{F}} P_{n,0}^{\mathrm{gr}}(A) + \binom{n}{n-1} \dim_{\mathbb{F}} P_{n-1,1}^{\mathrm{gr}}(A) \\ c_n^{\mathrm{gr}}(A) &= 1 + n2^{n-1}. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 3.3.8. Usando la Ecuación (3.9) tenemos que

$$\begin{aligned} c_3^{\mathrm{gr}}(A) &= 1 + 3(2^{3-1}) = 13, \\ c_4^{\mathrm{gr}}(A) &= 1 + 4(2^{4-1}) = 33. \end{aligned}$$

Como habíamos deducido en los Ejemplos 3.3.5 y 3.3.6 respectivamente.

Ejemplo 3.3.9. De acuerdo con la Ecuación (3.9), $\dim P_1^{\mathrm{gr}}(A) = 2$, esto es así puesto que

$$P_1^{\mathrm{gr}}(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{y, z\}.$$

De manera similar, $\dim P_2^{\mathrm{gr}}(A) = 5$ porque

$$P_2^{\mathrm{gr}}(A) = \mathrm{Span}_{\mathbb{F}}\{y_1y_2,\ y_1z_2,\ z_2y_1,\ z_1y_2,\ y_2z_1\}.$$

3.3.3. Submódulos irreducibles

Definición 3.3.10. Para una partición $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$, el **estabilizador de fila** de la tabla T_λ está dado por

$$R_{T_\lambda} = S_{\lambda_1}(a_{11},\ a_{12}, \cdots,\ a_{1\lambda_1}) \times \cdots \times S_{\lambda_r}(a_{r1},\ a_{r2}, \cdots,\ a_{r\lambda_r}),$$

donde $S_{\lambda_i}(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{i\lambda_i})$ es el grupo simétrico actuando sobre los enteros $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{i\lambda_i}$. De esta manera R_{T_λ} es el subgrupo de S_n de todas las permutaciones posibles entre elementos de las filas de T_λ.

Definición 3.3.11. Para una partición $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$, el **estabilizador de columna** C_{T_λ} de la tabla T_λ está dado por

$$C_{T_\lambda} = S_{\lambda_1'}(a_{11},\ a_{21}, \cdots,\ a_{\lambda_1'1}) \times \cdots \times S_{\lambda_s'}(a_{1\lambda_1},\ a_{2\lambda_1}, \cdots,\ a_{\lambda_s'\lambda_1}),$$

donde $\lambda' = (\lambda'_1, \cdots, \lambda'_s)$ es la partición conjugada de λ. Así, C_{T_λ} es el subgrupo de S_n de todas las permutaciones posibles entre elementos de las columnas de T_λ.

Definición 3.3.12. Para una tabla T_λ dada, definimos a

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\substack{\sigma \in R_{T_\lambda} \\ \tau \in C_{T_\lambda}}} (\text{sgn } \tau)\sigma\tau$$

como el **mínimo idempotente esencial** del álgebra de grupo $\mathbb{F}S_n$. Este elemento tiene la particularidad de que $e_{T_\lambda}^2 = ae_{T_\lambda}$, donde a es un entero positivo.

Ejemplo 3.3.13. Para $n = 3$ sea $\lambda = (2, 1)$ y sea

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

una tabla de Young de forma λ. Entonces el estabilizador de fila R_{T_λ} de T_λ viene dado por

$$\begin{aligned} R_{T_\lambda} &= S_{\lambda_1}(a_{11}, a_{12}) \times S_{\lambda_2}(a_{21}) \\ &= S_2(1,3) \times S_1(2) \\ &= \{(1),\ (1\ 3)\} \times \{(1)\} \\ &= \{(1),\ (1\ 3)\}. \end{aligned}$$

La partición conjugada λ' de λ viene dada por $\lambda' = (2, 1)$, luego, de manera similar a R_{T_λ}, el estabilizador de columna C_{T_λ} de T_λ es

$$\begin{aligned} C_{T_\lambda} &= S_{\lambda'_1}(a_{11}, a_{21}) \times S_{\lambda'_2}(a_{12}) \\ &= S_2(1,2) \times S_1(3) \\ &= \{(1),\ (1\ 2)\} \times \{(1)\} \\ &= \{(1),\ (1\ 2)\}. \end{aligned}$$

De esta manera para cada $\sigma \in R_{T_\lambda}$ y cada $\tau \in C_{T_\lambda}$; el mínimo idempotente esencial e_{T_λ}

del álgebra de grupo $\mathbb{F}S_3$ viene dado por

$$\begin{aligned} e_{T_\lambda} = \sum (\text{sgn } \tau)\sigma\tau &= (\text{sgn}(1))\,(1)\,(1) \;+\; (\text{sgn}(1))\,(1\ 3)\,(1) \\ &+ (\text{sgn}(1\ 2))\,(1)\,(1\ 2) \;+\; (\text{sgn}(1\ 2))\,(1\ 3)\,(1\ 2) \\ &= (1) \;+\; (1\ 3) \;-\; (1\ 2) \;-\; (1\ 2\ 3). \end{aligned}$$

Comprobemos que $e_{T_\lambda}^2 = a e_{T_\lambda}$ para algún entero positivo a:

$$\begin{aligned} e_{T_\lambda}^2 &= ((1) \;+\; (1\ 3) \;-\; (1\ 2) \;-\; (1\ 2\ 3))\,((1) \;+\; (1\ 3) \;-\; (1\ 2) \;-\; (1\ 2\ 3)) \\ &= (1) \;+\; (1\ 3) \;-\; (1\ 2) \;-\; (1\ 2\ 3) \;+\; (1\ 3) \;+\; (1) \;-\; (1\ 2\ 3) \;-\; (1\ 2) \\ &- (1\ 2) \;-\; \cancel{(1\ 3\ 2)} \;+\; (1) \;+\; \cancel{(2\ 3)} \;-\; (1\ 2\ 3) \;-\; \cancel{(2\ 3)} \;+\; (1\ 3) \;+\; \cancel{(1\ 3\ 2)} \\ &= 3\,(1) \;+\; 3\,(1\ 3) \;-\; 3\,(1\ 2) \;-\; 3\,(1\ 2\ 3) \\ &= 3\,((1) \;+\; (1\ 3) \;-\; (1\ 2) \;-\; (1\ 2\ 3)) = 3\, e_{T_\lambda} \end{aligned}$$

Sea $\lambda \vdash r$, $\mu \vdash n-r$ y sea $W_{\lambda,\mu}$ un $S_r \times S_{n-r}$-módulo a izquierda irreducible con caracter asociado $\chi(W_{\lambda,\mu}) = \chi_{\lambda,\mu}$. Giambruno en [16, Capítulo 10, sección 7], explica que si T_λ es una tabla de forma λ y T_μ una tabla de forma μ, entonces $W_{\lambda,\mu} \cong \mathbb{F}(S_r \times S_{n-r}) e_{T_\lambda} e_{T_\mu}$ donde S_r y S_{n-r} actúan en conjuntos disjuntos de enteros. La acción de $\mathbb{F}(S_r \times S_{n-r})$ sobre $e_{T_\lambda} e_{T_\mu}$ se define así:

$$(\sigma, \tau) e_{T_\lambda} e_{T_\mu} = \sigma e_{T_\lambda}\ \tau e_{T_\mu}$$

para cada $\sigma \in S_r$ y cada $\tau \in S_{n-r}$. En el siguiente ejemplo mostramos cómo funciona esta acción y además, mostramos cómo $e_{T_\lambda} e_{T_\mu}$ genera una subálgebra de $\mathbb{F}(S_r \times S_{n-r})$ isomorfa a $W_{\lambda,\mu}$ un submódulo irreducible de $P^{\text{gr}}_{r,n-r}(A)$.

Ejemplo 3.3.14. Para $n = 4$, sean $\lambda = (2,1)$ y $\mu = (1)$, y sean también

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 4 & \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad\qquad T_\mu = \boxed{2}$$

las tablas de Young asociadas. El idempotente esencial asociado a este par de tablas es:

$$e_{T_\lambda} e_{T_\mu} = (1) + (1\ 3) - (1\ 4) - (1\ 4\ 3).$$

Sean también $S_r = \{(1),\ (1\ 3),\ (1\ 4),\ (3\ 4),\ (1\ 3\ 4),\ (1\ 4\ 3)\}$ y $S_{n-r} = (1)$. Veamos cómo se comporta $(\sigma, \tau) e_{T_\lambda} e_{T_\mu}$ para cada $(\sigma, \tau) \in S_r \times S_{n-r}$. Por ejemplo el elemento $((1\ 3), (1))$

actuando sobre $e_{T_\lambda}e_{T_\mu}$ es:

$$\begin{aligned}((1\ 3),(1))e_{T_\lambda}e_{T_\mu} &= (1\ 3)e_{T_\lambda}\ (1)e_{T_\mu}\\ &= ((1\ 3)(1)+(1\ 3)(1\ 3)-(1\ 3)(1\ 4)-(1\ 3)(1\ 4\ 3))e_{T_\mu}\\ &= ((1\ 3)+(1)-(1\ 4\ 3)-(1\ 4))e_{T_\mu}\\ &= e_{T_\lambda}e_{T_\mu};\end{aligned}$$

operación que debemos realizar con los demás elementos de S_r. Puesto que $S_{n-r}=\{(1)\}$ y que $e_{T_\mu}=(1)$, ambos elementos no aportan información en los cálculos; en adelante se omitirán. De esta manera, procedemos a obtener todos los elementos del conjunto $S_r e_{T_\lambda}e_{T_\mu}$:

$$\begin{aligned}(1)e_{T_\lambda}e_{T_\mu} &= e_{T_\lambda}e_{T_\mu} = v_1\\ (1\ 3)e_{T_\lambda}e_{T_\mu} &= e_{T_\lambda}e_{T_\mu} = v_1\\ (1\ 4)e_{T_\lambda}e_{T_\mu} &= (1\ 4)+(1\ 3\ 4)-(1)-(3\ 4) = v_2\\ (3\ 4)e_{T_\lambda}e_{T_\mu} &= (3\ 4)+(1\ 4\ 3)-(1\ 3\ 4)-(1\ 3) = -v_1-v_2\\ (1\ 3\ 4)e_{T_\lambda}e_{T_\mu} &= (1\ 3\ 4)+(1\ 4)-(3\ 4)-(1) = v_2\\ (1\ 4\ 3)e_{T_\lambda}e_{T_\mu} &= (1\ 4\ 3)+(3\ 4)-(1\ 3)-(1\ 3\ 4) = -v_1-v_2.\end{aligned}$$

Dado que cada uno de los elementos de $\mathbb{F}(S_r\times S_{n-r})e_{T_\lambda}e_{T_\mu}$ se generan mediante combinaciones lineales de v_1 y v_2, entonces $\dim(\mathbb{F}(S_r\times S_{n-r})e_{T_\lambda}e_{T_\mu}) = 2 = \dim W_{(2,1),(1)}$.

El idempotente esencial de una tabla T_λ genera alternancia en las variables indexadas con los números de sus columnas; en ocasiones, y bajo ciertas circunstancias, estos polinomios mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ se anulan. Los siguientes ejemplos sirven para ilustrar bajo qué condiciones se anulan y cuándo no lo hacen:

Ejemplo 3.3.15. Para $n=5$, sean $\lambda=(2,2)\vdash 4$ y $\mu=(1)\vdash 1$. Entonces

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2\\ \hline 3 & 5\\ \hline\end{array} \qquad T_\mu = \begin{array}{|c|}\hline 4\\ \hline\end{array}$$

y de este par de de tablas obtenemos el mínimo idempotente esencial

$$\begin{aligned}
e_{T_\lambda}e_{T_\mu} &= (1)+(1\ 2)+(3\ 5)+(1\ 2)(3\ 5)\\
&-(1\ 3)-(1\ 3\ 2)-(1\ 5\ 3)-(1\ 5\ 3\ 2)\\
&-(2\ 5)-(1\ 2\ 5)-(2\ 3\ 5)-(1\ 2\ 3\ 5)\\
&+(1\ 3)(2\ 5)+(1\ 3\ 2\ 5)+(1\ 5\ 2\ 3)+(1\ 5)(2\ 3).
\end{aligned}$$

Los polinomios que se generan son de la forma $e_{T_\lambda}e_{T_\mu}f$, para cualquier $f \in P_{4,1}$. De acuerdo con la Proposición 2.1.10, cada uno de los sumandos de $e_{T_\lambda}e_{T_\mu}$, actúa sobre f de modo que si $f(y_1,y_2,y_3,y_5,z) = y_1y_2y_3zy_5$, entonces por ejemplo el sumando $(1\ 3)(2\ 5)$ de $e_{T_\lambda}e_{T_\mu}$ actuando sobre f es:

$$(1\ 3)(2\ 5)(y_1y_2y_3zy_5) = y_3y_5y_1zy_2.$$

De esta manera, el polinomio generado por $e_{T_\lambda}e_{T_\mu}$ actuando sobre el monomio $y_1y_2y_3zy_5$ es:

$$\begin{aligned}
e_{T_\lambda}e_{T_\mu}(y_1y_2y_3zy_5) &= y_1y_2y_3zy_5+y_2y_1y_3zy_5+y_1y_2y_5zy_3+y_2y_1y_5zy_3\\
&-y_3y_2y_1zy_5-y_3y_1y_2zy_5-y_5y_2y_1zy_3-y_5y_1y_2zy_3\\
&-y_1y_5y_3zy_2-y_2y_5y_3zy_1-y_1y_3y_5zy_2-y_2y_3y_5zy_1\\
&+y_3y_5y_1zy_2+y_3y_5y_2zy_1+y_5y_3y_1zy_2+y_5y_3y_2zy_1.
\end{aligned}$$

Dado que $[y_1,y_2] \in \text{mod Id}^{\text{gr}}(A)$, tenemos que

$$y_1y_2 \equiv y_2y_1 \text{ mod Id}^{\text{gr}}(A)$$

y por tanto,

$$e_{T_\lambda}e_{T_\mu}(y_1y_2y_3zy_5) \equiv 0 \text{ mod Id}^{\text{gr}}(A).$$

Es importante notar que cuando dos o más números comparten columna en una tabla T_λ, por la forma de e_{T_λ}, estos alternan entre sí (ver Ejemplo 1.2.3, item 3). De esta manera, si $e_{T_\lambda}e_{T_\mu}$ genera sobre un monomio con al menos dos de los números alternantes quedando a la izquierda (o a la derecha) de z; el polinomio generado mod $\text{Id}^{\text{gr}}(A)$ se anulará. En el Ejemplo 3.3.15, por la posición que ocupa z, no se hace posible hacer que 1 y 2 queden, al mismo tiempo, en lados opuestos de 3 y 5 respectivamente; quedando 2 y 5 en lados opuestos de z, pero no 1 y 3.

De hecho en un ejemplo como el anterior, la única posición posible para z sin que mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ se anule, es cuando z se encuentra justo en la mitad del monomio generador, de esta manera, cabe la posibilidad de fijar los números que alternan entre sí, en lados opuestos de z, como veremos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.3.16. Sean λ y τ como en el Ejemplo 3.3.15, y con tablas

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 4 & 5 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad T_\mu = \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline \end{array}$$

tenemos que,

$$\begin{aligned} e_{T_\lambda} e_{T_\mu} &= (1) + (1\ 2) + (4\ 5) + (1\ 2)(4\ 5) - (1\ 4) - (1\ 4\ 2) - (1\ 5\ 4) - (1\ 5\ 4\ 2) \\ &\quad - (2\ 5) - (1\ 2\ 5) - (2\ 4\ 5) - (1\ 2\ 4\ 5) + (1\ 4)(2\ 5) + (1\ 4\ 2\ 5) + (1\ 5\ 2\ 4) + (1\ 5)(2\ 4). \end{aligned}$$

Si se genera un polinomio con $y_2 y_1 z y_4 y_5$ obtenemos,

$$\begin{aligned} e_{T_\lambda} e_{T_\mu}(y_2 y_1 z y_4 y_5) = {} & y_2 y_1 z y_4 y_5 + y_1 y_2 z y_4 y_5 + y_2 y_1 z y_5 y_4 + y_1 y_2 z y_5 y_4 \\ & - y_2 y_4 z y_1 y_5 - y_1 y_4 z y_2 y_5 - y_2 y_5 z y_1 y_4 - y_1 y_5 z y_2 y_4 \\ & - y_5 y_1 z y_4 y_2 - y_5 y_2 z y_4 y_1 - y_4 y_1 z y_5 y_2 - y_4 y_2 z y_5 y_1 \\ & + y_5 y_4 z y_1 y_2 + y_5 y_4 z y_2 y_1 + y_4 y_5 z y_1 y_2 + y_4 y_5 z y_2 y_1 \end{aligned}$$

y de esta manera,

$$\begin{aligned} e_{T_\lambda} e_{T_\mu}(y_2 y_1 z y_4 y_5) \equiv {} & (4 y_1 y_2 z y_4 y_5 - 2 y_2 y_4 z y_1 y_5 - 2 y_1 y_4 z y_2 y_5 \\ & - 2 y_1 y_5 z y_2 y_4 - 2 y_2 y_5 z y_1 y_4 + 4 y_4 y_5 z y_1 y_2) \bmod \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A). \end{aligned}$$

y verificamos que, mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$, el polinomio $e_{T_\lambda} e_{T_\mu}(y_2 y_1 z y_4 y_5)$ no se anula.

Cabe resaltar que si z está en la mitad del monomio generador, el polinomio resultante mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ también puede anularse; por ejemplo, se pretende generar un polinomio con el monomio $y_1 y_4 z y_2 y_5$ que tiene sus variables alternantes del mismo lado de la z (1 y 4 del lado izquierdo y 2 y 5 del lado derecho). Según hemos explicado anteriormente, el polinomio resultante, al tener sus variables alternantes del mismo lado de la z, se anula mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$; veamos esto:

$$\begin{aligned}
e_{T_\lambda}e_{T_\mu}(y_1y_4zy_2y_5) &= y_1y_4zy_2y_5 + y_2y_4zy_1y_5 + y_1y_5zy_2y_4 + y_2y_5zy_1y_4 \\
&\quad - y_4y_1zy_2y_5 - y_4y_2zy_1y_5 - y_5y_1zy_2y_4 - y_5y_2zy_1y_4 \\
&\quad - y_1y_4zy_2y_5 - y_2y_4zy_5y_1 - y_1y_5zy_4y_2 - y_2y_5zy_4y_1 \\
&\quad + y_4y_1zy_5y_2 + y_4y_2zy_5y_1 + y_5y_1zy_4y_2 + y_5y_2zy_4y_1 \\
&\equiv 0 \text{ mod } \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A).
\end{aligned}$$

De acuerdo con lo explicado, si una tabla T_λ tiene más de dos filas, quiere decir que en al menos una de sus columnas tiene tres (o más) números, con lo cual se hace imposible organizar a los tres (o más) en lados diferentes de la z, siempre se darán dos casos, al menos dos están del mismo lado, o todos en el mismo lado. En el siguiente ejemplo se ilustra esta situación:

Ejemplo 3.3.17. Para $n = 4$, sean $\lambda = (2,1,1) \vdash 4$ y $\mu = (1)$.

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} 5 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad\qquad T_\mu = \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline\end{array}$$

con

$$\begin{aligned}
e_{T_\lambda}e_{T_\mu} &= (1) + (1\ 2) - (1\ 4) - (1\ 4\ 2) \\
&\quad - (1\ 5) - (1\ 5\ 2) - (4\ 5) - (1\ 2)(4\ 5) \\
&\quad + (1\ 4\ 5) + (1\ 4\ 5\ 2) + (1\ 5\ 4) + (1\ 5\ 4\ 2).
\end{aligned}$$

Tenemos que $e_{T_\lambda}e_{T_\mu}$ actuando sobre el monomio $y_1y_2zy_4y_5$, genera el siguiente polinomio:

$$\begin{aligned}
e_{T_\lambda}e_{T_\mu}(y_1y_2zy_4y_5) &= y_1y_2zy_4y_5 + y_2y_1zy_4y_5 - y_4y_2zy_1y_5 - y_4y_1zy_2y_5 \\
&\quad - y_5y_2zy_4y_1 - y_5y_1zy_4y_2 - y_1y_2zy_5y_4 - y_2y_1zy_5y_4 \\
&\quad + y_4y_2zy_5y_1 + y_4y_1zy_5y_2 + y_5y_2zy_1y_4 + y_5y_1zy_2y_4,
\end{aligned}$$

de donde observamos que

$$e_{T_\lambda}e_{T_\mu}(y_1y_2zy_4y_5) \equiv 0 \text{ mod } \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A).$$

Más aún, para todo $f \in P_{4,1}$ entonces $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} f \equiv 0 \bmod \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$.

3.3.4. Linealización de polinomios

Ejemplo 3.3.18. Proceso de linealización: Un polinomio escrito en una o más variables puede escribirse como combinación lineal de variables de grado 1. Sea por ejemplo

$$f(y_1, y_3, z) = \sum_{\sigma \in S_2} \mathrm{sgn}(\sigma)\, y_{\sigma(1)} z y_{\sigma(3)} y_1,$$

donde S_2 actúa sobre el conjunto de enteros $\{1,3\}$. La ecuación anterior se puede escribir de manera compacta (usando símbolos), como sigue:

$$f(y_1, y_3, z) = \widetilde{y}_1 z \widetilde{y}_3 y_1, \tag{3.12}$$

donde el símbolo $\widetilde{\ }$, indica alternancia entre las variables y_1 y y_3; esto es, podemos escribir a f como sigue:

$$f(y_1, y_3, z) = \widetilde{y}_1 z \widetilde{y}_3 y_1 = y_1 z y_3 y_1 - y_3 z y_1^2.$$

Para linealizar f incluimos una nueva variable y_4, sustituimos y_1 por $y_1 + y_4$ y restamos los correspondientes polinomios $f(y_1, y_3, z)$ y $f(y_4, y_3, z)$; esto es,

$$h(y_1, y_3, y_4, z) = f(y_1 + y_4, y_3, z) - f(y_1, y_3, z) - f(y_4, y_3, z),$$

con lo cual se sigue que

$$\begin{aligned} h(y_1, y_3, y_4, z) &= (y_1 + y_4) z y_3 (y_1 + y_4) - y_3 z (y_1 + y_4)^2 \\ &\quad - (y_1 z y_3 y_1 - y_3 z y_1^2) - (y_4 z y_3 y_4 - y_3 z y_4^2) \\ &= \cancel{y_1 z y_3 y_1} + y_1 z y_3 y_4 + y_4 z y_3 y_1 + \cancel{y_4 z y_3 y_4} \\ &\quad - \cancel{y_3 z y_1^2} - y_3 z y_1 y_4 - y_3 z y_4 y_1 - \cancel{y_3 z y_4^2} \\ &\quad - \cancel{y_1 z y_3 y_1} + \cancel{y_3 z y_1^2} - \cancel{y_4 z y_3 y_4} + \cancel{y_3 z y_4^2}, \end{aligned}$$

obteniendo así,

$$h(y_1, y_3, y_4, z) = y_1 z y_3 y_4 + y_4 z y_3 y_1 - y_3 z y_1 y_4 - y_3 z y_4 y_1,$$

que es el polinomio f linealizado en las variables y_1, y_3, y_4 y z. Observando los monomios de h, podemos detectar que las variables y_1 y y_3 alternan entre sí, del mismo modo, y_1 es simétrico a y_4; de hecho h coincide con la configuración de las tablas de Young:

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad\qquad T_\mu = \begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline\end{array}$$

Podemos apreciar que el polinomio generado por $e_{T_\lambda} e_{T_\mu}$, coincide con h; esto es,

$$e_{T_\lambda} e_{T_\mu}(y_1 z y_3 y_4) = y_1 z y_3 y_4 + y_4 z y_3 y_1 - y_3 z y_1 y_4 - y_3 z y_4 y_1.$$

De esta manera $e_{T_\lambda} e_{T_\mu}$ es la forma linealizada de la Ecuación (3.12) identificando en T_λ las variables que alternan y observando en T_μ la posición que debería ocupar z.

De acuerdo con los Ejemplos 3.3.15 a 3.3.17, para cualquier $f \in P_{r,n-r}$, si se requiere que el polinomio $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} f$ no se anule mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$, entonces T_λ no debe tener más de dos filas y, además, al menos uno de los sumandos de f debe tener a las variables que alternan entre si (las que comparten columna en T_λ), en lados diferentes de z_j, $j = 1, 2, \cdots$. De esta manera, si $\lambda \vdash n-1$, y $\mu \vdash 1$ debe ser que λ sea de la forma $\lambda = (p+q, p)$ con $p \geq 0$, $q \geq 0$ y diagramas asociados,

$$D_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline & & \cdots & & & & \cdots & & & \cdots & \\ \hline & & \cdots & & \multicolumn{7}{c}{} \\ \cline{1-4}\end{array} \qquad D_\mu = \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline\end{array}$$

Al requerir que $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} f$ no se anule mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ debemos considerar la posición que ocupa z_j en cada uno de los monomios de f; es decir, aquellos monomios en los cuales z_j permita que las variables alternantes entre si, queden en sus lados opuestos, no se anulan mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ bajo la acción de $e_{T_\lambda} e_{T_\mu}$. De esta manera, las primeras p columnas en D_λ indican igual cantidad de parejas de números alternantes, luego z_j debe ocupar en el monomio, las posiciones $p+1$, $p+2, \cdots$, $n-p$, o lo que es equivalente, las posiciones $p+1$, $p+2, \cdots$, $p+q+1$ (pues $n = 2p+q+1$). Estas posiciones también las podemos escribir en la forma $p+i+1$, donde $i = 0, \cdots, q$; teniendo así un total de $q+1$ posiciones para z_j en las cuales las parejas alternantes todavía pueden estar en lados diferentes. Conviene entonces que,

$$T_\mu^{(i)} = \begin{array}{|c|}\hline p+i+1 \\ \hline\end{array}$$

de modo que z_j quede asociada a las posiciones $p+i+1$, $i = 0, \cdots q$. Para T_λ requerimos el llenado estándar,

$$T_\lambda^{(i)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & p & \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_q \\ \hline n-p+1 & n-p+2 & \cdots & n \\ \cline{1-4}\end{array}$$

con $\ell_1, \cdots, \ell_q \in \{p+1, \cdots, p+q+1\} \setminus \{p+i+1\}$, $\ell_1 < \cdots < \ell_q$.

Observación 3.3.19. Los números en las tablas T_λ y T_μ indican únicamente las posiciones que deben ocupar las variables en el monomio, y son independientes de los subíndices que estas tenga. En algunos ejemplos se asocia la posición de z_i a su subíndice simplemente por comodidad, pero, como veremos en los siguiente ejemplos, la variable z_i se ubicará, de acuerdo a la posición que le indique su tabla de Young asociada.

Ejemplo 3.3.20. Para $n = 7$ sean $\lambda = (4,2) \vdash 6$ y $\mu = (1) \vdash 1$. Por la forma de λ se deduce que $p = 2$, $q = 2$ e $i = 0,1,2$. Las tablas Young respectivas son:

$$T_\lambda^{(0)} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 & 5 \\ \hline 6 & 7 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad T_\mu^{(0)} = \boxed{3}$$

$$T_\lambda^{(1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 5 \\ \hline 6 & 7 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad T_\mu^{(1)} = \boxed{4}$$

$$T_\lambda^{(2)} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 6 & 7 \\ \cline{1-2}\end{array} \qquad T_\mu^{(2)} = \boxed{5}$$

El ejemplo 3.3.18 sirve para ilustrar que todo polinomio $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} f$ se puede expresar, como uno de mayor grado pero con menos variables, como sigue:

$$a_{p,q}^{(i)}(y_1, y_2, z) = \sum_{\sigma_1, \cdots, \sigma_p \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma_1) \cdots \operatorname{sgn}(\sigma_p)\, y_1^i y_{\sigma_1(1)} \cdots y_{\sigma_p(1)}\, z\, y_{\sigma_1(2)} \cdots y_{\sigma_p(2)} y_1^{q-i};$$

y haciendo uso de símbolos, podemos simplificar la notación para expresar el polinomio de manera equivalente, como a continuación:

$$a_{p,q}^{(i)}(y_1, y_2, z) = y_1^i \underbrace{\overline{y}_1 \cdots \widetilde{y}_1}_{p}\; z\; \underbrace{\overline{y}_2 \cdots \widetilde{y}_2}_{p}\; y_1^{q-i}, \quad i = 0, \cdots, q, \tag{3.13}$$

donde los símbolos $-$ y $\sim$, indican alternancia entre los p elementos correspondientes. Notemos que si $n = 9$ por ejemplo, entonces $\lambda \vdash 8$, $\mu \vdash 1$ y, además, $i + p + 1 + p + q - i = 2p + q + 1 = 9$; con lo cual, la suma de estos índices debe dar el grado usual del polinomio.

Ahora veamos que a partir de una pareja de tablas $(T_\lambda^{(i)}, T_\mu^{(i)})$, $\lambda = (p+q, p)$, $p \geq 0$, $q \geq 0$ y $\mu = (1)$, podemos expresar el polinomio en la forma de (3.13), identificando la posición que debe ocupar z_j.

Ejemplo 3.3.21. Para las tablas del Ejemplo 3.3.20 tenemos los polinomios asociados,

$$\begin{aligned}
a_{2,2}^{(0)}(y_1, y_2, z_3) &= \sum_{\sigma_1,\sigma_2 \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2)\, y_{\sigma_1(1)} y_{\sigma_2(1)}\ z\ y_{\sigma_1(2)} y_{\sigma_2(2)} y_1^2 \\
a_{2,2}^{(1)}(y_1, y_2, z_3) &= \sum_{\sigma_1,\sigma_2 \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2)\, y_1 y_{\sigma_1(1)} y_{\sigma_2(1)}\ z\ y_{\sigma_1(2)} y_{\sigma_2(2)} y_1 \\
a_{2,2}^{(2)}(y_1, y_2, z_3) &= \sum_{\sigma_1,\sigma_2 \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2)\, y_1^2 y_{\sigma_1(1)} y_{\sigma_2(1)}\ z\ y_{\sigma_1(2)} y_{\sigma_2(2)}
\end{aligned}$$

o de forma equivalente,

$$\begin{aligned}
a_{2,2}^{(0)}(y_1, y_2, z_3) &= \overline{y}_1 \widetilde{y}_1\ z_3\ \overline{y}_2 \widetilde{y}_2 y_1^2 \cong e_{T_\lambda^{(0)}} e_{T_\mu^{(0)}}(y_1 y_2\ z_3\ y_4 y_5 y_6 y_7), \\
a_{2,2}^{(1)}(y_1, y_2, z_3) &= y_1 \overline{y}_1 \widetilde{y}_1\ z_3\ \overline{y}_2 \widetilde{y}_2 y_1 \cong e_{T_\lambda^{(1)}} e_{T_\mu^{(1)}}(y_1 y_2 y_4\ z_3\ y_5 y_6 y_7), \\
a_{2,2}^{(2)}(y_1, y_2, z_3) &= y_1^2 \overline{y}_1 \widetilde{y}_1\ z_3\ \overline{y}_2 \widetilde{y}_2 \cong e_{T_\lambda^{(2)}} e_{T_\mu^{(2)}}(y_1 y_2 y_4 y_5\ z_3\ y_6 y_7),
\end{aligned}$$

donde el símbolo $\cong$ significa que a la derecha está la forma linealizada del polinomio respectivo. De estas ecuaciones observamos que los monomios generadores tienen sus variables alternantes (1 y 6, 2 y 7), en lados diferentes de z_3. Al generar con estos monomios, los polinomios resultantes no se anulan mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$.

En el siguiente ejemplo extendemos un polinomio alternante y luego mostramos una manera específica de evaluar en este, a fin de agilizar los cálculos para ejemplos posteriores:

Ejemplo 3.3.22. Sea f el polinomio dado por

$$\begin{aligned}
f(y_1, y_2, z) &= y_1 \overline{y}_1 \widetilde{y}_1 z \overline{y}_2 \widetilde{y}_2 y_2 \\
&= y_1 y_1 \widetilde{y}_1 z y_2 \widetilde{y}_2 y_2 - y_1 y_2 \widetilde{y}_1 z y_1 \widetilde{y}_2 y_2 \\
&= y_1 y_1 y_1 z y_2 y_2 y_2 - y_1 y_1 y_2 z y_2 y_1 y_2 - y_1 y_2 y_1 z y_1 y_2 y_2 + y_1 y_2 y_2 z y_1 y_1 y_2 \\
&= y_1^3 z y_2^3 - y_1^2 y_2 z y_2 y_1 y_2 - y_1 y_2 y_1 z y_1 y_2^2 + y_1 y_2^2 z y_1^2 y_2.
\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución $y_1 = E_{11} + E_{22} = I,\ y_2 = E_{22}$ y $z = E_{12}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
f(I, E_{22}, E_{12}) &= I^3 E_{12} E_{22}^3 - I^2 E_{22} E_{12} E_{22} I E_{22} - I E_{22} I E_{12} I E_{22}^2 + I E_{22}^2 E_{12} I^2 E_{22} \\
&= E_{12} E_{22}^3 - 2\cancelto{0}{E_{22} E_{12} E_{22}^2} + \cancelto{0}{E_{22}^2 E_{12} E_{22}} \\
&= E_{12} E_{22} \\
&= E_{12}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3.23. Sea f una combinación lineal nula mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$, de los polinomios del Ejemplo 3.3.21; esto es,

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i\ a_{2,2}^{(i)}(y_1, y_2, z) = 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)),$$

suma que podemos escribir en la forma

$$\begin{aligned}
\alpha_2\ a_{2,2}^{(2)}(y_1, y_2, z) + \sum_{i=0}^{1} \alpha_i\ a_{2,2}^{(i)}(y_1, y_2, z) &= 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)) \\
\alpha_2\ y_1^2 \overline{y}_1 \widetilde{y}_1\ z\ \overline{y}_2 \widetilde{y}_2 + \sum_{i=0}^{1} \alpha_i\ y_1^i \overline{y}_1 \widetilde{y}_1\ z\ \overline{y}_2 \widetilde{y}_2 y_1^{q-i} &= 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)).
\end{aligned}$$

sustituyendo y_1 por $y_1 + y_3$ obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\alpha_2\ (y_1 + y_3)^2 \overline{(y_1 + y_3)} \widetilde{(y_1 + y_3)}\ z\ \overline{y}_2 \widetilde{y}_2 \\
&+ \sum_{i=0}^{1} \alpha_i\ (y_1 + y_3)^i \overline{(y_1 + y_3)} \widetilde{(y_1 + y_3)}\ z\ \overline{y}_2 \widetilde{y}_2 (y_1 + y_3)^{q-i} = 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Expandiendo el primer sumando tenemos,

$$\begin{aligned}
&\alpha_2\ ((y_1 + y_3)^2 (y_1 + y_3) \widetilde{(y_1 + y_3)}\ z\ y_2 \widetilde{y}_2 - (y_1 + y_3)^2 y_2 \widetilde{(y_1 + y_3)}\ z\ (y_1 + y_3) \widetilde{y}_2) \\
&= \alpha_2\ ((y_1 + y_3)^2 (y_1 + y_3)(y_1 + y_3)\ z\ y_2 y_2 - (y_1 + y_3)^2 (y_1 + y_3) y_2\ z\ y_2 (y_1 + y_3) \\
&\qquad - (y_1 + y_3)^2 y_2 (y_1 + y_3)\ z\ (y_1 + y_3) y_2 + (y_1 + y_3)^2 y_2 y_2\ z\ (y_1 + y_3)(y_1 + y_3)) \\
&= \alpha_2\ ((y_1 + y_3)^4\ z\ y_2^2 - (y_1 + y_3)^3 y_2\ z\ y_2 (y_1 + y_3) \\
&\qquad - (y_1 + y_3)^3 y_2\ z\ (y_1 + y_3) y_2 + (y_1 + y_3)^2 y_2^2\ z\ (y_1 + y_3)^2) \\
&= \alpha_2\ (y_1^4 z y_2^2 + 4 y_1^3 y_3 z y_2^2 + 6 y_1^2 y_3^2 z y_2^2 + 4 y_1 y_3^3 z y_2^2 + y_3^4 z y_2^2 + \cdots).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Por otra parte y desarrollando los otros dos sumandos en (3.14), tenemos,

$$\begin{aligned}
&\alpha_2\,(y_1^4zy_2^2+4y_1^3y_3zy_2^2+6y_1^2y_3^2zy_2^2+4y_1y_3^3zy_2^2+y_3^4zy_2^2+\cdots)\\
&+\alpha_1\,(y_1^3zy_1y_2^2+y_1^3zy_3y_2^2+3y_1^2y_3zy_1y_2^2+3y_1^2y_3zy_3y_2^2+3y_1y_3^2zy_1y_2^2+\cdots)\\
&+\alpha_0\,(y_1^2zy_1^2y_2^2+2y_1^2zy_1y_2^2y_3+y_1^2zy_2^2y_3^2+2y_1y_3zy_1^2y_2^2+\cdots)=0\ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)).
\end{aligned}$$

Reorganizando de acuerdo al grado de la variable y_1 tenemos,

$$\begin{aligned}
&\underbrace{(\alpha_2\,y_1^4zy_2^2\;+\;\alpha_1\,y_1^3zy_1y_2^2\;+\;\alpha_0\,y_1^2zy_1^2y_2^2\;+\cdots)}_{f_4}\\
&+\underbrace{(4\alpha_2\,y_1^3y_3zy_2^2\;+\;\alpha_1\,y_1^3zy_3y_2^2\;+\;3\alpha_1\,y_1^2y_3zy_1y_2^2\;+\;2\alpha_0\,y_1^2zy_1y_2^2y_3\;+\cdots)}_{f_3}\\
&+\underbrace{(6\alpha_2\,y_1^2y_3^2zy_2^2\;+\;3\alpha_1\,y_1^2y_3zy_3y_2^2\;+\;3\alpha_1\,y_1y_3^2zy_1y_2^2\;+\;\alpha_0\,y_1^2zy_2^2y_3^2\;+\cdots)}_{f_2}\\
&\qquad\vdots\\
&+\underbrace{(\alpha_2\,y_3^4zy_2^2\;+\;\alpha_1\,y_3^3zy_3y_2^2\;+\;y_3^2zy_2^2y_3^2\;+\cdots)}_{f_0}=0\ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)).
\end{aligned}$$

De esta manera obtenemos una suma de la forma,

$$\sum_{j=0}^{4} f_j(y_1,y_2,y_3,z)=0\ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)) \tag{3.16}$$

donde cada f_j, es la componente homogenea de grado j en la variable y_1.

Al evaluar $y_1=E_{11}$, $y_2=y_3=E_{11}$ y $z=E_{12}$, puesto que $E_{22}E_{12}=E_{11}E_{22}=0$, encontramos que, si $0\le t\le 2$, los únicos monomios que no se anulan son los de grado $t+p$ en la variable y_1 y $q-t$ en la variable y_3 (recordando que $q=2$ en este caso); por ejemplo el monomio $y_1^4zy_2$ de f_4 (cuando $t=2$), o el monomio $y_1^3zy_3y_2^2$ de f_3 (cuando $t=1$), o también el monomio $y_1^2zy_2^2y_3^2$ de f_2 (cuando $t=0$), son los únicos monomios que no se anulan mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ en sus respectivas componentes homogéneas. De hecho obtenemos, $f_4=\alpha_2E_{12}$, $f_3=\alpha_1E_{12}$ y $f_2=\alpha_0E_{12}$ (ver Ejemplo 3.3.22).

Por la Proposición 1.3.21, tenemos que $f_j=0$ (mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$) para cada $j=0,1,\cdots,4$; luego esto solo es posible si $\alpha_2=\alpha_1=\alpha_0=0$.

Un **polinomio simétrico** es un polinomio $f = f(x_1,\cdots,x_n)$ tal que si intercambiamos dos variables al evaluar, este sigue siendo el mismo polinomio; esto es,

$$f(x_1,\cdots x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n) = f(x_1,\cdots x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$$

para todo $i,j \in \{1,\cdots,n\}$.

Un hecho importante de los e_{T_λ} es que generan polinomios simétricos en los elementos que comparten filas; veamos:

Ejemplo 3.3.24. Para $n = 5$ sean $\lambda = (3,1)$ y $\mu = (1)$ y sean también,

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad\qquad T_\mu = \begin{array}{|c|}\hline 3 \\ \hline\end{array}\,.$$

de donde tenemos que,

$$\begin{aligned} f(y_1,y_2,y_4,y_5,z) = e_{T_\lambda}e_{T_\mu}(y_1y_2zy_4y_5) &= y_1y_2zy_4y_5 + y_2y_1zy_4y_5 + y_5y_2zy_4y_1 \\ &+ y_1y_5zy_4y_2 + y_2y_5zy_4y_1 + y_5y_1zy_4y_2 \\ &- y_4y_2zy_1y_5 - y_4y_1zy_2y_5 - y_4y_2zy_5y_1 \\ &- y_4y_5zy_1y_2 - y_4y_5zy_2y_1 - y_4y_1zy_5y_2. \end{aligned}$$

Por otra parte, al realizar un intercambio en f entre dos de las variables que comparten fila, por ejemplo y_1 con y_2, tenemos que,

$$\begin{aligned} f(y_2,y_1,y_4,y_5,z) &= y_2y_1zy_4y_5 + y_1y_2zy_4y_5 + y_5y_1zy_4y_2 \\ &+ y_2y_5zy_4y_1 + y_1y_5zy_4y_2 + y_5y_2zy_4y_1 \\ &- y_4y_1zy_2y_5 - y_4y_2zy_1y_5 - y_4y_1zy_5y_2 \\ &- y_4y_5zy_2y_1 - y_4y_5zy_1y_2 - y_4y_2zy_5y_1, \end{aligned}$$

y podemos ver que $f(y_2,y_1,y_4,y_5,z) = f(y_1,y_2,y_4,y_5,z)$. De hecho tenemos que

$$\begin{aligned} e_{T_\lambda}e_{T_\mu}(y_1y_2zy_4y_5) = f(y_1,y_2,y_4,y_5,z) &= f(y_2,y_1,y_4,y_5,z) \\ &= f(y_5,y_2,y_4,y_1,z) = f(y_1,y_5,y_4,y_2,z), \end{aligned}$$

y f es simétrico en las variables relacionadas a la primera fila de T_λ. Más aún, por la simetría de f tenemos que, para cualquier $\sigma \in R_{T_\lambda}$, entonces $\sigma f = f$. Sea por ejemplo

$\sigma = (1\ 5\ 2) \in R_{T_\lambda}$, tenemos entonces que,

$$\begin{aligned}
\sigma f(y_1, y_2, y_4, y_5, z) = f(&y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(4)}, y_{\sigma(5)}, z) \\
&= y_5y_1zy_4y_2 + y_1y_5zy_4y_2 + y_2y_1zy_4y_5 \\
&+ y_5y_2zy_4y_1 + y_1y_2zy_4y_5 + y_2y_5zy_4y_1 \\
&- y_4y_1zy_5y_2 - y_4y_5zy_1y_2 - y_4y_1zy_2y_5 \\
&- y_4y_2zy_5y_1 - y_4y_2zy_1y_5 - y_4y_5zy_2y_1,
\end{aligned}$$

y observamos que $\sigma f = f$. Esta última simetría se da por la cerradura de R_{T_λ}, es decir, para cualquier $\sigma \in R_{T_\lambda}$ entonces $\sigma R_{T_\lambda} = R_{T_\lambda}$; luego $\sigma e_{T_\lambda} e_{T_\mu} = e_{T_\lambda} e_{T_\mu}$ y por esta razón, $\sigma f = f$ para todo $\sigma \in R_{T_\lambda}$.

Ejemplo 3.3.25. Para $n = 4$, sean $\lambda = (2, 1)$ y $\mu = (1)$, con tablas de Young,

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad\qquad T_\mu = \boxed{2}\,,$$

Sea

$$\varphi : \frac{\mathbb{F}\langle X\rangle^{\text{gr}}}{\text{Id}^{\text{gr}}(A)} \to \frac{\mathbb{F}\langle X\rangle^{\text{gr}}}{\text{Id}^{\text{gr}}(A)}$$

un endomorfismo de álgebras tal que

$$\begin{aligned}
\varphi(y_1) = \varphi(y_4) &= y_1, \\
\varphi(y_3) &= y_2. \\
\varphi(z_i) &= z_i \text{ para todo } i = 1, 2 \cdots,
\end{aligned}$$

Si $g(y_1, y_2, z) = \varphi(e_{T_\lambda} e_{T_\mu}(y_1zy_3y_4))$, entonces tenemos que,

$$\begin{aligned}
g(y_1, y_2, z) &= \varphi(y_1zy_3y_4 + y_4zy_3y_1 - y_3zy_1y_4 - y_3zy_4y_1) \\
&= \varphi(y_1zy_3y_4) + \varphi(y_4zy_3y_1) - \varphi(y_3zy_1y_4) - \varphi(y_3zy_4y_1) \\
&= y_1zy_2y_1 + y_1zy_2y_1 - y_2zy_1y_1 - y_2zy_1y_1 \\
&= 2(y_1zy_2y_1 - y_2zy_1y_1) \\
&= 2!\ \bar{y}_1 z \bar{y}_2 y_1
\end{aligned}$$

al linealizar g como en el Ejemplo 3.3.18, es decir, reemplazando a y_1 por $y_1 + y_4$ y a y_2

por y_3, encontramos que,

$$f^*(y_1, y_3, y_4, z) = 2!\ e_{T_\lambda} e_{T_\mu}(y_1 z y_3 y_4),$$

donde, salvo el escalar, $e_{T_\lambda} e_{T_\mu}(y_1 z y_3 y_4)$ es la linealización de g.

A fin de ilustrar de mejor manera el comportamiento del endomorfismo φ; nos planteamos en el siguiente ejemplo, el mismo ejercicio, pero para 6 variables:

Ejemplo 3.3.26. Para $n = 6$ sean $\lambda = (3, 2)$ y $\mu = (1)$, con tablas de Young,

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 5 & 6 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad T_\mu = \boxed{3},$$

sea

$$\varphi : \frac{\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}}{\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)} \to \frac{\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}}{\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)}$$

un endomorfismo de álgebras tal que

$$\begin{aligned} \varphi(y_1) = \varphi(y_2) = \varphi(y_4) &= y_1, \\ \varphi(y_5) = \varphi(y_6) &= y_2. \\ \varphi(z_i) &= z_i \text{ para todo } i = 1, 2 \cdots, \end{aligned}$$

Si $g(y_1, y_2, z) = \varphi(e_{T_\lambda} e_{T_\mu}(y_1 y_2 z y_4 y_5 y_6))$, entonces tenemos que,

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, z) &= \varphi(e_{T_\lambda} e_{T_\mu}(y_1 y_2 z y_4 y_5 y_6)) \\ &= 12\ \overline{y}_1 \widetilde{y}_1\ z\ \overline{y}_2 \widetilde{y}_2 y_1. \\ &= 3!\ 2!\ \overline{y}_1 \widetilde{y}_1\ z\ \overline{y}_2 \widetilde{y}_2 y_1. \end{aligned}$$

al linealizar g como en el Ejemplo 3.3.18, es decir, reemplazando y_1 por $y_1 + y_2 + y_4$ y y_2 por $y_5 + y_6$, encontramos que,

$$f^*(y_1, y_2, y_4, y_5, y_6, z) = 3!\ 2!\ e_{T_\lambda} e_{T_\mu}(y_1 y_2 z y_4 y_5 y_6),$$

donde, salvo el escalar, $e_{T_\lambda} e_{T_\mu}(y_1 y_2 z y_4 y_5 y_6)$ es la linealización de g.

En general, el coeficiente en forma de producto de factoriales se explica porque en R_{T_λ} están las permutaciones de S_3, es decir $3!$ permutaciones, multiplicadas por las permutaciones de S_2, es decir, $2!$ permutaciones. Por la simetría de los elementos que comparten fila (ver Ejemplo 3.3.24), al colapsar vía φ las variables y_i's, aparecen conjuntos de monomios iguales; al reducir términos semejantes, obtenemos el polinomio de la forma $3!\ 2!\ \overline{y}_1\widetilde{y}_1\ z\ \overline{y}_2\widetilde{y}_2y_1$.

El siguiente lema es importante como preliminar para el Teorema 3.3.28. El lector puede encontrar una demostración en [16, Capítulo 2, Sección 4] .

Lema 3.3.27. Sea W_λ un S_n-módulo irreducible con caracter $\chi(W_\lambda) = \chi_\lambda$, $\lambda \vdash n$. Entonces W_λ puede ser generado como S_n-módulo por un elemento de la forma $e_{T_\lambda}f$ para algún $f \in W_\lambda$ y alguna tabla de Young T_λ de forma λ.

Teorema 3.3.28. Sea A una PI-álgebra con n-ésimo cocaracter $\chi_n(A)$ definido en la Ecuación (2.4). Sea $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \vdash n$ y sea M un submódulo de $P_n(A)$ con caracter $\chi(M) = m_\lambda\chi_\lambda$. Si $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ y $Y = \{y_1, y_2, \cdots\}$ son conjuntos contables y

$$\varphi : \frac{\mathbb{F}\langle X\rangle}{\mathrm{Id}(A)} \to \frac{\mathbb{F}\langle Y\rangle}{\mathrm{Id}(A)}$$

es un homorfismo tal que

$$\begin{gathered}
\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \cdots = \varphi(x_{\lambda_1}) = y_1 \\
\varphi(x_{\lambda_1+1}) = \varphi(x_{\lambda_1+2}) = \cdots = \varphi(x_{\lambda_1+\lambda_2}) = y_2 \\
\vdots \\
\varphi(x_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{k-1}+1}) = \cdots = \varphi(x_n) = y_k,
\end{gathered}$$

entonces $m_\lambda = \dim\ \varphi(M)$.

Demostración. Dado que $\chi(M) = m_\lambda\chi_\lambda$, por el Teorema 2.3.14, M se descompone en $q = m_\lambda$ submódulos irreducibles; esto es,

$$M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_q,$$

donde los $M_1 \cong \cdots \cong M_q$ son S_n-submódulos irreducibles isomorfos a W_λ cuyo caracter asociado es χ_λ.

Sea T_λ una tabla de Young llenada canónicamente con los n enteros como sigue: en la primera fila se ponen los enteros desde 1 hasta λ_1; en la segunda fila se ponen los enteros desde $\lambda_1 + 1$ hasta $\lambda_1 + \lambda_2$ y así sucesivamente. Por el Lema 3.3.27, Los módulos

$M_1, \cdots, M_q$ son generados por elementos de la forma $e_{T_\lambda}f_1, \cdots, e_{T_\lambda}f_q$ respectivamente, para algún $f_i \in M_i$, $i = 1, \cdots, q$.

Sea $g_i = \varphi(e_{T_\lambda}f_i)$ para todo $i = 1, \cdots, q$. Veamos que los polinomios $g_1, \cdots, g_q$ son no nulos; supongamos que existe $t \in \{1, \cdots, q\}$ tal que $g_t = \varphi(e_{T_\lambda}f_t) = 0$, entonces $e_{T_\lambda}f_t \in \ker(\varphi) = \mathrm{Id}(A)$. Luego $e_{T_\lambda}f_t = 0 \pmod{Id(A)}$, con lo cual $M_t = \{0\}$ y tendríamos que $\chi(M) = (m_\lambda - 1)\chi_\lambda$, contradicción. Más aún, los polinomios $g_1, \cdots, g_q$ son linealmente independientes (mod Id(A)) pues una combinación lineal de la forma $\alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_q g_q = 0$ con $\alpha_1, \cdots, \alpha_q \in \mathbb{F}$, implica que

$$\alpha_1\varphi(e_{T_\lambda}f_1) + \cdots + \alpha_q\varphi(e_{T_\lambda}f_q) = \varphi(\alpha_1 e_{T_\lambda}f_1 + \cdots + \alpha_q e_{T_\lambda}f_q) = 0,$$

luego $\alpha_1 e_{T_\lambda}f_1 + \cdots + \alpha_q e_{T_\lambda}f_q \in \ker(\varphi) = \mathrm{Id}(A)$, es decir,

$$\alpha_1 e_{T_\lambda}f_1 + \cdots + \alpha_q e_{T_\lambda}f_q = 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Id}(A)). \tag{3.17}$$

Supongamos que existe $t \in \{1, \cdots, q\}$ tal que $e_{T_\lambda}f_t$ depende linealmente de los demás $e_{T_\lambda}f_i$'s; esto es,

$$e_{T_\lambda}f_t = \sum_{i \neq t} \beta_i e_{T_\lambda}f_i,$$

luego

$$M_t = \mathbb{F}S_n e_{T_\lambda}f_t = \mathbb{F}S_n \sum_{i \neq t} \beta_i e_{T_\lambda}f_i = \bigoplus_{i \neq t} \mathbb{F}S_n e_{T_\lambda}f_i = \bigoplus_{i \neq t} M_i,$$

con lo cual,

$$M = \bigoplus_{i \neq t} M_i,$$

y de nuevo, $\chi(M) = (m_\lambda - 1)\chi_\lambda$, contradicción. De esta manera, los $e_{T_\lambda}f_i$, $i = 1, \cdots, q$ son linealmente independientes y en la Ecuación (3.17) tenemos que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$. Por lo tanto, los polinomios $g_1, \cdots, g_q$ son linealmente independientes. De hecho, los polinomios $e_{T_\lambda}f_i$, $i = 1, \cdots, q$ generan a M; veamos, sea $h \neq 0 \in M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_q$ entonces $h = h_1 + \cdots + h_q$, con $h_i \in M_i$ para cada $i = 1, \cdots, q$. Como cada M_i es generado por un polinomio de la forma $e_{T_\lambda}f_i$, entonces existen $\alpha_i \in \mathbb{F}$ tal que $h_i = \alpha_i e_{T_\lambda}f_i$ para cada $i = 1, \cdots, q$. Luego $h = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i e_{T_\lambda}f_i$. De esta manera, h es una combinación lineal de los polinomios $e_{T_\lambda}f_i$, $i = 1, \cdots, q$.

Ahora veamos que los polinomios $g_1, \cdots, g_q$ generan, como espacio vectorial, a $\varphi(M)$. Dado $g \in \varphi(M)$, entonces $g = \varphi(f)$ para algún $f \in M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_q$. De esta manera, f

es una combinación lineal de los polinomios $e_{T_\lambda} f_i$, $i = 1, \cdots, q$; es decir,

$$f = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i e_{T_\lambda} f_i,$$

existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_q \in \mathbb{F}$; de esta manera tenemos que,

$$g = \varphi(f) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i e_{T_\lambda} f_i\right) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varphi(e_{T_\lambda} f_i) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i g_i.$$

Por lo tanto, los polinomios $g_1, \cdots, g_q$ conforman una base para $\varphi(M)$ y tenemos entonces que dim $\varphi(M) = q = m_\lambda$. ■

Observación 3.3.29. Por la construcción de T_λ en el teorema anterior, cualquier $e_{T_\lambda} f_i$ es simétrico en las variables asociadas a los elementos que compartan fila (ver Ejemplo 3.3.24); es decir, cada uno de dichos polinomios es simétrico en los conjuntos de variables

$$\begin{aligned}
X_1 &= \{x_1, \cdots, x_{\lambda_1}\},\\
X_2 &= \{x_{\lambda_1+1}, \cdots, x_{\lambda_1+\lambda_2}\}\\
&\vdots\\
X_k &= \{x_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{k-1}+1}, \cdots, x_n\}.
\end{aligned}$$

Sea $g_i = \varphi(e_{T_\lambda} f_i)$ y denotemos por $f_i^*(x_1, \cdots, x_n)$ la completa linealización de g_i, donde cada y_j es linealizado como la suma de las variables en $\mathbb{F}\langle X\rangle/\mathrm{Id}(A)$ cuya imagen (vía φ) es y_j; es decir, reemplazando a y_1 por $x_1 + \cdots + x_{\lambda_1}$, a y_2 por $x_{\lambda_1+1} + \cdots + x_{\lambda_1+\lambda_2}$ y sucesivamente hasta reemplazar a y_k por $x_{\lambda_1+\cdots+\lambda_{k-1}+1} + \cdots + x_n$ (ver Ejemplos 3.3.25 y 3.3.26). De esta manera, tenemos que

$$f_i^* = (\lambda_1)! \cdots (\lambda_k)!\, e_{T_\lambda} f_i, \quad i = 1, \cdots, q,$$

y $e_{T_\lambda} f_i$ es, salvo el escalar, la linealización del polinomio g_i (ver Ejemplo 3.3.26).

Otra Teorema importante en el cálculo de cocaracteres es el siguiente:

Teorema 3.3.30. Sea A una PI-álgebra con n-ésimo cocaracter $\chi_n(A)$ dado en la Ecuación (2.4). Para una partición $\mu \vdash n$, la multiplicidad m_μ es igual a cero si y solo si para cualquier tabla de Young T_μ de forma μ y para cualquier polinomio $f = f(x_1, \cdots, x_n) \in P_n$, el álgebra A satisface la identidad $e_{T_\mu} f \equiv 0$.

La demostración de este teorema excede el alcance de este documento; el lector puede referirse a [16, Capítulo 2, Sección 4] para encontrar una prueba detallada.

3.3.5. Cocaracteres graduados de $UT_2(\mathbb{F})$

A continuación describimos la descomposición del n-ésimo cocaracter graduado de $UT_2(\mathbb{F})$ en caracteres irreducibles.

Definición 3.3.31. Dada una partición $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$ de un entero positivo n; denotamos por $h(\lambda)$, a la cantidad de filas del diagrama asociado; esto es, $h(\lambda) = r$. El número $h(\lambda)$ es conocido como la **altura del diagrama asociado** a λ.

Ejemplo 3.3.32. La partición $\lambda = (2, 1, 1) \vdash 4$ al tener tres filas, tiene altura 3; es decir, $h(\lambda) = 3$.

Teorema 3.3.33. Sea

$$\chi_n^{\mathrm{gr}}(UT_2(\mathbb{F})) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} m_{\lambda,\mu}\, \chi_{\lambda,\mu}$$

el n-ésimo caracter graduado de $UT_2(\mathbb{F})$ con $\mathbb{Z}_2$-graduación canónica. Entonces

1. $m_{\lambda,\mu} = q + 1$ si $\lambda = (p+q,\ p),\ \mu = (1)$;
2. $m_{(n),\emptyset} = 1$;
3. $m_{\lambda,\mu} = 0$ en cualquier otro caso.

Demostración. Si $h(\lambda) > 2$ significa que cualquier T_λ asociada tendrá al menos tres filas; con lo cual, cualquier polinomio generado por $e_{T_\lambda} e_{T_\mu}$ alternará en más de dos de las variables cuyos índices compartan columna en T_λ; luego, cualquier polinomio generado por $e_{T_\lambda} e_{T_\mu}$, se anulará mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ (ver Ejemplo 3.3.17). De esta manera, el submódulo $W_{\lambda,\mu}$ de $P_{r,n-r}^{\mathrm{gr}}(A)$ es nulo y por el Teorema 3.3.28 tenemos que $m_{\lambda,\mu} = 0$ cuando $h(\lambda) > 2$.

Por otra parte, por el Lema 3.3.1, $z_1 x z_2 \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ para cualquier $x \in \mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$; con lo cual, en $P_n^{\mathrm{gr}}(A)$, no existen los monomios con dos o más variables de Z (como se vio en los Ejemplos 3.3.5 y 3.3.6), en consecuencia, el submódulo irreducible $W_{\lambda,\mu}$ de $P_{r,n-r}^{\mathrm{gr}}(A)$, es nulo cuando $|\mu| > 1$, y en tales casos, $m_{\lambda,\mu} = 0$.

En adelante asumamos que $|\mu| \leq 1$ y supongamos primero que $\mu = \emptyset$. Si esto es así, tenemos que (ver Ejemplos 3.3.5 y 3.3.6)

$$P_{n,0}^{\mathrm{gr}}(A) = \{y_{\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\},$$

con lo cual, para $\lambda = (n)$ obtenemos que $m_{(n),\emptyset} = \dim P_{n,0}^{\mathrm{gr}}(A) = 1$. Para $\lambda \neq (n)$, y para cualquier T_λ, $e_{T_\lambda} e_{T_\emptyset}$ genera polinomios en las n variables de Y (ver Ejemplo 3.3.17); estos polinomios tienen igual cantidad de signos positivos y negativos, entonces, mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ se anulan, de manera que $e_{T_\lambda} e_{T_\emptyset} f \equiv 0 \mod \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ para todo $f \in P_{n,0}$, luego por el Teorema 3.3.30, tenemos que $m_{\lambda,\emptyset} = 0$.

La idea para probar que $m_{\lambda,\mu} = q+1$ cuando $\lambda = (p+q, q)$ y $\mu = (1)$, $p \geq 0$, $q \geq 0$, es ver que $m_{\lambda,\mu} = \dim \varphi(M) = q+1$ siendo M un submódulo de $P_{n-1,1}^{\mathrm{gr}}(A)$ y φ un endomorfismo de $\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}$ con $X = Y \cup Z$. Para todo $i = 0, \cdots, q$ construyamos las siguientes tablas:

$$T_\lambda^{(i)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & p & \ell_1 & \ell_2 & \cdots & \ell_q \\ \hline n-p+1 & n-p+2 & \cdots & n & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-4}\end{array} \tag{3.18}$$

con $\ell_1, \cdots, \ell_q \in \{p+1, \cdots, p+q+1\} \backslash \{p+i+1\}$, $\ell_1 < \cdots < \ell_q$, y

$$T_\mu^{(i)} = \boxed{i+p+1}.$$

Sea

$$\varphi : \frac{\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}}{\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)} \longrightarrow \frac{\mathbb{F}\langle X\rangle^{\mathrm{gr}}}{\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)}$$

el homomorfismo de álgebras tal que

$$\begin{aligned} \varphi(y_1) =& \varphi(y_2) = \cdots = \varphi(y_{\ell_q}) = y_1 \\ \varphi(y_{n-p+1}) =& \varphi(y_{n-p+2}) = \cdots = \varphi(y_n) = y_2 \\ & \varphi(z) = z. \end{aligned}$$

para cualesquier $y_1, \cdots, y_n \in M$. De esta manera, las variables asociadas a la primera fila colapsan en y_1 y las asociadas a la segunda fila colapsan en y_2; luego a las tablas $T_\lambda^{(i)}$, $T_\mu^{(i)}$, asociamos el polinomio

$$a_{p,q}^{(i)}(y_1, y_2, z) = \sum_{\sigma_1, \cdots, \sigma_p \in S_2} \mathrm{sgn}(\sigma_1) \cdots \mathrm{sgn}(\sigma_p)\, y_1^i y_{\sigma_1(1)} \cdots y_{\sigma_p(1)}\, z\, y_{\sigma_1(2)} \cdots y_{\sigma_p(2)} y_1^{q-i}.$$

o de manera equivalente,

$$a_{p,q}^{(i)}(y_1, y_2, z) = y_1^i \underbrace{\overline{y}_1 \cdots \widetilde{y}_1}_{p} \; z \; \underbrace{\overline{y}_2 \cdots \widetilde{y}_2}_{p} \; y_1^{q-i},$$

donde, como se vio en el Ejemplo 3.3.18, los símbolos $-$ y $\widetilde{\ }$ representan alternancia entre las correspondientes variables. Aquí el polinomio $a_{p,q}^{(i)}(y_1, y_2, z)$ se asocia al polinomio generado por el idempotente esencial $e_{T_\lambda^{(i)}} e_{T_\mu^{(i)}}$ ligado a la pareja de tablas $(T_\lambda^{(i)}, T_\mu^{(i)})$, tras identificar todos los elementos en cada fila de T_λ (ver Ejemplo 3.3.18).

A continuación comprobaremos que, mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$, los $q+1$ polinomios $a_{p,q}^{(i)}(y_1, y_2, z)$, son linealmente independientes sobre $\mathbb{F}$. Sea

$$\sum_{i=0}^{q} \alpha_i a_{p,q}^{(i)}(y_1, y_2, z) = 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)),$$

una combinación lineal nula de estos polinomios; queremos ver que $\alpha_i = 0$ para todo $i = 0, \cdots, q$. Si $0 \le t \le q$ entonces,

$$\alpha_t a_{p,q}^{(t)}(y_1, y_2, z) + \sum_{i \neq t} \alpha_i a_{p,q}^{(i)}(y_1, y_2, z) = 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)).$$

o de manera equivalente,

$$\alpha_t \; y_1^t \underbrace{\overline{y}_1 \cdots \widetilde{y}_1}_{p} \; z \; \underbrace{\overline{y}_2 \cdots \widetilde{y}_2}_{p} y_1^{q-t} + \sum_{i \neq t} \alpha_i \; y_1^i \underbrace{\overline{y}_1 \cdots \widetilde{y}_1}_{p} \; z \; \underbrace{\overline{y}_2 \cdots \widetilde{y}_2}_{p} y_1^{q-i} = 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)).$$

Sustituyendo y_1 por $y_1 + y_3$ tenemos

$$\begin{aligned} &\alpha_2 \; (y_1+y_3)^t \overline{(y_1+y_3)} \cdots (\widetilde{y_1+y_3}) \; z \; \overline{y}_2 \cdots \widetilde{y}_2 \\ &+ \sum_{i \neq t} \alpha_i \; (y_1+y_3)^i \overline{(y_1+y_3)} \cdots (\widetilde{y_1+y_3}) \; z \; \overline{y}_2 \cdots \widetilde{y}_2 (y_1+y_3)^{q-i} = 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)); \end{aligned} \tag{3.19}$$

al desarrollar cada uno de los binomios y reorganizar de acuerdo al grado de la variable y_1 encontramos una expresión del tipo

$$\sum_{j=0}^{p+q} f_j(y_1, y_2, y_3, z) = 0 \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)),$$

donde los f_j son las componentes homogéneas de grado j en la variable y_1. Al evaluar de la forma $y_1 = E_{11}$, $y_2 = y_3 = E_{22}$ y $z = E_{12}$, los únicos monomios que no se anulan mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$, son los de grado $p+t$ en la variable y_1 y $q-t$ en la variable y_3. De esta manera obtenemos que $f_p = \alpha_0 E_{12}$, $f_{p+1} = \alpha_1 E_{12}, \cdots, f_{p+q} = \alpha_q E_{12}$ (ver Ejemplo 3.3.23); pero por la Proposición 1.3.21, tenemos que $f_j = 0$ (mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$) para cada $j = 0, \cdots, p+q$, luego $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$, y tenemos que los $q+1$ polinomios de la forma $a^{(i)}_{p,q}(y_1, y_2, z)$, son linealmente independientes.

Ahora queremos ver que los $q+1$ polinomios de la forma $a^{(i)}_{p,q}(y_1, y_2, z)$, generan a $\varphi(M)$. Sean T_λ y T_μ un par de tablas cualesquiera de forma λ y μ respectivamente. Para cualquier $g(y_1, y_2, z) \in \varphi(M)$ tenemos que $g = \varphi(f)$ para algún $f(y_1, \cdots, y_{n-1}, z) \in M$. Como $f \in M$, entonces f es generado por el idempotente esencial $e_{T^{(i)}_\lambda} e_{T^{(i)}_\mu}$, y en la tabla (3.18) se forman p parejas de variables alternantes en f.

Si $g = \varphi(f) \in \langle z_1 z_2, [y_1, y_2] \rangle_{\mathrm{T}_2}$, entonces $g \equiv 0$ mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$, luego g es una combinación lineal trivial de los polinomios $a^{(i)}_{p,q}(y_1, y_2, z)$. Si $g \notin \langle z_1 z_2, [y_1, y_2] \rangle_{\mathrm{T}_2}$, entonces cualesquier dos variables alternantes entre si deben estar en lados diferentes de la z o de lo contrario, $g \equiv 0$ mod $\mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$ (ver Ejemplos 3.3.15 y 3.3.16). De esta manera g es una combinación lineal de polinomios que alternan en un número p de parejas y_i's alrededor de la z; esto es, g se escribe como una combinación lineal de elementos de la forma

$$y_1^i \underbrace{\overline{y}_1 \cdots \widetilde{y}_1}_{p} \, z \, \underbrace{\overline{y}_2 \cdots \widetilde{y}_2}_{p} \, y_1^{q-i}, \quad i = 0, \cdots, q.$$

De esta manera, para un par de particiones $\lambda = (p+q, q)$ y $\mu = (1)$ cualesquiera, los $q+1$ polinomios $a^{(i)}_{p,q}(y_1, y_2, z)$ forman una base para $\varphi(M)$ y por el Teorema 3.3.28, concluimos que $m_{\lambda,\mu} = \dim\, \varphi(M) = q+1$. ■

3.3.6. Algunos invariantes numéricos

A fin de calcular el crecimiento exponencial de la secuencia de codimensiones graduadas de $UT_2(\mathbb{F})$ definimos lo siguiente:

Definición 3.3.34. Dada A una PI-álgebra graduada, el **exponente** (o PI-exponente) de A es

$$\exp^{\mathrm{gr}}(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c^{\mathrm{gr}}_n(A)}. \tag{3.20}$$

Otra secuencia numérica de interés en el estudio de las identidades graduadas de un álgebra, es la de las colongitudes. Sea

$$\chi_n^{\mathrm{gr}}(A) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} m_{\lambda,\mu}\, \chi_{\lambda,\mu}$$

la descomposición de $\chi_n^{\mathrm{gr}}(A)$ en caracteres irreducibles de H_n. Entonces tenemos lo siguiente:

Definición 3.3.35. Al número

$$l_n^{\mathrm{gr}}(A) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} m_{\lambda,\mu},$$

se le conoce como la ***n*-ésima colongitud** graduada de A.

De esta manera, $l_n^{\mathrm{gr}}(A)$ cuenta la cantidad de submódulos irreducibles que aparecen en la descomposición de $P_n^{\mathrm{gr}}(A)$.

Corolario 3.3.36. Para $A = UT_2(\mathbb{F})$ y $n \geq 1$, tenemos:

(1) $\exp^{\mathrm{gr}}(A) = 2$

(2) Para todo $n \geq 1$, $l_n^{\mathrm{gr}}(A) = \begin{cases} \dfrac{n^2+2n+5}{4} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ \dfrac{n^2+2n+4}{4} & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$

Demostración. (1) De la Definición 3.3.34 y la Ecuación (3.9) tenemos:

$$\begin{aligned} \ln(\exp^{\mathrm{gr}}(A)) &= \ln\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+n2^{n-1}}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \ln(1+n2^{n-1})^{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+n2^{n-1})}{n}, \end{aligned}$$

aplicando regla de L'hopital tenemos,

$$\begin{aligned}
\ln(\exp^{\mathrm{gr}}(A)) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n2^{n-1}}(2^{n-1}+n2^{n-1}\ln 2)\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n-1}(1+n\ln 2)}{1+n2^{n-1}}\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+\ln 2}{\frac{1}{n2^{n-1}}+1}\\
&= \ln 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\exp^{\mathrm{gr}}(A) = 2$.

(2) De acuerdo con el Teorema 3.3.33, $m_{\lambda,\mu} = 0, 1$, o $q+1$ dependiendo de la forma de λ y μ. Revisemos el comportamiento de $l_n^{\mathrm{gr}}(A)$ para algunos valores de n.

Para $n = 1$, solo existen dos posibles particiones de n: $\lambda = (1)$ y $\mu = \emptyset$ y, $\lambda = \emptyset$ y $\mu = (1)$; con lo cual $q = 0$ en el segundo caso y tenemos que $q+1 = 1$. Entonces $m_{(1),\emptyset} = m_{\emptyset,(1)} = 1$; sumando ambas obtenemos, $l_1^{\mathrm{gr}}(A) = 2$.

Cuando $n = 2$, tenemos lo siguiente: $\lambda = (2)$ y $\mu = \emptyset$ con lo cual $m_{(2),\emptyset} = 1$ y, $\lambda = (1)$ y $\mu = (1)$, con lo cual $q = 1$ y $m_{(1),(1)} = 2$. De esta manera, por la Definición 3.3.35 tenemos que $l_2^{\mathrm{gr}}(A) = 3$.

Cuando $n = 3$, tenemos las siguientes posibilidades:

$$\begin{aligned}
&\lambda \vdash 3 \text{ y } \mu \vdash 0 \text{ entonces } m_{(n),\emptyset} = 1 \text{ y,}\\
&\lambda \vdash 2 \text{ y } \mu \vdash 1 \begin{cases} \lambda = (2) & \text{entonces} \quad p = 0,\ q = 2,\ m_{\lambda,\mu} = 3\\ \lambda = (1,1) & \text{entonces} \quad p = 1,\ q = 0,\ m_{\lambda,\mu} = 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Entonces $l_3^{\mathrm{gr}}(A) = 5$. Cuando $n = 4$, tenemos las siguientes posibilidades:

$$\begin{aligned}
&\lambda \vdash 4 \text{ y } \mu \vdash 0 \text{ entonces } m_{(n),\emptyset} = 1 \text{ y,}\\
&\lambda \vdash 3 \text{ y } \mu \vdash 1 \begin{cases} \lambda = (3) & \text{entonces} \quad p = 0,\ q = 3,\ m_{\lambda,\mu} = 4\\ \lambda = (2,1) & \text{entonces} \quad p = 1,\ q = 1,\ m_{\lambda,\mu} = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Entonces $l_4^{\mathrm{gr}}(A) = 7$. Cuando $n = 5$, tenemos las siguientes posibilidades:

$$\lambda \vdash 5 \text{ y } \mu \vdash 0 \text{ entonces } m_{(n),\emptyset} = 1 \text{ y},$$
$$\lambda \vdash 4 \text{ y } \mu \vdash 1 \begin{cases} \lambda = (4) & \text{entonces} \quad p = 0,\ q = 4,\ m_{\lambda,\mu} = 5 \\ \lambda = (3,1) & \text{entonces} \quad p = 1,\ q = 2,\ m_{\lambda,\mu} = 3 \\ \lambda = (2,2) & \text{entonces} \quad p = 2,\ q = 0,\ m_{\lambda,\mu} = 1 \end{cases}$$

Entonces $l_5^{\mathrm{gr}}(A) = 10$. Cuando $n = 6$, tenemos las siguientes posibilidades:

$$\lambda \vdash 6 \text{ y } \mu \vdash 0 \text{ entonces } m_{(n),\emptyset} = 1 \text{ y},$$
$$\lambda \vdash 5 \text{ y } \mu \vdash 1 \begin{cases} \lambda = (5) & \text{entonces} \quad p = 0,\ q = 5,\ m_{\lambda,\mu} = 6 \\ \lambda = (4,1) & \text{entonces} \quad p = 1,\ q = 3,\ m_{\lambda,\mu} = 4 \\ \lambda = (3,2) & \text{entonces} \quad p = 2,\ q = 1,\ m_{\lambda,\mu} = 2 \end{cases}$$

Entonces $l_6^{\mathrm{gr}}(A) = 13$. Cuando $n = 7$, tenemos las siguientes posibilidades:

$$\lambda \vdash 7 \text{ y } \mu \vdash 0 \text{ entonces } m_{(n),\emptyset} = 1 \text{ y},$$
$$\lambda \vdash 6 \text{ y } \mu \vdash 1 \begin{cases} \lambda = (6) & \text{entonces} \quad p = 0,\ q = 6,\ m_{\lambda,\mu} = 7 \\ \lambda = (5,1) & \text{entonces} \quad p = 1,\ q = 4,\ m_{\lambda,\mu} = 5 \\ \lambda = (4,2) & \text{entonces} \quad p = 2,\ q = 2,\ m_{\lambda,\mu} = 3 \\ \lambda = (3,3) & \text{entonces} \quad p = 3,\ q = 0,\ m_{\lambda,\mu} = 1 \end{cases}$$

Entonces $l_7^{\mathrm{gr}}(A) = 17$. Cuando $n = 8$, tenemos las siguientes posibilidades:

$$\lambda \vdash 8 \text{ y } \mu \vdash 0 \text{ entonces } m_{(n),\emptyset} = 1 \text{ y},$$
$$\lambda \vdash 7 \text{ y } \mu \vdash 1 \begin{cases} \lambda = (7) & \text{entonces} \quad p = 0,\ q = 7,\ m_{\lambda,\mu} = 8 \\ \lambda = (6,1) & \text{entonces} \quad p = 1,\ q = 5,\ m_{\lambda,\mu} = 6 \\ \lambda = (5,2) & \text{entonces} \quad p = 2,\ q = 3,\ m_{\lambda,\mu} = 4 \\ \lambda = (4,3) & \text{entonces} \quad p = 3,\ q = 1,\ m_{\lambda,\mu} = 2 \end{cases}$$

Entonces $l_8^{\mathrm{gr}}(A) = 21$. En general, para n impar tenemos:

$\lambda \vdash n$ y $\mu \vdash 0$ entonces $m_{(n),\emptyset} = 1$ y,

$$\lambda \vdash n-1 \text{ y } \mu \vdash 1 \begin{cases} \lambda = (n-1) & \text{entonces} \quad q = n-1,\ m_{\lambda,\mu} = n \\ \lambda = (n-2,1) & \text{entonces} \quad q = n-3,\ m_{\lambda,\mu} = n-2 \\ & \vdots \\ \lambda = \left(\frac{n-3}{2}+2, \frac{n-3}{2}\right) & \text{entonces} \quad q = 2,\ m_{\lambda,\mu} = 3 \\ \lambda = \left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right) & \text{entonces} \quad q = 0,\ m_{\lambda,\mu} = 1. \end{cases}$$

Observamos que al número $m_{(n),\emptyset} = 1$, debemos sumar los números impares desde 1 hasta n, esto es,

$$\begin{aligned} l_n^{\mathrm{gr}}(A) &= 1 + \sum_{i=0}^{(n-1)/2} (2i+1) = 2 + 2\sum_{i=1}^{(n-1)/2} i + \sum_{i=1}^{(n-1)/2} 1 \\ &= 2 + \frac{(n-1)(n+1)}{4} + \frac{n-1}{2} \\ &= \frac{n^2+2n+5}{4}. \end{aligned}$$

Para n par tenemos,

$\lambda \vdash n$ y $\mu \vdash 0$ entonces $m_{(n),\emptyset} = 1$ y,

$$\lambda \vdash n-1 \text{ y } \mu \vdash 1 \begin{cases} \lambda = (n-1) & \text{entonces} \quad q = n-1,\ m_{\lambda,\mu} = n \\ \lambda = (n-2,1) & \text{entonces} \quad q = n-3,\ m_{\lambda,\mu} = n-2 \\ & \vdots \\ \lambda = \left(\frac{n-4}{2}+3, \frac{n-4}{2}\right) & \text{entonces} \quad q = 3,\ m_{\lambda,\mu} = 4 \\ \lambda = \left(\frac{n-2}{2}+1, \frac{n-2}{2}\right) & \text{entonces} \quad q = 1,\ m_{\lambda,\mu} = 2. \end{cases}$$

Aquí observamos que al número $m_{(n),\emptyset} = 1$, debemos sumar los números pares desde 2 hasta n, esto es,

$$
\begin{aligned}
l_n^{\mathrm{gr}}(A) &= 1 + \sum_{i=1}^{n/2} 2i = 1 + \frac{n(n+2)}{4} \\
&= \frac{n^2 + 2n + 4}{4}.
\end{aligned}
\qquad \blacksquare
$$

Ejemplo 3.3.37. Para $n = 4$, con $\lambda \vdash 3$ y $\mu \vdash 1$, se obtuvo en el Ejemplo 3.3.6 que $\chi_{3,1}(A)(1) = \dim P_{3,1}(A) = 8$. Por otra parte, haciendo uso de la Ecuación (3.7), tenemos,

$$
\begin{aligned}
\chi_{3,1}(A) &= \sum_{\substack{\lambda \vdash 3 \\ \mu \vdash 1}} m'_{\lambda,\mu}(\chi_\lambda \otimes \chi_\mu) \\
&= m_{(3),(1)}(\chi_{(3)} \otimes \chi_{(1)}) + m_{(2,1),(1)}(\chi_{(2,1)} \otimes \chi_{(1)}) + \cancelto{0}{m}_{(1,1,1),(1)}(\chi_{(1,1,1)} \otimes \chi_{(1)}) \\
&= 4(\chi_{(3)} \otimes \chi_{(1)}) + 2(\chi_{(2,1)} \otimes \chi_{(1)})
\end{aligned}
$$

evaluando en 1, la identidad de S_4, de acuerdo con la Tabla (2.2), tenemos que,

$$
\begin{aligned}
\chi_{3,1}(A)(1) &= 4(\chi_{(3)}(1)\ \chi_{(1)}(1)) + 2(\chi_{(2,1)}(1)\ \chi_{(1)}(1)) \\
&= 4(1 \cdot 1) + 4(2 \cdot 1) \\
&= 8.
\end{aligned}
$$

Resultado que obtuvimos en un principio.

Ejemplo 3.3.38. para $n = 4$, de acuerdo con el Teorema 3.3.33 tenemos

$$
\begin{aligned}
\chi_4^{\mathrm{gr}}(A) &= \sum_{r=0}^{4} \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash 4-r}} m_{\lambda,\mu}\, \chi_{\lambda,\mu} \\
&= m_{(4),\emptyset}\chi_{(4),\emptyset} + m_{(3),(1)}\chi_{(3),(1)} + m_{(2,1),(1)}\chi_{(2,1),(1)}
\end{aligned}
$$

evaluando en (1) tenemos,

$$
\chi_4^{\mathrm{gr}}(A)(1) = 1\chi_{(4),\emptyset}(1) + 4\chi_{(3),(1)}(1) + 2\chi_{(2,1),(1)}(1).
$$

En el Ejemplo 3.3.14 obtuvimos que $\dim W_{(2,1),(1)} = 2$; con lo cual, $\chi_{(2,1),(1)}(1) = 2$. Por otra parte, dado que en $W_{(4),\emptyset}$ no hay variables de grado homogéneo 1 (las de Z); y que $[y_1, y_2] \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gr}}(A)$, tenemos que $\dim W_{(4),\emptyset} = 1$; en consecuencia $\chi_{(4),\emptyset}(1) = 1$. Lo que nos deja

$$\begin{aligned}\chi_4^{\mathrm{gr}}(A)(1) &= 1 + 4\chi_{(3),(1)}(1) + 2(2)\\ &= 5 + 4\chi_{(3),(1)}(1).\end{aligned}$$

En el Ejemplo 3.3.6 vimos que $\dim \chi_4^{\mathrm{gr}}(A) = 33$; por lo tanto $\dim W_{(3),(1)} = \chi_{(3),(1)}(1) = 7$.

Apéndices

Apéndice A

Espacios vectoriales

El estudio de espacios vectoriales es base fundamental para el desarrollo de este trabajo de grado en álgebras y PI-álgebras. En esta primera sección indicaremos algunos aspectos básicos de notación del álgebra lineal, proporcionados por Brown en [4], dando por sentado un conocimiento previo del lector en torno a espacios y subespacios vectoriales, bases y dimensiones, transformaciones lineales y suma directa entre espacios vectoriales, entre otros.

Definición A.0.1. Un **espacio vectorial** $(V,+)$ sobre un campo $\mathbb{F}$ es un conjunto no vacío V junto con las funciones,

$$\begin{array}{rccc} + : & V\times V & \to & V \\ & (x,y) & \mapsto & x+y \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{F}\times V & \to & V \\ & (\alpha,x) & \mapsto & \alpha x \end{array}$$

denominadas respectivamente suma vectorial y multiplicación por un escalar y que satisface los siguientes axiomas:

V1. $x+y=y+x$ para todo $x,\ y\in V$.

V2. $x+(y+z)=(x+y)+z$ para todo $x,\ y,\ z\in V$.

V3. Existe un elemento $0\in V$ tal que $0+x=x+0$ para todo $x\in V$.

V4. Para todo $x\in V$ existe $y\in V$ tal que $x+y=0$.

V5. $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$ para todo $\alpha,\ \beta\in\mathbb{F}$ y todo $x\in V$.

V6. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$ para todo $\alpha\in\mathbb{F}$ y todo $x,\ y\in V$.

V7. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ para todo $\alpha,\ \beta\in\mathbb{F}$ y todo $x\in V$.

V8. $1x = x$ para todo $x \in V$.

Definición A.0.2. Un subconjunto no vacío W de V es un **subespacio** de V si W es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma vectorial y multiplicación por un escalar de V.

Cualquier subconjunto propio S de un espacio vectorial V genera un subespacio propio natural que se denomina el $\operatorname{Span}\{S\}$, al respecto tenemos lo siguiente:

Definición A.0.3. Cualquier subconjunto S de un espacio vectorial V sobre un campo $\mathbb{F}$, determina un subespacio $\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\{S\} = \bigcap W$ donde W recorre todos los subespacios de V que contienen a S. Si el campo se sobreentiende se escribe $\operatorname{Span}\{S\}$ en lugar de $\operatorname{Span}_{\mathbb{F}}\{S\}$. A $\operatorname{Span}\{S\}$ se le conoce como el **span lineal** de S.

Sea $\mathscr{P}(V)$ la familia de todos los subconjuntos de un espacio vectorial V y sea $\mathscr{L}(V)$ el conjunto de todos los subespacios de V, entonces $\mathscr{L}(V) \subseteq \mathscr{P}(V)$ (todo subespacio de V es a su vez un subconjunto de V y no al contrario) y tenemos lo siguiente:

Teorema A.0.4. La función $\operatorname{Span} : \mathscr{P}(V) \to \mathscr{L}(V)$ satisface las siguientes propiedades:

1. Si $S = \emptyset \in \mathscr{P}(V)$ entonces $\operatorname{Span}\{S\} = \{0\}$.

2. Para todo $S \in \mathscr{P}(V)$, $\operatorname{Span}\{S\}$ es el subespacio de V conformado por todas las combinaciones lineales de vectores de S, esto es,

$$\operatorname{Span}\{S\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{F},\, x_i \in S,\, n \geq 0 \right\}.$$

Demostración.. Para probar 1, sea $x \in \operatorname{Span}\{S\}$, entonces $x \in \bigcap W$ para todo $W \in \mathscr{L}(V)$; incluso x pertenece al subespacio trivial $\{0\}$, luego x solo puede ser 0. De esta manera, $\operatorname{Span}\{S\} = \{0\}$.

Para probar 2 sea $W_0 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{F},\, x_i \in S,\, n \geq 0 \right\}$. Se trata de probar que $\operatorname{Span}\{S\} = W_0$, es decir, probar la doble contenencia entre estos dos conjuntos. Veamos primero que W_0 es un subespacio de V; dados $x,\, y \in W_0$, tenemos lo siguiente:

$$x + y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j y_j = \sum_{k=1}^{n+m} \gamma_k z_k$$

donde $k = i$ para todo $1 \leq i \leq n$ y $k = j + n$ para $1 \leq j \leq m$. De esta manera $\gamma_k \in \mathbb{F}$ y $z_k \in S$ para todo $1 \leq k \leq n + m$ y tenemos que $x + y \in W_0$. Por otra parte, para todo $\alpha \in \mathbb{F}$ tenemos lo siguiente:

$$\alpha x = \alpha \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha \alpha_i x_i$$

donde $\alpha\alpha_i \in \mathbb{F}$ y por lo tanto $\alpha x \in W_0$. De esta manera comprobamos que W_0 es subespacio de V. Por otra parte, todo $x \in S$ se puede escribir como $x = 1x$, luego $x \in W_0$ y en consecuencia $S \subseteq W_0$. Se ha comprobado entonces que W_0 es un subespacio de V que contiene a S, luego

$$\operatorname{Span}\{S\} = \bigcap_{W \in \mathscr{L}(V)} W \subseteq W_0.$$

Para revisar la contenencia recíproca, sea $x \in W_0$, luego $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ y dado que $x_i \in S$ para todo $1 \leq i \leq n$ y que $S \subseteq W$ para todo $W \in \mathscr{L}(V)$ entonces $x \in W$ para todo $W \in \mathscr{L}(V)$ tal que $S \subseteq W$, luego $x \in \bigcap W$ para todo $W \in \mathscr{L}(V)$ tal que $S \subseteq W$, y tenemos que $W_0 \subseteq \operatorname{Span}\{S\}$. De esta manera, comprobamos que $\operatorname{Span}\{S\} = W_0$. ■

Definición A.0.5. Un subconjunto S de un espacio vectorial V es **linealmente dependiente** sobre $\mathbb{F}$ si existe un subconjunto finito $\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq S$ y escalares no nulos $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ tales que $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$. S es **linealmente independiente (L.I)** sobre $\mathbb{F}$ si S no es linealmente dependiente.

Notemos que de la definición anterior se desprende que si S es linealmente independiente, entonces para cualquier combinación lineal de la forma $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ con $\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq S$ y $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ tenemos que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. La Definición A.0.5 implica que el conjunto vacío, es linealmente independiente sobre $\mathbb{F}$ (pues no existe subconjunto finito de vectores de S).

Definición A.0.6. Un subconjunto B de un espacio vectorial V es una **base** de V si B es linealmente independiente sobre $\mathbb{F}$ y $\operatorname{Span}\{B\} = V$. La cardinalidad de una base B de V se conoce como la **dimensión** de V y se denota por $\dim(V) = |B|$.

Definición A.0.7. A una función $T : V \to W$ donde V y W son espacios vectoriales, se le conoce como una **transformación lineal (homomorfismo)** si $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ para todo $\alpha,\ \beta \in \mathbb{F}$ y todo $x,\ y \in V$. Denotaremos por $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$ al conjunto de transformaciones lineales de V en W. Cuando el contexto de $\mathbb{F}$ es claro, escribimos $\operatorname{Hom}(V, W)$ en lugar de $\operatorname{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$.

Definición A.0.8. Sea $T \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, W)$. Entonces,

1. El **kernel o núcleo** de T se define como $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in V \mid T(x) = 0\}$.

2. La **imagen** de T se define como $\mathrm{Im}(T) = \{T(x) \in W \mid x \in V\}$.

3. T es inyectiva (monomorfismo) si $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.

4. T es sobreyectiva (epimorfismo) si $\mathrm{Im}(T) = W$.

5. T es biyectiva (isomorfismo) si T es inyectiva y sobreyectiva.

6. Si $V = W$ entonces se conoce a $\mathrm{End}(V)$ como las transformaciones lineales de V en V (endomorfismo), es decir, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(V, V) = \mathrm{End}(V)$. Al conjunto de isomorfismos entre V y V (automorfismo) se le conoce como $\mathrm{Aut}(V)$. De acuerdo con esta definición, $\mathrm{Aut}(V) \subseteq \mathrm{End}(V)$.

7. Se dice que V y W son isomorfos y se escribe $V \cong W$ si existe un isomorfismo entre ambos.

Definición A.0.9. Dado un espacio vectorial V, decimos que una transformación lineal $P : V \to V$ es **idempotente** si $P^2(v) = P(v)$ para todo $v \in V$.

Definición A.0.10. Dado V un espacio vectorial y $V_1, \cdots, V_n$ una familia de subespacios de V, definimos a

$$\begin{aligned} V &= \bigoplus_{i=1}^{n} V_i = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \\ &= \{v \in V \mid v = v_1 + \cdots + v_n, \text{ con } v_i \in V_i,\ i = 1, \cdots, n\}, \end{aligned}$$

como la **suma directa** de subespacios de V.

Proposición A.0.11. Si $P : V \to V$ es una transformación lineal idempotente, entonces se cumple lo siguiente:

(1) $\ker(P) \cap \mathrm{Im}(P) = \{0\}$

(2) $V = \ker(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$

Demostración. Para probar (1), sea $v \in \ker(P) \cap \mathrm{Im}(P)$ entonces $P(v) = 0$ y existe $w \in V$ tal que $P(w) = v$. Entonces,

$$0 = P(v) = P(P(w)) = P^2(w) = P(w) = v,$$

luego $\ker(P) \cap \mathrm{Im}(P) = \{0\}$.

(2) Dado $v = v_1 + v_2 \in \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$ con $v_1 \in \mathrm{Ker}(P)$ y $v_2 \in \mathrm{Im}(P)$; puesto que $\mathrm{Ker}(P)$ y $\mathrm{Im}(P)$ son subespacios de V, tenemos que $v \in V$.

Ahora; Dado $v \in V$ queremos ver que $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in \mathrm{Ker}(P)$ y $v_2 \in \mathrm{Im}(P)$. Si $v \in \mathrm{Ker}(P)$ entonces $v = v + 0$ y terminamos. Si $v \notin \mathrm{Ker}(P)$ entonces existe $w \in V$, $w \neq 0$, tal que $P(v) = w$. Luego tenemos que $P(v) = P^2(v) = P(w)$, o de manera equivalente $P(v - w) = 0$, con lo cual $v - w \in \mathrm{Ker}(P)$. De esta manera tenemos que $v = v - w + w$, con $v_1 = v - w \in \mathrm{Ker}(P)$ y $v_2 = w \in \mathrm{Im}(P)$. Por lo tanto $V = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$. ∎

Apéndice B
Grupos

Igual que en la sección anterior, asumimos que el lector está familiarizado con algunas nociones básicas en teoría de Grupos; a continuación presentamos algunas de estas definidas por Fraleigh en [13]:

Definición B.0.1. Un **grupo** $(G, \cdot)$ es un conjunto G, junto con una operación binaria $\cdot$ en G, tal que se satisfacen los siguientes axiomas:

G1. $g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$ para todo $g_1, g_2, g_3 \in G$;

G2. existe un elemento $e \in G$ tal que $g \cdot e = e \cdot g = g$ para todo $g \in G$, (e es el **elemento identidad** de G);

G3. Para cada $g \in G$ existe un elemento $g' \in G$ tal que $g \cdot g' = g' \cdot g = e$ (g' es el **elemento inverso** de g).

Para simplificar la notación escribiremos (en el desarrollo de este texto) $g_1 g_2$ en lugar de $g_1 \cdot g_2$. Si además se cumple la propiedad de conmutatividad, esto es,

G4. $g_1 g_2 = g_2 g_1$ para todo $g_1, g_2 \in G$,

decimos que G es conmutativo o **abeliano**.

De acuerdo con la Definición A.0.1, notemos que un espacio vectorial $(V, +)$ es un grupo con algunas propiedades adicionales. A continuación definimos algunos grupos importantes para el desarrollo de este trabajo:

Definición B.0.2. Si A es el conjunto finito $\{1,\ 2, \cdots,\ n\}$, entonces el grupo de todas las permutaciones de elementos de A es conocido como el **grupo simétrico** S_n. Es bien conocido que S_n tiene $n! = 1 \cdot 2 \cdots (n-1)n$ elementos.

Un grupo puede determinar un espacio vectorial como mostramos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo B.0.3. Dado un grupo finito G y un campo $\mathbb{F}$, el espacio $\mathbb{F}G$ definido por todas las posibles combinaciones lineales de elementos de G, esto es,

$$\mathbb{F}G = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i g_i \mid a_i \in \mathbb{F},\ g_i \in G \right\};$$

es un espacio vectorial conocido como "álgebra de grupo". La base para $\mathbb{F}G$ son todos los elementos de G.

Otros grupos importantes son:

Definición B.0.4.

1. $\mathrm{GL}(V) = \{T \in \mathrm{End}(V) \mid T \text{ es biyectiva}\}$ es el grupo de endomorfismos biyectivos de V.

2. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}) = \{A \in M_n(\mathbb{F}) \mid A \text{ es invertible}\}$. Es el grupo de matrices invertibles de tamaño n con entradas en el campo $\mathbb{F}$.

Clases de conjugación

Dado G un grupo, podemos definir en G una relación de equivalencia $\equiv$ tal que

$$g \equiv h \quad \text{si y solo si} \quad g = aha^{-1} \tag{B.1}$$

para algún $a \in G$.

Comprobemos que $\equiv$ es una relación de equivalencia.

(1) **Reflexiva:** $g \equiv g$ pues $g = 1g1^{-1}$.

(2) **Simétrica:** Si $g \equiv h$ entonces existe $a \in G$ tal que $g = aha^{-1}$; luego $h = a^{-1}ga$. Tomando $b = a^{-1}$ obtenemos $h = bgb^{-1}$, y en consecuencia $h \equiv g$.

(3) **Transitiva:** Si $g \equiv h$ y $h \equiv f$ entonces existen $a,\ b \in G$ tal que $g = aha^{-1}$ y $h = bfb^{-1}$. Luego

$$g = a(bfb^{-1})a^{-1} = abfb^{-1}a^{-1} = abf(ab)^{-1},$$

tomando $c = ab$ tenemos que $g = cfc^{-1}$ o de manera equivalente, $g \equiv f$. ■

Definición B.0.5. La Ecuación (B.1) define una clase llamada **clase de conjugación**

De acuerdo con la Definición 1.1.9, para algún grupo G, la clase de g en $G/\equiv$ viene dada por:

$$\overline{g} = \{h \in G \mid g \equiv h\} = \{h \in G \mid g = aha^{-1} \text{ para algún } a \in G\}.$$

Ejemplo B.0.6. Sea $S_3 = \{(1), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$. Al realizar el cociente $S_3/\equiv$ obtenemos las clases de conjugación de S_3. Por ejemplo, los elementos de la clase de conjugación de S_2 son los siguientes:

$$\begin{aligned}
(1)(1\ 2)(1) &= (1\ 2),\\
(1\ 3)(1\ 2)(1\ 3) &= (2\ 3),\\
(2\ 3)(1\ 2)(2\ 3) &= (1\ 3),\\
(1\ 2\ 3)(1\ 2)(1\ 3\ 2) &= (2\ 3),\\
(1\ 3\ 2)(1\ 2)(1\ 2\ 3) &= (1\ 3).
\end{aligned}$$

Con lo cual

$$\overline{(1\ 2)} = \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}.$$

De hecho la clase de conjugación de una permutación dada está compuesta por todas las permutaciones del mismo tipo. En este ejemplo tenemos que:

$$\begin{aligned}
\overline{(1)} &= \{(1)\},\\
\overline{(1\ 2)} &= \{(1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\},\\
\overline{(1\ 2\ 3)} &= \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}.
\end{aligned}$$

Ejemplo B.0.7. Para S_4 obtenemos:

$$\begin{aligned}
\overline{(1)} &= \{(1)\},\\
\overline{(1\ 2)} &= \{(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4), (2\ 3), (2\ 4), (3\ 4)\},\\
\overline{(1\ 2\ 3)} &= \{(1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\},\\
\overline{(1\ 2\ 3\ 4)} &= \{(1\ 2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4\ 3), (1\ 3\ 2\ 4), (1\ 3\ 4\ 2), (1\ 4\ 2\ 3), (1\ 4\ 3\ 2)\},\\
\overline{(1\ 2)(3\ 4)} &= \{(1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}.
\end{aligned}$$

Bibliografía

[1] Agudelo, N. Algebras G-graduadas sobre grupos abelianos finitos. *Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín* (2009). Trabajo de grado de Maestría.

[2] Bahturin, Y., Sehgal, S., and Zaicev, M. Group gradings on associative algebras. *Journal of Algebra 241*, 2 (2001), 677–698.

[3] Birkhoff, G. On the structure of abstract algebras. In *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society* (1935), vol. 31, Cambridge University Press, pp. 433–454.

[4] Brown, W. *A second course in linear algebra*. John Wiley & Sons, Inc., 1988.

[5] Carini, L. The cocharacter sequence of the finite dimensional Grassmann algebra. *Linear and Multilinear Algebra 23*, 2 (1988), 131–137.

[6] Centrone, L. Ordinary and $\mathbb{Z}_2$-Graded cocharacters of $UT_2(E)$. *Communications in Algebra 39*, 7 (2011), 2554–2572.

[7] Centrone, L., and Martino, F. A note on cocharacter sequence of Jordan upper triangular matrix algebra. *Communications in Algebra 45*, 4 (2017), 1687–1695.

[8] Di Vincenzo, M. O., Koshlukov, P., and Valenti, A. Gradings on the algebra of upper triangular matrices and their graded identities. *Journal of Algebra 275*, 2 (2004), 550–566.

[9] Drensky, V. *Free algebras and PI-algebras: graduate course in algebra*. Springer Verlag, 2000.

[10] Drensky, V., and Giambruno, A. Cocharacters, codimensions and Hilbert series of the polynomial identities for 2×2 matrices with involution. *Canadian Journal of Mathematics 46*, 4 (1994), 718–733.

[11] Estrada, A. *Specht property and rational Hilbert series for superalgebras with superinvolution and algebras with Hopf algebra action*. PhD thesis, [sn], 2022.

[12] Etingof, P., Golberg, O., Hensel, S., , Liu, T., Schwendner, A., Vaintrob, D., and Yudovina, E. *Introduction to representation theory*, vol. 59. American Mathematical Society, 2011.

[13] Fraleigh, J. *A first course in abstract algebra*. Cambridge University Press, 1989.

[14] Giambruno, A., and Zaicev, M. On codimension growth of finitely generated associative algebras. *Advances in Mathematics 140*, 2 (1998), 145–155.

[15] Giambruno, A., and Zaicev, M. Exponential codimension growth of PI- algebras: an exact estimate. *Advances in Mathematics 142*, 2 (1999), 221–243.

[16] Giambruno, A., and Zaicev, M. *Polynomial identities and asymptotic methods*. American Mathematical Society, 2005.

[17] Herstein, I. *Noncommutative rings*, vol. 15. American mathematical society, 1994.

[18] Hungerford, T. W. *Algebra*, vol. 73. Springer Science & Business Media, 2012.

[19] Jacobson, N. PI-algebras. In *PI-Algebras*. Springer, 1975, pp. 11–66.

[20] Kaplansky, I. Rings with a polynomial identity. *Bull. Amer. Math Society 54* (1948), 496–500.

[21] Kemer, A. *Ideals of identities of associative algebras*. American Mathematical Soc., 1991.

[22] Kemer, A. R. Solution of the problem as to whether associative algebras have a finite basis of identities. In *Doklady Akademii Nauk* (1988), vol. 298, Russian Academy of Sciences, pp. 273–277.

[23] Regev, A. Existence of polynomial identities in $A \otimes_{\mathbb{F}} B$. *Bulletin of the American Mathematical Society 77* (1971).

[24] Regev, A., and Amitsur, S. Pi-algebras and their cocharacters. *Journal of Algebra 78*, 1 (1982), 248–254.

[25] Silva, D. *Algebras graduadas e identidades polinomiais graduadas*. PhD thesis, Dissertaçao de mestrado, UNICAMP, 2007.

[26] Specht, W. Gesetze in ringen. i. *Mathematische Zeitschrift 52*, 1 (1950), 557–589.

[27] Urure, R., and Gouveia, T. Superidentities for the algebras ut_2 and ut_3 on a finite field. *arXiv preprint arXiv:2105.03359* (2021).

[28] Valenti, A. The graded identities of upper triangular matrices of size two. *Journal of Pure and Applied Algebra 172*, 2-3 (2002), 325–335.

[29] Valenti, A., and Zaicev, M. Group gradings on upper triangular matrices. *Archiv der Mathematik 89*, 1 (2007), 33–40.

[30] Wall, C. Graded algebras, anti-involutions, simple groups and symmetric spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society 74*, 1 (1968), 198–202.

[31] Wisbauer, R. *Modules and Algebras: Bimodule Structure on Group Actions and Algebras*, vol. 81. CRC Press, 1996.

Índice de Términos