

# SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE RUTEO DE VEHÍCULOS CON RESTRICCIONES DE CAPACIDAD CONSIDERANDO DEMANDA ESTOCÁSTICA - CVRPSD



Universidad  
Tecnológica  
de Pereira

Elaborado por:  
Andrés Mauricio Mena Ríos

Presentado como requisito para  
optar al título de Ingeniero Industrial

Dirigido por:  
Ph.D. en Ingeniería: Eliana Mirledy Toro Ocampo

Universidad Tecnológica de Pereira  
Facultad de Ciencias Empresariales  
Programa de Ingeniería Industrial  
2020

# Agradecimientos

Deseo expresar mi profundo agradecimiento a:

- Mi familia, por su amor y estímulo constante, ieste logro también es de ustedes!
- A Eliana Toro, mi directora de trabajo de grado, por su acompañamiento incondicional durante la realización de este proyecto.
- A la Universidad Tecnológica de Pereira, por brindarme los espacios y herramientas para mi desarrollo profesional.
- A todos mis maestros, por los diferentes conocimientos transmitidos.

# Índice general

Índice general	IV
Índice de figuras	X
Índice de tablas	XI
1. Resumen	1
2. Introducción	2
3. Área de Investigación	5
4. Materias de Investigación	8
5. Alcances	10
6. Problematización	12
6.1. Formulación . . . . .	12
6.2. Sistematización . . . . .	12
7. Justificación	13
8. Objetivos	15

8.1. General	15
8.2. Específicos	15
<b>9. Marcos de referencia</b>	<b>16</b>
9.1. Marco Teórico	16
9.1.1. Travelling Salesman Problem	16
9.1.2. Capacitated Vehicle Routing Problem	19
9.1.3. Capacitated Location-Routing Problem with Private Fleet and Common Carrier	20
9.1.4. Capacitated Vehicle Routing Problem con Modelamiento Flexible	23
9.1.5. Capacitated Vehicle Routing Problem Stochastic Demand	24
9.1.6. Wait-and-see	26
9.1.7. Solución de Valor Esperado	28
9.1.8. Solución de Recurso	29
9.1.9. Método L-Shaped	32
9.1.10. Distribución de probabilidad Poisson	35
9.2. Marco Conceptual	37
9.2.1. Depósito	37
9.2.2. Función Objetivo	37
9.2.3. Grafo	37
9.2.4. NP-Hard	37
9.2.5. Longitud de ruta	38
9.2.6. Restricciones	38
9.2.7. Variables de decisión	38

9.3. Marco Espacial . . . . .	39
9.4. Marco Temporal . . . . .	39
<b>10. Metodología</b>	<b>40</b>
10.1. Tipo de estudio y diseño de la investigación . . . . .	40
10.2. Fuentes y técnicas para la recolección de información . . . . .	41
<b>11. Variables</b>	<b>42</b>
<b>12. Generación de escenarios</b>	<b>44</b>
<b>13. Casos de prueba</b>	<b>46</b>
13.1. Generalidades . . . . .	46
13.2. P-n16-k8 . . . . .	48
13.3. P-n19-k2 . . . . .	51
13.4. P-n20-k2 . . . . .	54
13.5. P-n21-k2 . . . . .	57
13.6. P-n22-k2 . . . . .	60
13.7. P-n22-k8 . . . . .	63
13.8. P-n23-k8 . . . . .	66
13.9. P-n40-k5 . . . . .	69
13.10. P-n45-k5 . . . . .	72
<b>14. Resultados</b>	<b>75</b>
14.1. Resultados Generales . . . . .	76
14.2. P-n16-k8 . . . . .	78

14.3.P-n19-k2 . . . . .	85
14.4.P-n20-k2 . . . . .	90
14.5.P-n21-k2 . . . . .	97
14.6.P-n22-k2 . . . . .	101
14.7.P-n22-k8 . . . . .	107
14.8.P-n23-k8 . . . . .	112
14.9.P-n40-k5 . . . . .	119
14.10.P-n45-k5 . . . . .	127
<b>15.Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>134</b>
15.1.Conclusiones . . . . .	134
15.2.Trabajos futuros . . . . .	135
<b>16.Anexos</b>	<b>136</b>
16.1.Código graficador de nodos . . . . .	136
16.2.Código generador de aleatorios . . . . .	137
16.3.Código graficador de resultados . . . . .	138
16.4.Código graficador de trazado de rutas . . . . .	140
<b>Bibliografía</b>	<b>142</b>

# Índice de figuras

2.1. Vista superior del dodecaedro de Hamilton . . . . .	2
2.2. Solución a la instancia con 49 ciudades . . . . .	3
3.1. Ubicación de la función logística en el organigrama de la empresa . . . . .	6
3.2. Funciones del área logística según el tipo de actividad . . . . .	7
7.1. Componentes del costo logístico . . . . .	13
9.1. Representación gráfica del VRP . . . . .	24
9.2. Soluciones del Wait-and-see . . . . .	27
9.3. Solución de Valor Esperado . . . . .	28
9.4. Recorrido efectivo si la ruta del TSP se planifica en sentido opuesto . . . . .	29
9.5. Recorrido efectivo si se planifica una ruta de recurso óptimo . . . . .	31
10.1. Etapas del proceso cuantitativo . . . . .	41
12.1. Diagrama de flujo para la generación de escenarios . . . . .	45
13.1. Ubicación de nodos de la instancia P-n16-k8 . . . . .	48
13.2. Trazado de rutas para la instancia P-n16-k8 . . . . .	50
13.3. Ubicación de nodos de la instancia P-n19-k2 . . . . .	51

13.4.Trazado de rutas para la instancia P-n19-k2 . . . . .	53
13.5.Ubicación de nodos de la instancia P-n20-k2 . . . . .	54
13.6.Trazado de rutas para la instancia P-n20-k2 . . . . .	56
13.7.Ubicación de nodos de la instancia P-n21-k2 . . . . .	57
13.8.Trazado de rutas para la instancia P-n21-k2 . . . . .	59
13.9.Ubicación de nodos de la instancia P-n22-k2 . . . . .	60
13.10Trazado de rutas para la instancia P-n22-k2 . . . . .	62
13.11Ubicación de nodos de la instancia P-n22-k8 . . . . .	63
13.12Trazado de rutas para la instancia P-n22-k8 . . . . .	65
13.13Ubicación de nodos de la instancia P-n23-k8 . . . . .	66
13.14Trazado de rutas para la instancia P-n23-k8 . . . . .	68
13.15Ubicación de nodos de la instancia P-n40-k5 . . . . .	69
13.16Trazado de rutas para la instancia P-n40-k5 . . . . .	71
13.17Ubicación de nodos de la instancia P-n45-k5 . . . . .	72
13.18Trazado de rutas para la instancia P-n45-k5 . . . . .	74
14.1.Valores de la función objetivo en la instancia P-n16-k8 para 100 escenarios es- tocásticos . . . . .	79
14.2.Valores de la función objetivo en la instancia P-n16-k8 con respecto al tiempo de procesamiento . . . . .	79
14.3.Diagrama de caja de los valores de la función objetivo en la instancia P-n16-k8 . . . . .	80
14.4.Histograma de los valores de la función objetivo de la instancia P-n16-k8 para 100 escenarios estocásticos . . . . .	80
14.5.Diagrama de caja del tiempo de procesamiento de la instancia P-n16-k8 . . . . .	81
14.6.Trazado de rutas para P-n16-k8-n9-d45 . . . . .	82

14.7. Trazado de rutas para P-n16-k8-n4-d6, P-n16-k8-n9-d17 y P-n16-k8-n9-d18 . . . . .	83
14.8. Trazado de rutas para P-n16-k8-n16-d16 . . . . .	84
14.9. Valores de la función objetivo en la instancia P-n19-k2 para 100 escenarios estocásticos . . . . .	85
14.10. Valores de la función objetivo en la instancia P-n19-k2 con respecto al tiempo de procesamiento . . . . .	86
14.11. Diagrama de caja de los valores de la función objetivo en la instancia P-n19-k2 . . . . .	86
14.12. Histograma de los valores de la función objetivo de la instancia P-n19-k2 para 100 escenarios estocásticos . . . . .	87
14.13. Diagrama de caja del tiempo de procesamiento de la instancia P-n19-k2 . . . . .	87
14.14. Trazado de rutas para P-n19-k2-n3-d28 . . . . .	88
14.15. Trazado de rutas para P-n19-k2-n17-d29 . . . . .	89
14.16. Valores de la función objetivo en la instancia P-n20-k2 para 100 escenarios estocásticos . . . . .	91
14.17. Valores de la función objetivo en la instancia P-n20-k2 con respecto al tiempo de procesamiento . . . . .	91
14.18. Diagrama de caja de los valores de la función objetivo en la instancia P-n20-k2 . . . . .	92
14.19. Histograma de los valores de la función objetivo de la instancia P-n20-k2 para 100 escenarios estocásticos . . . . .	92
14.20. Diagrama de caja del tiempo de procesamiento de la instancia P-n20-k2 . . . . .	93
14.21. Trazado de rutas para P-n20-k2-n14-d0 . . . . .	94
14.22. Trazado de rutas para P-n20-k2-n8-d25 . . . . .	95
14.23. Trazado de rutas para P-n20-k2-n9-d45 . . . . .	96
14.24. Valores de la función objetivo en la instancia P-n21-k2 para 100 escenarios estocásticos . . . . .	97
14.25. Valores de la función objetivo en la instancia P-n21-k2 con respecto al tiempo de procesamiento . . . . .	98

14.26	Diagrama de caja de los valores de la función objetivo en la instancia P-n21-k2 . . . . .	98
14.27	Histograma de los valores de la función objetivo de la instancia P-n21-k2 para 100 escenarios estocásticos . . . . .	99
14.28	Diagrama de caja del tiempo de procesamiento de la instancia P-n21-k2 . . . . .	99
14.29	Trazado de rutas para P-n22-k2 en todos los escenarios estocásticos . . . . .	100
14.30	Valores de la función objetivo en la instancia P-n22-k2 para 100 escenarios estocásticos . . . . .	101
14.31	Valores de la función objetivo en la instancia P-n22-k2 con respecto al tiempo de procesamiento . . . . .	102
14.32	Diagrama de caja de los valores de la función objetivo en la instancia P-n22-k2 . . . . .	102
14.33	Histograma de los valores de la función objetivo de la instancia P-n22-k2 para 100 escenarios estocásticos . . . . .	103
14.34	Diagrama de caja del tiempo de procesamiento de la instancia P-n22-k2 . . . . .	103
14.35	Trazado de rutas para P-n22-k2-n14-d0 . . . . .	104
14.36	Trazado de rutas para P-n22-k2-n21-d16 . . . . .	105
14.37	Trazado de rutas para P-n22-k2-n19-d29 . . . . .	106
14.38	Valores de la función objetivo en la instancia P-n22-k8 para 100 escenarios estocásticos . . . . .	107
14.39	Valores de la función objetivo en la instancia P-n22-k8 con respecto al tiempo de procesamiento . . . . .	108
14.40	Diagrama de caja de los valores de la función objetivo en la instancia P-n22-k8 . . . . .	108
14.41	Histograma de los valores de la función objetivo de la instancia P-n22-k8 para 100 escenarios estocásticos . . . . .	109
14.42	Diagrama de caja del tiempo de procesamiento de la instancia P-n22-k8 . . . . .	109
14.43	Trazado de rutas para P-n22-k8-n6-d2204 . . . . .	110
14.44	Trazado de rutas para P-n22-k8-n9-d92 . . . . .	111

14.45	Valores de la función objetivo en la instancia P-n23-k8 para 100 escenarios estocásticos . . . . .	113
14.46	Valores de la función objetivo en la instancia P-n23-k8 con respecto al tiempo de procesamiento . . . . .	113
14.47	Diagrama de caja de los valores de la función objetivo en la instancia P-n23-k8 . . . . .	114
14.48	Histograma de los valores de la función objetivo de la instancia P-n23-k8 para 100 escenarios estocásticos . . . . .	114
14.49	Diagrama de caja del tiempo de procesamiento de la instancia P-n23-k8 . . . . .	115
14.50	Diagrama de dispersión del tiempo de procesamiento con respecto al GAP relativo para P-n23-k8 . . . . .	115
14.51	Trazado de rutas para P-n23-k8-n3-d23 . . . . .	116
14.52	Trazado de rutas para P-n23-k8-n18-d34 . . . . .	117
14.53	Trazado de rutas para P-n23-k8-n18-d27 . . . . .	118
14.54	Valores de la función objetivo en la instancia P-n40-k5 para 100 escenarios estocásticos . . . . .	120
14.55	Valores de la función objetivo en la instancia P-n40-k5 con respecto al tiempo de procesamiento . . . . .	120
14.56	Diagrama de caja de los valores de la función objetivo en la instancia P-n40-k5 . . . . .	121
14.57	Histograma de los valores de la función objetivo de la instancia P-n40-k5 para 100 escenarios estocásticos . . . . .	121
14.58	Diagrama de caja del tiempo de procesamiento de la instancia P-n40-k5 . . . . .	122
14.59	Trazado de rutas para P-n40-k5-n7-d17 . . . . .	123
14.60	Trazado de rutas para P-n40-k5-n7-d13 . . . . .	124
14.61	Trazado de rutas para P-n40-k5-n4-d20 . . . . .	125
14.62	Trazado de rutas para P-n40-k5-n3-d42 . . . . .	126
14.63	Valores de la función objetivo en la instancia P-n45-k5 para 100 escenarios estocásticos . . . . .	128

14.64	Valores de la función objetivo en la instancia P-n45-k5 con respecto al tiempo de procesamiento . . . . .	128
14.65	Diagrama de caja de los valores de la función objetivo en la instancia P-n45-k5 .	129
14.66	Histograma de los valores de la función objetivo de la instancia P-n45-k5 para 100 escenarios estocásticos . . . . .	129
14.67	Diagrama de caja del tiempo de procesamiento de la instancia P-n45-k5 . . . . .	130
14.68	Diagrama de dispersión del tiempo de procesamiento con respecto al GAP relativo para P-n45-k5 . . . . .	130
14.69	Trazado de rutas para P-n45-k5-n36-d13 . . . . .	131
14.70	Trazado de rutas para P-n45-k5-n17-d21 . . . . .	132
14.71	Trazado de rutas para P-n45-k5-n29-d19 . . . . .	133

# Índice de tablas

5.1. Taxonomía de los problemas de ruteo de vehículos . . . . .	11
9.1. Matriz de distancias . . . . .	25
13.1. Características de la instancia P-n16-k8 . . . . .	49
13.2. Características de la instancia P-n19-k2 . . . . .	52
13.3. Características de la instancia P-n20-k2 . . . . .	55
13.4. Características de la instancia P-n21-k2 . . . . .	58
13.5. Características de la instancia P-n22-k2 . . . . .	61
13.6. Características de la instancia P-n22-k8 . . . . .	64
13.7. Características de la instancia P-n23-k8 . . . . .	67
13.8. Características de la instancia P-n40-k5 . . . . .	70
13.9. Características de la instancia P-n45-k45 . . . . .	73
14.1. Resultados generales . . . . .	77

# 1

## Resumen

Partiendo por la comprensión de diferentes modelos del problema de ruteo vehículos, entre los cuales destaca el problema del agente viajero (TSP) y el problema de ruteo de vehículos con restricciones de capacidad (CVRP), el presente proyecto busca crear múltiples instancias del CVRP a partir de casos de prueba propuestos por diferentes autores, eligiendo de forma aleatoria un cliente para cada escenario, y variando su demanda siguiendo una distribución de probabilidad Poisson, para que este dato ingrese como variable de entrada ya conocida a un modelo matemático de solución flexible y exacto, con el fin de dar solución al problema de ruteo de vehículos con restricciones de capacidad considerando demanda estocástica (CVRPSD), con el propósito de que pueda ser replicado en el futuro en ambientes organizacionales para el mejoramiento de procesos logísticos reales.

Starting from the understanding of different models of vehicle routing problems, among which the Traveling Salesman Problem (TSP) and the Capacitated Vehicle Routing Problem (CVRP), this project seeks to create multiple instances of CVRP to starting from test cases proposed by different authors, randomly choosing a customer for each scenario, and varying their demand with a Poisson probability distribution, so that this data is joined as an known input variable to a flexible and exact mathematical model, in order to solve the Capacitated Vehicle Routing Problem with Stochastic Demands (CVRPSD), with the purpose that it can be replicated in the future in organizational environments for the improvement of real logistics processes.

# 2

## Introducción

Los problemas de ruteo se remontan a 1857, año en que William Hamilton crea el juego hamiltoniano, el cual consistía en determinar la ruta a lo largo de los vértices de un dodecaedro regular, con la condición de que cada vértice podía recorrerse una única vez, y el punto de inicio y finalización del recorrido debía ser el mismo (White et al., 1905). Cada uno de los 20 puntos angulares de dicha figura, nombrados desde la A hasta la U, se pueden visualizar en el siguiente gráfico:

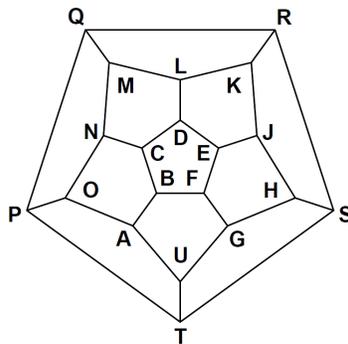


Figura 2.1: Vista superior del dodecaedro de Hamilton

El grafo descrito por el recorrido de todos los puntos apreciados en la figura 2.1 pasó a recibir el nombre de ciclo hamiltoniano, y fue uno de los puntos de partida para que Menger (1930) estudiase por primera vez el TSP en Viena y Harvard, proponiendo la siguiente definición:

«La longitud de un arco se define como el límite mínimo superior del conjunto de todos los números que se podrían obtener tomando cada conjunto finito de puntos de la curva y determinando la longitud del grafo poligonal más corto que une los puntos. A esto lo llamamos el problema del mensajero (porque en la práctica el problema debe ser resuelto por todos los carteros y también por muchos viajeros): encontrar el camino más corto que une todos los conjuntos de puntos finitos, cuyas distancias por pares son conocidas.»

Posteriormente, [Dantzing et al. \(1954\)](#) publicaron la descripción de un método para resolver el TSP e ilustraron su capacidad en la resolución de una instancia de 49 ciudades, tomando una de cada uno de los 48 estados que existían en ese momento en los Estados Unidos y agregando a Washington D.C, y cuya solución se presenta en la figura 2.2.

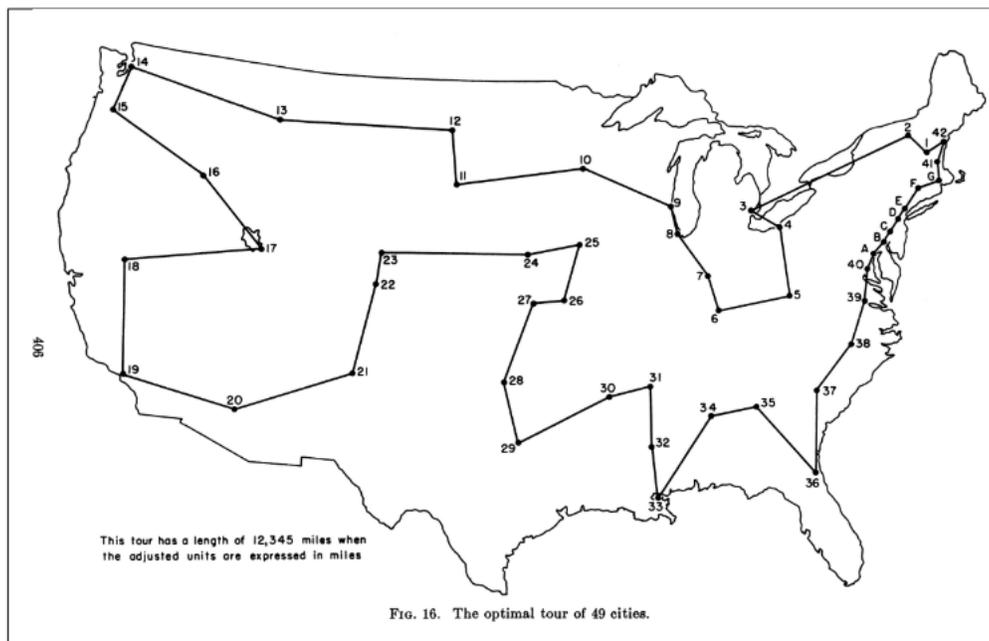


Figura 2.2: Solución a la instancia con 49 ciudades

Con el paso del tiempo, han aparecido nuevas variantes relacionadas con el ruteo de vehículos, y la taxonomía de estas pueden ser vista en la sección 5 del presente texto; una de ellas fue estudiada por primera vez por [Tillman \(1969\)](#), y es denominada «Problema de Ruteo de Vehículos con Demanda Estocástica» (CVRPSD), en la cual la demanda de los clientes es variable y sigue una distribución de probabilidad casi siempre conocida; para efectos de este proyecto, se tomará una distribución Poisson, cuyo parámetro  $\lambda$  corresponde a la demanda determinística dada para cada cliente en los casos de prueba de las librerías ya construidas por diferentes autores.

Es de mencionar que en todas las variantes, el número de posibles soluciones crece exponencialmente con el número de nodos del grafo, y rápidamente sobrepasa las capacidades de cálculo de los ordenadores más potentes ([Espinosa Téllez et al., 2016](#)).

Siendo así, surge la pregunta de: ¿Qué modelo matemático permite dar solución a instancias del problema de ruteo de vehículos considerando demanda estocástica, que pueda ser solucionado en un tiempo computacional razonable?

# 3

## Área de Investigación

El Concejo de Administración Logística (CLM) define la logística como: «El proceso de planificación, implementación y control del flujo eficiente y rentable de materias primas, inventario en proceso, embalajes y productos terminados, desde el punto de origen hasta el punto de consumo, con el fin de cumplir con los requisitos del cliente». (Khan et al., 2012)

De acuerdo con [Gómez Aparicio \(2013\)](#), el papel de la logística en el organigrama varía según el tipo de organización, su actividad, la importancia que se le conceda o el ámbito de operaciones, así como si se tienen empleados propios de la empresa para desempeñar sus actividades o estos son subcontratados; es por esto que se proponen tres posiciones diferentes, como se puede apreciar en la figura [3.1](#).

El presente trabajo de grado se dedicará exclusivamente al transporte del producto terminado al cliente, haciendo uso de la Investigación de Operaciones, sin tener en cuenta los elementos que intervinieron en la obtención del mismo, para lo cual se presenta de igual manera el organigrama del área logística, bien sea un departamento independiente o integrado a otros, de acuerdo con la figura [3.2](#).

Si bien se tendrán en consideración instancias de prueba para obtener los resultados, se pretende a futuro que el modelo sea implementado con datos de empresas reales, con el fin de que puedan implementarlo para el mejoramiento de sus procesos logísticos, garantizando la minimización de los costos de transporte y la satisfacción del cliente.

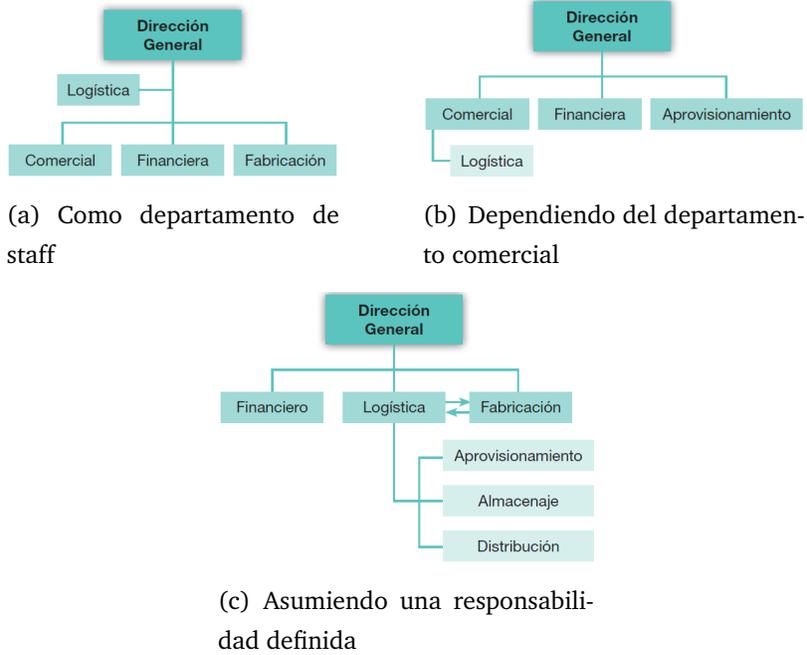


Figura 3.1: Ubicación de la función logística en el organigrama de la empresa

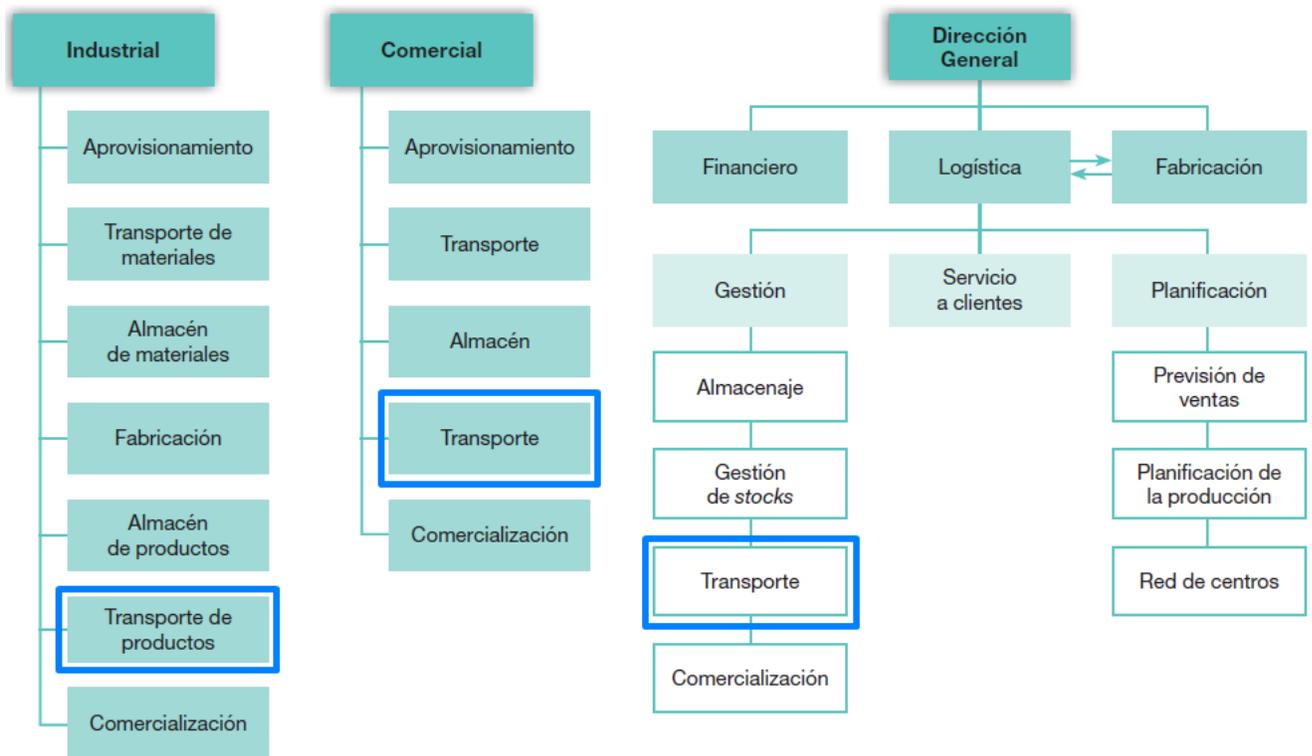


Figura 3.2: Funciones del área logística según el tipo de actividad

# 4

## Materias de Investigación

Para estructurar el presente proyecto, fue necesario adquirir saberes previos en la academia, a través de materias del núcleo de las ciencias básicas y la línea estadística de la Ingeniería Industrial; siendo así, las asignaturas que permitieron obtener los conocimientos para iniciar con la elaboración de este trabajo de grado fueron:

- Matemáticas I y II
- Informática T1 y T2
- Estadística I, II y III
- Procesos Estocásticos
- Investigación de Operaciones I y II
- Logística

Sin embargo, no es suficiente con la información impartida por los docentes, esta es simplemente el punto de partida; es por ello que se hace necesario realizar consultas exhaustivas en

metabuscadores especializados, haciendo uso de las bases de datos que la Universidad Tecnológica de Pereira ofrece para tal fin, siendo Scopus, Science Direct y SpringerLink las más empleadas, teniendo en cuenta que en conjunto permiten acceder tanto a artículos investigativos como a textos completos en el campo requerido por el presente trabajo investigativo.

# 5

## Alcances

Los problemas de ruteos de vehículos se extienden por diversas categorías, y cada combinación de unas u otras características genera un nuevo submodelo de estudio; los autores [Eksioglu et al. \(2009\)](#) se encargaron de clasificar las variantes más estudiadas y el resultado se encuentra en la tabla 5.1. El presente trabajo de grado se enmarca en la siguiente taxonomía:

Estudio con métodos exactos aplicados (1.2.1), cuyas características de escenario son: número de paradas conocido (2.1.1), sin permitir la división de carga (2.2.1), cantidad demandada estocástica (2.3.2), sin consideraciones de tiempo, por lo que las categorías 2.4, 2.5, 2.6 y 2.7 no son tomadas en cuenta, y con redes de retorno en las que la entrega o recogida se realiza de forma simultánea (2.8.1); las características físicas del problema son: simetría en la red, por tanto, se considera de un grafo no dirigido (3.1.2), con clientes ubicados en los nodos (3.2.1), con una localización mixta (3.3.3), con un único punto de origen (3.4.1) y considerando un único depósito (3.5.1), sin considerar las ventanas de tiempo (3.6), con hasta  $n$  vehículos (3.7.2), considerando sus capacidades (3.8.1) y siendo estos similares (3.9.1), sin considerar el tiempo de viaje (3.10), y con costos de transporte dependientes de la distancia (3.11.2); las características físicas de la información son: evolución estática de la información (4.1.1), con calidad estocástica (4.2.2), con disponibilidad global (4.3.2) y un procesamiento centralizado (4.4.1). Finalmente, se hace uso de datos de casos de prueba para la validación del modelo (5.1.2), sin embargo, se planteará la extracción de datos del mundo real (5.1.1).

<b>1. Tipo de estudio</b>	2.8. Redes de retorno	3.9.1. Vehículos similares
1.1. Teórico	2.8.1. Entrega y recogida simultánea	3.9.2. Vehículos con carga específica
1.2. Métodos aplicados	2.8.2. Entrega o recogida separada	3.9.3. Vehículos heterogéneos
1.2.1. Métodos exactos	2.9. Restricciones de cobertura de nodo/arco	3.9.4. Vehículos especificados por el cliente
1.2.2. Heurísticas	2.9.1. Precedencia y acoplamiento	3.10. Tiempo de viaje
1.2.3. Simulación	2.9.2. Cobertura de subconjuntos	3.10.1. Determinístico
1.2.4. En tiempo real	2.9.3. Redireccionamiento permitido	3.10.2. Dependiente del tiempo
1.3. Implementación documentada	<b>3. Características físicas del problema</b>	3.10.3. Estocástico
1.4. Encuesta, revisión o meta-investigación	3.1. Diseño de la red de transporte	3.10.4. Desconocido
<b>2. Características del escenario</b>	3.1.1. Red dirigida	3.11. Costo de transporte
2.1. Número de paradas en la ruta	3.1.2. Red no dirigida	3.11.1. Dependiente del tiempo de viaje
2.1.1. Determinística	3.2. Ubicación de los clientes	3.11.2. Dependiente de la distancia
2.1.2. Parcialmente conocida-probabilística	3.2.1. Clientes en los nodos	3.11.3. Dependiente del vehículo
2.2. Restricción de división de carga	3.2.2. Instancias de ruteo de arcos	3.11.4. Dependiente de la operación
2.2.1. División permitida	3.3. Localización geográfica de los clientes	3.11.5. En función de la tardanza
2.2.2. División no permitida	3.3.1. Urbana, siguiendo un patrón	3.11.6. Riesgo implícito o relacionado
2.3. Cantidad demandada	3.3.2. Rural, distribuidos aleatoriamente	<b>4. Características de la información</b>
2.3.1. Determinística	3.3.3. Mixta	4.1. Evolución de la información
2.3.2. Estocástica	3.4. Número de puntos de origen	4.1.1. Estática
2.3.3. Desconocida	3.4.1. Un solo origen	4.1.2. Parcialmente dinámica
2.4. Tiempo de los nuevos clientes	3.4.2. Múltiples orígenes	4.2. Calidad de la información
2.4.1. Determinístico	3.5. Número de depósitos	4.2.1. Determinística
2.4.2. Estocástico	3.5.1. Un solo depósito	4.2.2. Estocástica
2.4.3. Desconocido	3.5.2. Múltiples depósitos	4.2.3. Pronosticada
2.5. Sitio del servicio / tiempo de espera	3.6. Tipo de ventana de tiempo	4.2.4. En tiempo real
2.5.1. Determinístico	3.6.1. Restricción en los clientes	4.3. Disponibilidad de la información
2.5.2. Dependiente del tiempo	3.6.2. Restricción en las rutas	4.3.1. Local
2.5.3. Dependiente del tipo de vehículo	3.6.3. Restricción en los depósitos	4.3.2. Global
2.5.4. Estocástico	3.6.4. Restricción en los vehículos	4.4. Procesamiento de la información
2.5.5. Desconocido	3.7. Número de vehículos	4.4.1. Centralizado
2.6. Estructura de la ventana de tiempo	3.7.1. Exactamente n vehículos	4.4.2. Descentralizado
2.6.1. Ventana de tiempo suave	3.7.2. Hasta n vehículos	<b>5. Características de los datos</b>
2.6.2. Ventana de tiempo estricta	3.7.3. Número ilimitado de vehículos	5.1. Datos usados
2.6.3. Mezcla de ambas	3.8. Consideración de capacidad	5.1.1. Datos del mundo real
2.7. Horizonte de tiempo	3.8.1. Vehículos capacitados	5.1.2. Datos sintéticos
2.7.1. Periodo único	3.8.2. Vehículos no capacitados	5.1.3. Ambos
2.7.2. Múltiples periodos	3.9. Homogeneidad de los vehículos	5.2. No se usan datos

Tabla 5.1: Taxonomía de los problemas de ruteo de vehículos

# 6

## Problematización

### 6.1. Formulación

- ¿Qué modelo matemático permite dar solución a instancias del problema de ruteo de vehículos considerando demanda estocástica, que pueda ser solucionado en un tiempo computacional razonable?

### 6.2. Sistematización

- ¿Qué trabajos previos se han realizado sobre el problema de ruteo de vehículos con restricciones de capacidad en escenarios con elementos estocásticos?
- ¿Qué elementos afectan al tiempo de procesamiento durante la solución de un modelo de ruteo con demanda estocástica?
- ¿Qué tan óptimo es el modelo presentado para resolver escenarios estocásticos?

# 7

## Justificación

De acuerdo con la Encuesta Nacional Logística desarrollada en 2018, «el costo logístico está compuesto principalmente por el costo de almacenamiento, con un 46,5% de participación; y el costo de transporte, con 35,2%, representando ambos el 81,7% del costo logístico total» de las empresas encuestadas, como se puede apreciar en la figura 7.1 (Departamento Nacional de Planeación, 2018).



Figura 7.1: Componentes del costo logístico

Teniendo esto presente, es de suma necesidad brindarle a los costos de transporte la importancia que estos merecen en el proceso logístico, y su minimización es esencialmente el propósito del ruteo de vehículos; ahora bien, en concordancia con el presente proyecto, en la realidad puede suceder que, una empresa, en un día determinado, se enfrente con el problema de enviar sus productos a un grupo conocido de clientes, pero no tenga certeza de la cantidad exacta

de bienes que requieren, ya que sus necesidades pueden cambiar drásticamente desde el momento de ordenar el pedido, hasta un momento antes de despachar los vehículos repartidores, enfrentándose así a un escenario de demanda estocástica.

Considerando que ya existe un modelo matemático flexible y exacto que permite dar solución a múltiples variantes del problema de ruteo de vehículos, entre ellas, el CVRP, propuesto por [Toro Ocampo et al. \(2016\)](#), el cual solamente considera demandas ya conocidas, surge el interés de implementar dicha estructura con la consideración de demandas aleatorias que sigan una distribución de probabilidad Poisson.

# 8

## Objetivos

### 8.1. General

- Aplicar un modelo flexible y exacto de programación que permita dar solución a instancias del problema de ruteo de vehículos con restricciones de capacidad considerando demanda estocástica (CVRPSD).

### 8.2. Específicos

- Realizar una revisión del estado del arte del problema de ruteo de vehículos con restricciones de capacidad en escenarios con elementos estocásticos.
- Identificar los elementos que afectan al tiempo de procesamiento del modelo, el valor de la función objetivo y el trazado de la ruta.
- Validar el modelo empleando métodos estadísticos, y comparar los resultados obtenidos.

# 9

## Marcos de referencia

### 9.1. Marco Teórico

#### 9.1.1. Travelling Salesman Problem

Por su traducción en español: problema del agente viajero, consiste en dar solución al siguiente escenario: «un viajante quiere visitar  $n$  ciudades una y solo una vez cada una, empezando por una cualquiera de ellas y regresando al mismo lugar del que partió. Supongamos que conoce la distancia entre cualquier par de ciudades. ¿De qué forma debe hacer el recorrido si pretende minimizar la distancia total?». ([Stockdale, 2011](#))

Existen diversos planteamientos para modelar el problema del agente viajero, y dos de los más conocidos se presentan a continuación:

## Modelo DFJ

Los autores [Dantzing et al. \(1954\)](#) propusieron la siguiente estructura:

$$\text{mín } z = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i, j=1}^n d_{ij} x_{ij} \text{ sujeto a:} \quad (9.1)$$

$$\sum_{i=1, i \neq j}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \quad (9.2)$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (9.3)$$

$$\sum_{i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \forall S \subseteq \{2, \dots, n\} \quad (9.4)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (9.5)$$

Donde:

$n$  = número total de nodos

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si voy al nodo } j \text{ desde el nodo } i \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

$d_{ij}$  = distancia entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$

Donde la función objetivo (9.1) busca minimizar la distancia total del recorrido, realizando la multiplicación de la matriz de distancias entre nodos  $d_{ij}$  con cada uno de los arcos activos  $x_{ij}$ ; la restricción (9.2) implica que solo es posible llegar a un nodo  $j$  una única vez, (9.3) que solo se puede salir de un nodo  $i$  una única vez, (9.4) se encarga de evitar la generación de subtours y (9.5) garantiza que cada variable  $x_{ij}$  es binaria.

Sin embargo, en un TSP de gran magnitud, será necesario utilizar muchas restricciones de ruptura de subtours; en el peor de los casos, serían necesarias  $2^n$  restricciones, donde  $n$  es el número de nodos. Siendo así, para una instancia de, por ejemplo, 50 nodos, se tiene que:

$$2^{50} = 1,073,741,824$$

Esto convierte al TSP en un problema NP-Hard, que para instancias con gran cantidad de nodos no es factible de ser resuelto con métodos de programación lineal exacta, sino que requiere del uso de heurísticas que permitan su resolución en un tiempo computacional aceptable.

## Modelo MTZ

Los autores [Miller et al. \(1960\)](#) propusieron la siguiente estructura:

$$\text{mín } z = \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i, j=1}^n d_{ij} x_{ij} \text{ sujeto a:} \quad (9.6)$$

$$\sum_{i=1, i \neq j}^n x_{ij} = 1 \quad \forall j \quad (9.7)$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n x_{ij} = 1 \quad \forall i \quad (9.8)$$

$$u_i - u_j + n x_{ij} \leq n - 1 \quad 2 \leq i \neq j \leq n \quad (9.9)$$

$$0 \leq u_i \leq n - 1 \quad 2 \leq i \leq n \quad (9.10)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \quad (9.11)$$

$$u_i \in \mathbf{Z} \quad \forall i \quad (9.12)$$

Donde:

$n$  = número total de nodos

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si voy al nodo } j \text{ desde el nodo } i \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

$d_{ij}$  = distancia entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$

$u_i$  = variable ficticia para el número de nodos visitados en  $i$

La función objetivo (9.6) y las restricciones (9.7) y (9.8) y (9.11) son análogas con el modelo DFJ, mientras que el conjunto de restricciones (9.9) y (9.10) son las que se encargan de la eliminación de subtours en el recorrido y la restricción (9.12) garantiza que la variable ficticia  $u_i$  solamente pueda tomar valores enteros y positivos.

### 9.1.2. Capacitated Vehicle Routing Problem

En el problema de ruteo de vehículos, se cuenta con un depósito que tiene una cantidad limitada de productos a ser ofertados, desde donde se atiende a un conjunto de clientes con demandas conocidas. Hay una flota limitada de vehículos para ejecutar las rutas. El objetivo es confeccionar un conjunto de rutas respetando las restricciones de capacidad del depósito y vehículos disponibles (Toro Ocampo, 2016); se han propuesto en la literatura múltiples formulaciones para el CVRP; a continuación se presenta una de las más conocidas:

#### Modelo Fisher & Jaikumar

Fisher y Jaikumar propusieron en 1981 el siguiente modelo de solución, haciendo uso de una formulación de programación lineal entera (Vidal et al., 2013):

$$\text{mín } z = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=1}^m c_{ij} x_{ijk} \quad (9.13)$$

$$\sum_{k=1}^m y_{ik} = 1 \quad i = 1, \dots, n \quad (9.14)$$

$$\sum_{k=1}^m y_{0k} \leq m \quad (9.15)$$

$$\sum_{i=1}^n q_i y_{ik} \leq Q \quad k = 1, \dots, m \quad (9.16)$$

$$\sum_{j=0}^n x_{ijk} = \sum_{j=0}^n x_{jik} = y_{ik} \quad i = 0, \dots, n; k = 1, \dots, m \quad (9.17)$$

$$\sum_{v_i \in S} \sum_{v_j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1 \quad k = 1, \dots, m; S \in V \setminus \{0\}; |S| \geq 2 \quad (9.18)$$

$$y_{ik} \in \{0, 1\} \quad i = 0, \dots, n; k = 1, \dots, m \quad (9.19)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad i = 0, \dots, n; j = 0, \dots, n; k = 1, \dots, m \quad (9.20)$$

Donde:

$n$  = número total de clientes

$m$  = número total de vehículos

$Q$  = capacidad de los vehículos

$q_i$  = demanda del cliente  $i$

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si el vehículo } k \text{ visita al nodo } j \text{ inmediatamente después de visitar al nodo } i \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si el vehículo } k \text{ es asignado al cliente } i \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

$c_{ij}$  = costo de viaje entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$

La función objetivo (9.13) busca minizar el costo de viaje asociado a la totalidad de los arcos activos; las restricciones (9.14), (9.15) y (9.16) representan la estructura de un problema de empaquetamiento con  $m$  compartimientos y buscan hacer cumplir, respectivamente, la asignación de cada cliente a un solo vehículo, el número máximo de vehículos que operan fuera del depósito y la capacidad del vehículo. Las restricciones (9.17) y (9.18) se relacionan con la estructura de las rutas, garantizando la selección de un número adecuado de arcos entrando y saliendo de cada nodo (depósito y clientes) y eliminando los subtours. El número de restricciones de este último tipo, como se vio en el TSP, crece exponencialmente con el número de clientes, haciendo que este modelo también sea un problema NP-Hard. Finalmente, las restricciones (9.19) y (9.20) garantizan que las variables  $y_{ik}$  y  $x_{ijk}$  sean binarias.

### 9.1.3. Capacitated Location-Routing Problem with Private Fleet and Common Carrier

El problema de localización y ruteo con flota propia y subcontratada (CLRPPC), es una variante del CLRP (Problema de ruteo y localización), que considera que es posible subcontratar algunas (o todas) las rutas en el proceso de distribución. Su objetivo es minimizar los costos de apertura de los depósitos, el costo de uso de los vehículos propios y los costos variables a asociados a la utilización de las rutas recorridas por la flota propia o por la flota subcontratada.

Donde:

### Conjuntos

$I$	Conjunto de centros de distribución (depósitos)
$J$	Conjunto de clientes
$V$	Conjunto de nodos $V = I \cup J$

---

### Parámetros

$O_i$	Costo de apertura del centro de distribución.
$W_i$	Capacidad del centro de distribución
$F$	Costo fijo asociado a cada vehículo propio utilizado en la operación
$Q$	Máxima carga que puede ser transportada por un vehículo.
$D_j$	Demanda de cada cliente $j \in J$
$c_{ij}$	Costo de viajar entre los nodos $i$ y $j$
$P$	Factor de penalización aplicado a cada arco cuando es transitado usando un vehículo subcontratado
$NV_a$	Número de vehículos disponibles de la flota propia

---

### Variables

$x_{ij}$	Variable binaria que se activa cuando el camino entre los nodos $i, j \in V$ es recorrido por un vehículo propio.
$s_{ij}$	Variable binaria que se activa cuando el camino entre los nodos $i, j \in V$ es recorrido por un vehículo subcontratado.
$y_i$	Variable binaria que indica la apertura del centro de distribución. $i \in I$
$f_{ij}$	Variable binaria que define si el consumidor ubicado en el nodo $j \in J$ es atendido por una ruta que inicia en el centro de distribución $i \in I$ .
$z_j$	Variable binaria que determina si el consumidor ubicado en el nodo $j \in J$ es el último de la ruta en ser atendido.
$a_{ij}$	Variable binaria que indica si el vehículo usa el camino desde el nodo $j$ al centro de distribución ubicado en el nodo $i$ .
$t_{ij}$	Variable continua que indica la cantidad de carga transportada entre los nodos recorridos por la flota propia $i$ y $j$ .
$l_{ij}$	Variable continua que indica la cantidad de carga transportada entre los nodos recorridos por la flota subcontratada $i$ y $j$ .

$$\text{mín} = \sum_{i \in I} o_i y_i + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} F a_{ij} + \sum_{i, j \in V} c_{ij} x_{ij} + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} c_{ij} a_{ij} + P \sum_{\substack{i \in V \\ j \in V}} c_{ij} s_{ij} \quad (9.21)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ij} + \sum_{i \in V} s_{ij} = 1, \quad \forall j \in J \quad (9.22)$$

$$\sum_{k \in J} x_{jk} + \sum_{i \in I} a_{ij} = \sum_{i \in V} x_{ij}, \quad \forall j \in J \quad (9.23)$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} = \sum_{j \in J} a_{ij}, \quad \forall i \in I \quad (9.24)$$

$$\sum_{k \in J} s_{jk} \leq \sum_{i \in V} s_{ij}, \quad \forall j \in J \quad (9.25)$$

$$x_{ij} + x_{ji} + s_{ij} + s_{ji} \leq 1, \quad \forall i, j \in V \quad (9.26)$$

$$\sum_{\substack{i \in V \\ i \neq j}} t_{ij} + l_{ij} = \sum_{\substack{k \in V \\ k \neq j}} (t_{jk} + l_{jk}) + D_j, \quad \forall j \in J \quad (9.27)$$

$$\sum_{\substack{i \in V \\ j \in V}} x_{ij} + s_{ij} = \text{card}(J), \quad \forall j \in J \quad (9.28)$$

$$\sum_{i \in I} f_{ij} \leq 1, \quad \forall j \in J \quad (9.29)$$

$$t_{ij} \leq Q x_{ij}, \quad \forall i, j \in V \quad (9.30)$$

$$l_{ij} \leq Q s_{ij}, \quad \forall i, j \in V \quad (9.31)$$

$$\sum_{j \in J} t_{ij} + l_{ij} \leq w_i y_i, \quad \forall i \in I \quad (9.32)$$

$$\sum_{i \in V} s_{ij} + \sum_{k \in V} x_{jk} = 1 - z_j, \quad \forall j \in J \quad (9.33)$$

$$1 + a_{ij} \geq f_{ij} + z_j, \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (9.34)$$

$$-(1 - x_{ju} - x_{uj}) \leq f_{ij} - f_{iu}, \quad \forall i \in I, \forall j, u \in V \quad (9.35)$$

$$f_{ij} - f_{iu} \leq (1 - x_{ju} - x_{uj}), \quad \forall i \in I, \forall j, u \in V \quad (9.36)$$

$$f_{ij} \geq x_{ij}, \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (9.37)$$

$$\sum_{i \in I} y_i \geq \sum_{j \in J} D_j / \sum_{i \in I} w_i, \quad \forall i \in I \quad (9.38)$$

$$\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (x_{ij} + s_{ij}) \leq \sum_{j \in J} D_j / Q \quad (9.39)$$

$$\sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} a_{ij} \leq N V_a \quad (9.40)$$

$$x_{ij}, s_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in V \quad (9.41)$$

$$y_i \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I \quad (9.42)$$

$$f_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, \forall j \in V \quad (9.43)$$

$$z_j \in \{0, 1\}, \quad \forall j \in J \quad (9.44)$$

$$a_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, \forall j \in J \quad (9.45)$$

$$t_{ij}, l_{ij} \in R, \quad \forall i, j \in V \quad (9.46)$$

La interpretación de la función objetivo y sus correspondientes restricciones puede ser consultada en [Toro Ocampo et al. \(2016\)](#), teniendo en cuenta que se construyó un modelo matemático que a partir de la estructura general del CLRPPC, y empleando distintas funciones objetivo, permitiese dar solución a múltiples variantes de los problemas de ruteo, incluyendo el ruteo verde (GCLRP y GOLRP), desde el enfoque de la emisión de gases de  $CO_2$  como consecuencia de la inclinación de la ruta.

Para este trabajo de grado se emplea este modelo, y a través de la relajación de restricciones, es llevado a que se comporte como un CVRPSD, modelando diversos escenarios que permitan considerar la demanda estocástica de los clientes, la cual será conocida desde antes de realizar el trazado de las rutas.

#### 9.1.4. Capacitated Vehicle Routing Problem con Modelamiento Flexible

El modelamiento del CVRP siguiendo la estructura flexible propuesta en [Toro Ocampo et al. \(2016\)](#), se obtiene empleando la siguiente función objetivo:

$$\text{mín} = \sum_{i,j \in V} c_{ij} x_{ij} + \sum_{\substack{i \in I \\ j \in J}} c_{ij} a_{ij} \quad (9.47)$$

Sujeto a (9.22) a (9.46), y agregando las siguientes restricciones:

$$y_i = 1, \quad \forall i \in I \quad (9.48)$$

$$s_{ij} = 0, \quad \forall i, j \in V \quad (9.49)$$

$$l_{ij} = 0, \quad \forall i, j \in V \quad (9.50)$$

### 9.1.5. Capacitated Vehicle Routing Problem Stochastic Demand

Una variante interesante del CVRP anteriormente propuesto, ocurre cuando la demanda deja de ser determinística, y esta se asume como un número aleatorio con una distribución de probabilidad conocida; este problema recibe el nombre de «Problema de Ruteo de Vehículos con Demanda Estocástica» (Louveaux and Salazar-González, 2018); a continuación se presenta una introducción a este modelo propuesta en el libro «Introducción a la Programación Estocástica» de Birge and Louveaux (2010).

Supóngase un modelo simplificado de ruteo de vehículos, en donde un vehículo único con capacidad de 10 unidades debe visitar a 4 clientes (A, B, C y D) partiendo y llegando a un depósito (0), cuyo planteamiento se puede visualizar en la figura 9.1.

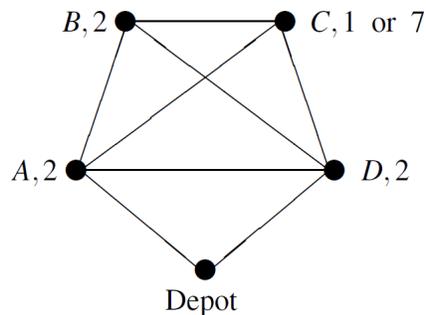


Figura 9.1: Representación gráfica del VRP

El grafo generado  $G = (V, E)$  consiste en un conjunto  $V$  de vértices (o nodos) y un conjunto  $E$  de esquinas (o arcos); en este caso, los nodos corresponden al conjunto de los clientes más el depósito, siendo que  $V = 0, A, B, C, D$ , donde 0 es el depósito. Los arcos  $(i, j)$  corresponden al viaje realizado desde el nodo  $i$  hasta el nodo  $j$ , considerando que estos pueden recorrerse en

cualquier dirección; igualmente, se asume que el vehículo puede viajar desde cualquier punto hasta cualquier otro, bien sea el depósito o un cliente: esto significa que el grafo es completo.

La demanda de 3 de los 4 clientes,  $A$ ,  $B$  y  $D$  es conocida e igual a 2, sin embargo, la demanda de  $C$  es aleatoria; supóngase que esta puede ser de 1 o 7 con igual probabilidad de 0.5 de ocurrencia, y como bien se evidenció en el planteamiento del CVRP, todas las demandas deben ser satisfechas; las distancias entre dos puntos dados se pueden expresar por medio de la matriz simétrica  $C = (c_{ij})$ , donde  $c_{ij}$  es la distancia entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$ . Para el grafo presentado en la figura 9.1, se propone la siguiente matriz de distancias:

	0	A	B	C	D
0	-	2	4	4	1
A	2	-	3	4	2
B	4	3	-	1	3
C	4	4	1	-	3
D	1	2	3	3	-

Tabla 9.1: Matriz de distancias

La matriz de distancias 9.1 es simétrica, lo cual significa que la distancia entre dos puntos es la misma, sin importar en qué dirección se realice el recorrido. Las matrices de distancias usualmente satisfacen la *desigualdad de triángulo*:

$$c_{ij} \leq c_{ik} + c_{kj} \quad \forall i, j, k \quad (9.51)$$

Esta expresión significa que es mucho más corto, o al menos, no más largo, ir directamente de  $i$  a  $j$  que pasar por un nodo intermedio  $k$ . El problema de encontrar la ruta más corta que visite todos los clientes empezando y terminando en el depósito es el problema del agente viajero - TSP anteriormente visto, y haciendo uso de un algoritmo de solución para el presente ejemplo se obtiene que la ruta óptima es  $(0,A,B,C,D,0)$ , con una longitud de 10; sin embargo, en este caso no es suficiente con resolver un TSP, ya que el vehículo tiene una capacidad limitada de 10 y la demanda en el nodo  $C$  es aleatoria; el tratamiento de la incertidumbre dependerá del momento en que esté disponible la información, y para esto se mencionarán tres formas de proceder obteniendo diferentes soluciones:

### 9.1.6. Wait-and-see

El primer caso ocurre cuando la demanda es conocida antes de iniciar la ruta; esto ocurre, por ejemplo, cuando el producto a despachar hace parte de un proceso de producción justo a tiempo. Si el proceso trabaja en lotes, el número de lotes requerido en  $C$  puede ser 1 o 7, dependiendo del proceso de producción. Pero el número de lotes puede ser pronosticado adecuadamente.

Alternativamente, los productos pueden ser desechos generados durante el proceso de producción; la cantidad a ser recolectada puede ser conocida si existe un acuerdo con el cliente, o este es una sucursal.

Esta situación es conocida como **información a priori**, y el proceso de decisión corresponde a un enfoque de Wait-and-see, también denominado «solución información perfecta» (Gonçalves Dosantos, 2016), y consiste en tomar la decisión de la ruta a seguir después de obtener la información del nivel de demanda, cuyos resultados se pueden observar en la figura 9.2, teniendo en cuenta las siguientes posibilidades:

- Cada que el cliente en el nodo  $C$  requiera una sola unidad, la capacidad del vehículo es capaz de acoplarse a la demanda de los cuatro clientes, y la solución es la misma encontrada por el TSP con una longitud de 10.
- Cada que el cliente en el nodo  $C$  requiera 7 unidades, la demanda total será de 13, lo cual excede la capacidad del vehículo; siendo así, el vehículo debe recorrer dos rutas sucesivas, siendo que la combinación con la menor distancia posible sigue la secuencia  $(0,1,D,0,B,C,0)$ , con una distancia total de 14.

Cuando la demanda en  $C$  es 7 y considerando que la capacidad del vehículo es 10, la parte de la ruta que visita  $C$  puede visitar solamente a  $C$ , o también puede realizar el recorrido visitando a  $C$  junto a otro cliente; hay entonces tres posibilidades en el primer caso, dependiendo del orden en que se visiten los nodos  $A$ ,  $B$  y  $D$ , siendo la mejor opción  $(0,A,B,D)$ ; hay igualmente tres

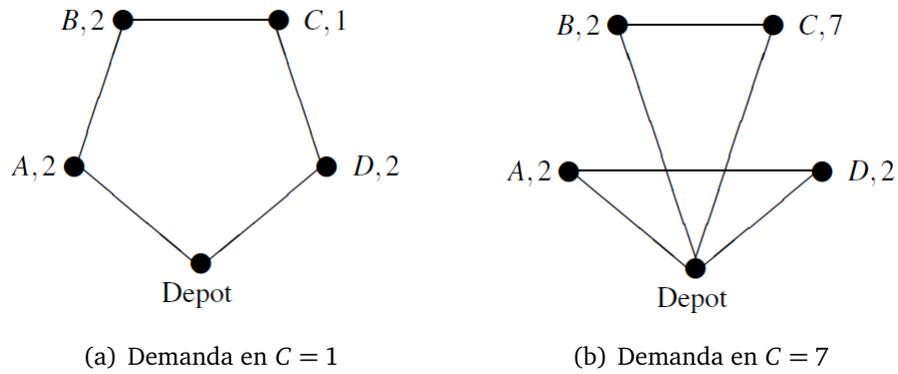


Figura 9.2: Soluciones del Wait-and-see

posibilidades para el segundo caso, dependiendo del cliente que pertenezca a la ruta que visita al nodo  $C$ .

Como ambas situaciones ocurren la mitad del tiempo, las rutas óptimas de longitud 10 y 14 son recorridas la mitad de las veces cada una; esto significa que la distancia recorrida media o esperada desde la perspectiva del Wait-and-see es:

$$WS = \frac{1}{2}10 + \frac{1}{2}14 = 12$$

### 9.1.7. Solución de Valor Esperado

Si la demanda no es conocida por anticipado, esta se descubre al momento de llegar al cliente  $C$ ; la primera postura que se puede tomar, es olvidar la incertidumbre y tener en cuenta que la ruta está planeada según la demanda esperada. Como esta es igual a 4 (el promedio de 1 y 7), la capacidad del vehículo es lo suficientemente grande para adecuarse a la demanda de los 4 clientes; siendo así, será óptimo seguir la ruta del TSP  $(0,A,B,C,D,0)$  de longitud 10. La planificación basada en el valor esperado es, aparentemente, olvidar la incertidumbre; sin embargo, esto no significa que se encuentre ausente.

La demanda en el nodo  $C$  es revelada cuando se llega a  $C$ ; será 1 la mitad del tiempo, y 7 la otra mitad, pero de manera aleatoria. En la figura 9.3 se puede apreciar lo que ocurre en este planteamiento.

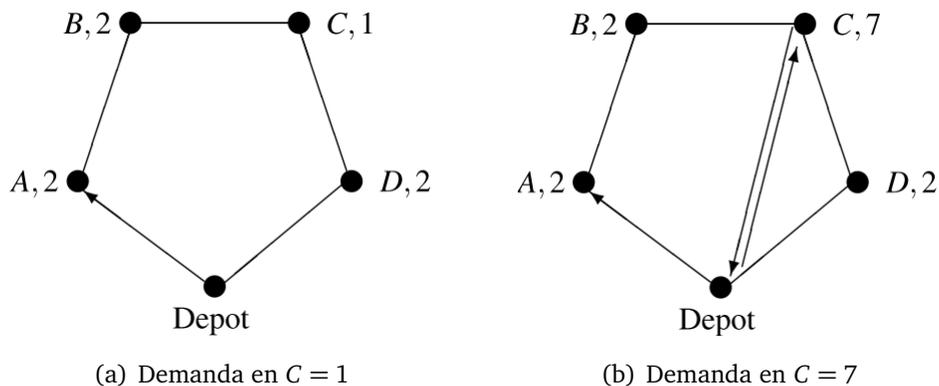


Figura 9.3: Solución de Valor Esperado

- Cuando el vehículo llega a  $C$  y la demanda es 1, simplemente procede con la ruta planeada. La demanda total es 7, por tanto es menor que la capacidad; la distancia recorrida es 10, y todo marcha bien en una situación ideal.
- Cuando el vehículo llega a  $C$ , su carga ya es de 4. Si la demanda en  $C$  es 7, el vehículo es incapaz de cubrir la demanda total; asumiendo que los bienes sean divisibles, el vehículo recoge 6 unidades, posteriormente regresa al depósito para descargarlas, luego vuelve a  $C$  para tomar la última unidad y retoma su recorrido viajando a  $D$ . El vehículo viaja entonces en la ruta  $(0,A,B,C,0,C,D,0)$  para una distancia total de 18; en la literatura, esta situación recibe el nombre de **fallo**, y se presente cuando un vehículo es incapaz

de cumplir con la demanda de un cliente; la distancia extra recorrida debido a este falla consiste en un viaje de retorno al depósito. La distancia de 18 es igual a la ruta planeada con distancia 10 del TSP, más la distancia de 8 del viaje de retorno al nodo C. Es posible observar que se obtiene la misma solución con bienes indivisibles.

Teniendo en cuenta que ambas posibilidades ocurren la mitad del tiempo, el costo real bajo incertidumbre de la solución del valor esperado se conoce como **expectativa del problema de valor esperado** o:

$$EEV = \frac{1}{2}10 + \frac{1}{2}18 = 14$$

### 9.1.8. Solución de Recurso

En vista de la incertidumbre en el nodo C, se propone mejorar la elección de la ruta; primero, se puede observar que es posible recorrer la ruta del TSP en la dirección opuesta (0,D,C,B,A,0), como se puede ver en la figura 9.4, lo cual implica que:

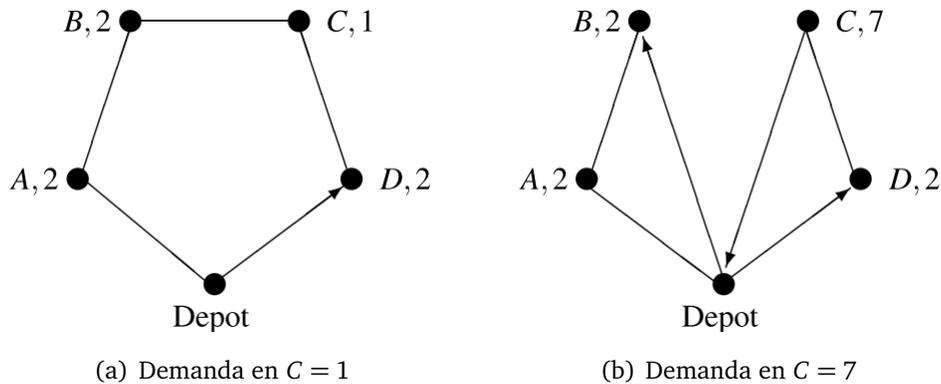


Figura 9.4: Recorrido efectivo si la ruta del TSP se planifica en sentido opuesto

- Cuando el vehículo llega a C y la demanda es 1, simplemente se procede con la ruta planeada, cuya distancia es 10, como se vio anteriormente.

- Cuando el vehículo llega a  $C$  y la demanda es 7, el vehículo puede cumplir con la demanda en  $C$ , sin embargo, no podrá cubrir la demanda total. Después de finalizar con su labor en  $C$ , regresa al depósito, descarga, y posteriormente va a los nodos  $B$  y  $A$ ; esta situación es conocida como un **retorno preventivo**. (Al llegar al nodo  $C$  ya se conoce que la demanda en  $B$  no podrá ser cumplida, es por esto que es mejor regresar al depósito y continuar la ruta en  $B$ , en lugar de dirigirse a  $B$  y realizar un viaje de retorno al depósito). El vehículo sigue la ruta  $(0,D,C,0,B,A,0)$ , para una distancia total de 17.

El costo real bajo incertidumbre en este escenario es de:

$$\frac{1}{2}10 + \frac{1}{2}17 = 13,5$$

Se ha visto que la incertidumbre implica que hay una diferencia entre la ruta planeada y la ruta que es efectivamente recorrida; en la terminología estocástica, decidir sobre la ruta planificada (o ruta a priori) es una decisión de primera etapa, tomada antes de conocer los parámetros aleatorios; cuando la incertidumbre es revelada, es posible tomar acciones adicionales o de segunda etapa, que se denominan **acciones de recurso**; en este ejemplo se presentan dos acciones posibles: un viaje de retorno o un retorno preventivo.

Tras realizar algunos cálculos, se obtiene que la solución óptima consiste en planear la ruta siguiendo el recorrido  $(0,C,B,A,D,0)$ ; si la demanda en  $C$  es 1, la ruta es recorrida con una longitud de 11. De lo contrario, se produce un retorno preventivo en  $B$ , teniendo como resultado la ruta  $(0,C,B,0,A,D,0)$  con una longitud de 14; esta solución se presenta en la figura 9.5; la longitud esperada de la ruta bajo una política de recurso óptimo es:

$$RP = \frac{1}{2}11 + \frac{1}{2}14 = 12,5$$

- Cuando se trata de incertidumbre, es importante considerar qué sucede antes (primera etapa) y después (segunda etapa) de que se revela la incertidumbre; es igualmente

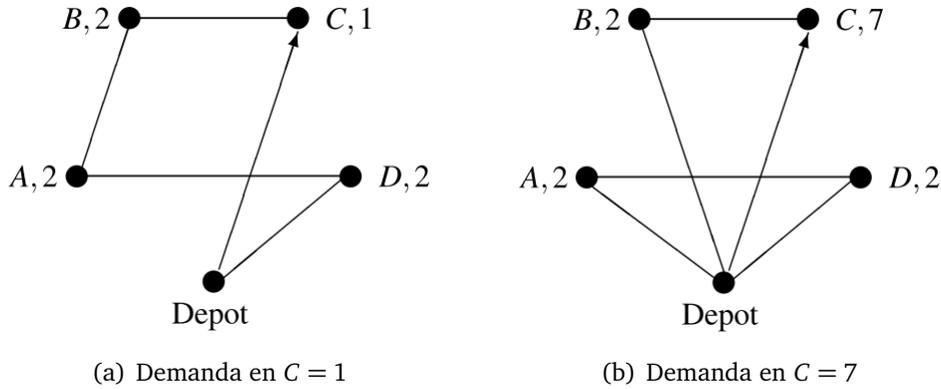


Figura 9.5: Recorrido efectivo si se planifica una ruta de recurso óptimo

importante considerar una variedad más amplia de decisiones (revertir la dirección del viaje en la primera etapa, o realizar viajes de retorno o retornos preventivos en la segunda etapa, para el caso de este ejemplo).

- Debido a la incertidumbre, a menudo se elige una peor solución en el caso favorable; cuando la demanda es baja, el vehículo sigue la ruta planeada (0,C,B,A,D,0), la cual es más larga que la solución del TSP, y se puede plantear la pregunta de: ¿por qué no simplemente se eligió la ruta más corta?, cuya respuesta es simple: si la ruta se inicia visitando al nodo C, la demanda se conoce al inicio de la ruta y es posible tomar una acción de recurso eficiente (realizar un retorno preventivo después de B) cuando la demanda en C es alta. Esto implica, de hecho, un costo adicional cuando la demanda en C es baja.
- Se cumplen las siguientes relaciones:

$$WS \leq RP \leq EEV \quad (9.52)$$

La primera relación  $WS \leq RP$  implica que siempre es mejor obtener la información obtener la información por anticipado. La diferencia  $RP - WS$  es conocida como  $EVPI$  - Expected Value of Perfect Information (Valor Esperado de la Información Perfecta); aquí, el  $EVPI = 0,5$ . Es la cantidad máxima que el planificador estaría dispuesto a pagarle al cliente C para obtener la información por adelantado. La segunda relación indica que es mejor resolver un escenario estocástico que pretender que la incertidumbre no existe. La diferencia  $EEV - RP$  es conocida como el  $VSS$  - Value of Stochastic Solution (Valor de la Solución Estocástica); aquí, el  $VSS = 1,5$ ; esto nos dice que lidiar con la incertidumbre realmente importa.

### 9.1.9. Método L-Shaped

Laporté and Louveaux (1993) propusieron un algoritmo entero denominado «L-Shaped» (en forma de L) para el modelo de recurso anteriormente visto donde las funciones de penalización corresponden al costo de los viajes e ida y regreso al depósito derivados de las fallas en la ruta. Este y otros modelos pueden ser consultados en Louveaux and Salazar-González (2018).

A continuación se presenta el modelo propuesto en Laporté et al. (2002) para dar solución al Problema de Ruteo de Vehículos con Demanda Estocástica (CVRPSD).

Sea  $x_{ij}$  una variable entera igual al número de veces que el nodo  $(v_i, v_j)$  aparece en la solución planeada para la primera etapa. Si  $i, j > 1$ , entonces  $x_{ij}$  solamente puede tomar los valores de 0 o 1; si  $i=1$ ,  $x_{ij}$  puede además ser igual a 2 si un vehículo realiza un viaje de retorno entre el depósito y  $v_j$ . El costo esperado del recurso será  $Q_x$ ; siendo así, el modelo es:

$$\text{mín} \quad \sum_{i < j} c_{ij} x_{ij} + Q(x) \quad (9.53)$$

$$\sum_{j=2}^n x_{1j} = 2m \quad (9.54)$$

$$\sum_{i < k} x_{ik} + \sum_{j > k} x_{kj} = 2 \quad (k = 2, \dots, n) \quad (9.55)$$

$$\sum_{v_i, v_j \in S} x_{ij} \leq |S| - \left\lceil \sum_{v_i \in S} E(\xi_i) / D \right\rceil \quad (S \subset V \setminus \{v_1\}; 2 \leq |S| \leq n-2) \quad (9.56)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad (2 \leq i < j < n) \quad (9.57)$$

$$0 \leq x_{1j} \leq 2 \quad (j = 2, \dots, n) \quad (9.58)$$

$$x = (x_{ij}) \quad \text{entero} \quad (9.59)$$

Donde:

$\xi$  = demanda asociada al cliente  $i$ , siendo un número aleatorio que sigue una distribución conocida

$D$  = capacidad del vehículo

$c_{ij}$  = costo de viaje entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$

La función objetivo (9.53) busca minimizar el costo de la ruta tal y como se definió previamente para el CVRP, añadiendo el término  $Q_x$  asociado al costo del recurso. Las restricciones (9.54) y (9.55) especifican el grado de cada arco; la restricción (9.56) se asegura de que la solución no contenga subtours y que la demanda esperada no exceda la capacidad del vehículo  $D$ .

No hay una alternativa simple de formular el cálculo de  $Q(x)$  en términos de variables de decisión y relaciones lineales. Sin embargo, dada una solución a priori  $x$ , el costo esperado del recurso,  $Q(x)$  puede ser fácilmente calculado bajo algunas suposiciones. El cálculo es separable en las rutas, y para cada ruta, el costo esperado debe calcularse para cada una de sus dos orientaciones:

$$Q(x) = \sum_{k=1}^m \text{mín} \{Q^{k,1}, Q^{k,2}\} \quad (9.60)$$

Donde  $Q^{k,\delta}$  denota el costo esperado del recurso correspondiente a la ruta  $k$  y la orientación  $\delta = 1$  o  $2$ . La computación de  $Q^{k,\delta}$  depende de la estrategia de recurso y de una serie de características del problema; vale la pena observar que el modelo definido previamente no captura la orientación de la ruta, lo cual es irrelevante en un entorno determinista donde ambas orientaciones son equivalentes cuando la matriz de costos de viaje es simétrica. Sin embargo, en un contexto estocástico, la orientación importa, y debido a que las demandas no se conocen hasta que se llega al cliente, las orientaciones deben seleccionarse a priori. Para este modelo, esta decisión de orientación se puede tomar de manera simple haciendo uso de la expresión en (9.60).

Como un primer ejemplo, se considera el caso en que los bienes son divisibles; este caso incluye situaciones donde los bienes son fluidos como en las demandas normalmente distribuidas, o donde son divisibles al tamaño unitario como en las demandas de tipo Poisson; este enfoque puede efectivamente abarcar ambas situaciones; para una ruta dada  $k$  definida por el vector  $V_k = (v_{i_1} = v_1, v_{i_2}, \dots, v_{i_{t+1}} = v_1)$ , entonces, el costo esperado para la primer orientación es:

$$Q^{k,1} = 2 \sum_{j=2}^t \sum_{\ell=1}^{\infty} P \left( \sum_{s=2}^{j-1} \xi_{i_s} \leq \ell D < \sum_{s=2}^j \xi_{i_s} \right) c_{1i_j} \quad (9.61)$$

El término de probabilidad corresponde a tener la  $\ell$ -ésima falla en el cliente  $i_j$ , y puede ser reescrito como:

$$Q^{k,1} = 2 \sum_{j=2}^t \sum_{\ell=1}^{\infty} [F^{j-1}(\ell D) - F^j(\ell D)] c_{1i_j} \quad (9.62)$$

Donde  $F^j(\ell D) = P \left( \sum_{s=2}^j \xi_{i_s} \leq \ell D \right)$ . Si  $\xi_i \leq D$  para todo  $i$  con probabilidad 1, entonces el límite superior de la segunda sumatoria en (9.61) y (9.62) se puede reducir a  $j - 1$ . El cálculo de (9.61) y (9.62) reposa en la hipótesis de que el único recurso disponible es un viaje de retorno al depósito en caso de fallo. En otras palabras, no se implementa una política excepcional para el caso en que la demanda acumulada es igual a la capacidad del vehículo. Esto no es limitante en el caso de demandas continuas, ya que tal evento tiene una media de cero. En el caso discreto, esta hipótesis puede ser limitante, pero no necesariamente cuando la demanda de un cliente puede ser cero, como en el caso de la distribución Poisson, que podrá ser consultada en [Laporté et al. \(2002\)](#), así como la proposición para resolver este modelo.

### 9.1.10. Distribución de probabilidad Poisson

El modelo empleado en este trabajo está restringido a parámetros y variables discretas, por tanto, se empleó una distribución de probabilidad discreta para generar las demandas estocásticas en cada instancia.

En [Oyola et al. \(2018\)](#), se presenta una revisión exhaustiva de diferentes modelos de ruteo de vehículos con escenarios estocásticos, entre ellos, el CVRPSD, tanto para demandas continuas como demandas discretas.

Al revisar los 23 artículos trabajados con demandas que siguen una distribución de probabilidad discretas realizados entre 1999 y 2016, se observa que el 30% de estos emplean la distribución Poisson en mayor o menor medida; esto se debe a que solo contiene un parámetro de variación, es relativamente fácil de estimar y más simple de manejar que las distribuciones generales ([Laporté et al., 2002](#)).

Ahora bien, la distribución Poisson es una distribución de probabilidad discreta que expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media  $\lambda$ , la probabilidad que ocurra un determinado número de eventos  $k \in X$  durante un intervalo de tiempo dado o una región específica ([Muñoz et al., 2014](#)); la función de probabilidad se define por la siguiente expresión:

$$p(k, \lambda) := f(k) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, & \text{si } k = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0 \\ 0, & \text{de otra manera.} \end{cases} \quad (9.63)$$

Sus principales características son:

- Las consecuencias de los eventos son independientes, por tanto, a ocurrencia de un evento en un intervalo de espacio o tiempo no tiene efecto sobre la probabilidad de una segunda ocurrencia del evento en el mismo, o cualquier otro intervalo.

- Teóricamente, debe ser posible un número infinito de ocurrencias del evento en el intervalo.
- La probabilidad de la ocurrencia única del evento en un intervalo dado es proporcional a la longitud del intervalo.
- Por el teorema central del límite, al aumentar el valor del parámetro  $\lambda$ , el comportamiento de las variables de Poisson se aproxima al de la distribución normal ([Badii and Castillo, 2009](#)).

## 9.2. Marco Conceptual

### 9.2.1. Depósito

Un depósito es un lugar donde se almacena una sustancia para su posterior utilización ([Supply Chain Visions, 2010](#)); en términos de ruteo, es el lugar desde donde se abastecen los vehículos para distribuir la mercancía posteriormente a los clientes.

### 9.2.2. Función Objetivo

En un problema de programación lineal o no lineal, se debe tomar la decisión de maximizar (usualmente las utilidades) o de minimizar (usualmente los costos) cierta función de las variables de decisión, a la cual se le denomina función objetivo. ([Sáez R., 2003](#))

### 9.2.3. Grafo

Un grafo es una colección de puntos y líneas que conectan algún subconjunto (posiblemente vacío) de ellos. Los puntos de un grafo son comúnmente conocidos como vértices o nodos del grafo, mientras que las líneas que conectan los vértices de un grafo son conocidas como aristas o arcos. ([Gardner, 1983](#))

### 9.2.4. NP-Hard

La complejidad se ha dividido principalmente en dos clases: la clase P y la NP. La primera corresponde a los problemas cuyos algoritmos de solución se pueden resolver en tiempo polinomial;

los NP son aquellos que no han sido posibles de resolver por medio de algoritmos deterministas eficientes, pero pueden ser resueltos con algoritmos como las metaheurísticas, cuyo tiempo de solución sí es polinomial; un problema NP-Hard es entonces aquel que es al menos tan complejo como un NP, resoluble a través de algoritmos que trabajen en tiempo polinómico. (Reingold et al., 1977)

### **9.2.5. Longitud de ruta**

La longitud de ruta se define como la suma de las distancias recorridas en cada uno de los trayectos por los cuales se desplaza un agente viajero o vehículo, partiendo desde un nodo de origen y visitando cada uno de los nodos demandantes.

### **9.2.6. Restricciones**

Representan las limitaciones prácticas de determinados recursos o imposiciones físicas de la realidad. Se expresan como ecuaciones e inecuaciones lineales de las variables de decisión. (Ruz, 2018)

### **9.2.7. Variables de decisión**

Representan los elementos del sistema a modelar que son controlables por el decisor. En los modelos lineales continuos estas variables toman como valores números reales y se representan por letras con subíndices como se acostumbra a hacer con las variables matemáticas, o literales alusivos a su significado: peso, valor, etc. (Ruz, 2018)

### **9.3. Marco Espacial**

El marco espacial del presente proyecto debe ser entendido como el compendio de instancias puestas a prueba, sin embargo, se plantea también la aplicación del modelo para que empresas reales puedan emplearlo en sus procesos de distribución.

### **9.4. Marco Temporal**

El presente trabajo se desarrolla abarcando estudios preliminares de los vestigios del TSP en 1857, hasta la fecha presente, haciendo uso especialmente del modelo y los resultados albergados en [Toro Ocampo et al. \(2016\)](#).

# 10

## Metodología

### 10.1. Tipo de estudio y diseño de la investigación

Teniendo en cuenta la naturaleza matemática de las variables estudiadas en este proyecto, se tiene un enfoque cuantitativo, el cual representa un conjunto de procesos secuencial y probatorio, según [Sampieri Hernández et al. \(2014\)](#), por lo cual se siguieron las etapas propuestas en el gráfico [10.1](#).

Cabe mencionar que las fases 7 y 8 no deben ser consideradas como una definición y selección de muestra y recolección de datos respectivamente, sino que en dichas etapas se realiza el planteamiento del modelo, así como la construcción de los escenarios de prueba.

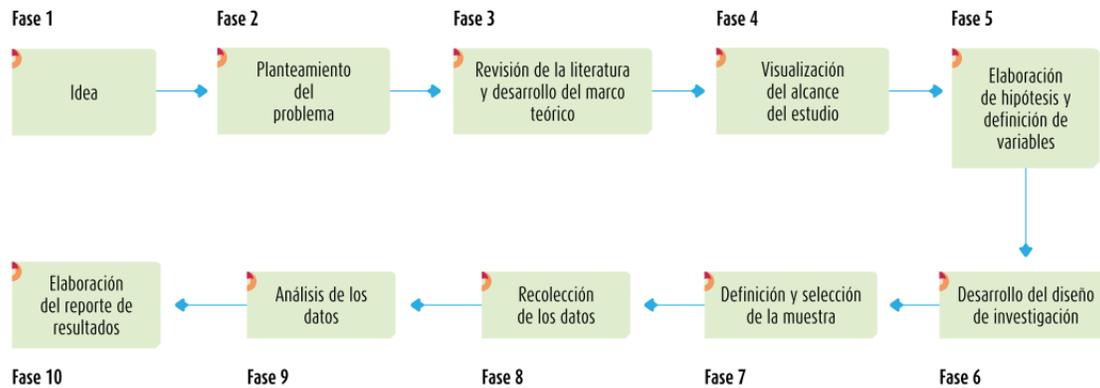


Figura 10.1: Etapas del proceso cuantitativo

## 10.2. Fuentes y técnicas para la recolección de información

Se empleó la información contenida en las bases de datos suscritas de la Universidad Tecnológica de Pereira: Scopus, Science Direct, SpringerLink, entre otras, así como las disponibles sin acceso restringido de otras instituciones universitarias y los repositorios académicos abiertos tales como Redalyc y Dialnet.

Para la construcción de escenarios de prueba, se emplearon como base las instancias alojadas en el portal CVRPLIB, desarrollado por el Grupo de Algoritmos, Optimizaçã e simulaçã (Uchoa et al., 2014) que alberga instancias del CVRP desde 1969 hasta 2017.

Los gráficos que representan la ubicación de los nodos en el plano se desarrollaron con el código 16.1 en el software R, el cual cuenta con un enfoque al análisis estadístico, y se define como un «conjunto integrado de instalaciones de software para manipulación de datos, cálculo y despliegue de gráficos » (Venables and Smith, 2020).

La generación de números aleatorios que se describe posteriormente, también se realizó en este software, empleando el código descrito en 16.2, al igual que los gráficos que analizan los datos de cada instancia, obtenidos con el código proporcionado en 16.3, mientras que los grafos que representan el trazado de las rutas se realizaron en LaTeX para obtener un mejor resultado visual, usando del código alojado en 16.4.

# 11

## Variables

Si bien los modelos de programación hacen uso de parámetros previamente conocidos, y de variables que son el fin del modelo a desarrollar, se considerará para esta sección el término variable haciendo uso de la definición que plantea la RAE de: «Magnitud que puede tener un valor cualquiera de los comprendidos en un conjunto» ([Real Academia de la Lengua Española, 2014](#)), siendo así, se enlistan todos los elementos estudiados:

- Longitud de la ruta: Corresponde a la función objetivo ( $z$ ) a minimizar en cada instancia.
- Tiempo de procesamiento: Es el tiempo que se tarda el equipo empleado para dar solución a cada instancia, expresado en segundos.
- Topología de la ruta: Es la forma en la cual se agrupan los nodos a visitar a través del trazado de las rutas.
- Número de vehículos: Es la cantidad de vehículos requeridos para satisfacer la demanda de los clientes.
- Demanda: Es la cantidad de cierto bien que requiere cada uno de los clientes y que debe ser cumplida por los vehículos a despachar.
- Capacidad: Es la cantidad de carga máxima que puede transportar cada vehículo.

- Distancia: Es la longitud total de la trayectoria que hay desde un nodo hasta otro nodo, o bien, el costo asociado a transportarse por dicha ruta.
- Variables de asignación: Son las variables que se encargan de asignar o no un vehículo a una ruta específica y que determinan en qué orden se realiza el recorrido.

# 12

## Generación de escenarios

La generación y procesamiento de escenarios estocásticos se realizó siguiendo el diagrama de flujo presentado en la figura 12.1; cada uno de los pasos se describe a continuación:

1. Inicialmente, se ingresa el número total de nodos ( $J$ ) de acuerdo a la instancia elegida de las disponibles en (Uchoa et al., 2014), y se generan 100 número aleatorios con distribución uniforme discreta en el software R empleando el código descrito en 16.2, donde cada uno representará el nodo cuya demanda se variará del conjunto total de nodos ( $J$ ).
2. Seguidamente, y empleando igualmente las demandas de cada instancia disponible en las librerías, se generan 100 números aleatorios que siguen una distribución Poisson, donde el parámetro  $\lambda$  corresponde a la demanda determinística de cada cliente  $D_j$ , donde  $j$  corresponde al número aleatorio generado en el paso anterior.
3. En el software AMPL, se reemplaza la demanda  $D_j$  y se corre la instancia; el código empleado para estas corridas puede generarse a partir del modelo descrito en 9.1.4
4. El paso anterior se realiza en 100 ocasiones, para abarcar la totalidad de escenarios estocásticos propuestos por cada instancia.
5. De los resultados generados en las 100 corridas estocásticas de cada instancia, se recopilan las variables de interés:

$z$  = Función objetivo

$t$  = Tiempo de procesamiento en segundos

$GAP$  = Brecha inexplorada del proceso, calculada con la siguiente expresión, a partir del algoritmo Branch & Bound del CPLEX:

$$GAP = \frac{\text{Límite Superior} - \text{Límite Inferior}}{\text{Limite Superior}}$$

$a_{ij}$  = Arcos activos entre el nodo  $i$  y el nodo  $j$

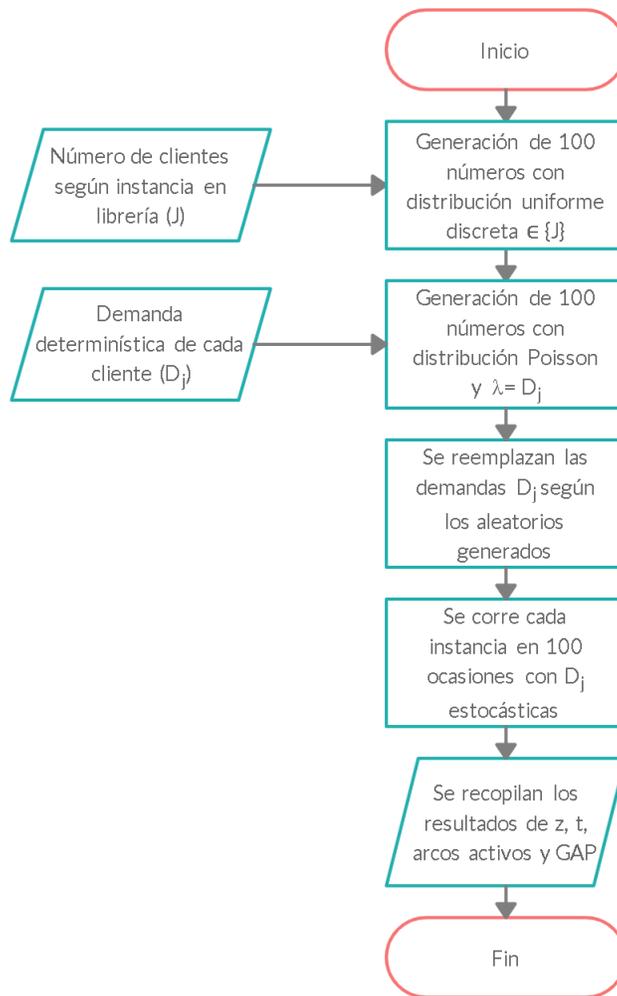


Figura 12.1: Diagrama de flujo para la generación de escenarios

# 13

## Casos de prueba

### 13.1. Generalidades

El presente trabajo de grado emplea 9 instancias del conjunto P propuesto por Philippe Augerat ([Augerat, 2004](#)), nombradas según la clave «P-n-k», donde n representa el número de nodos (Siendo uno de ellos el depósito y los demás los clientes), y k el número de vehículos disponibles; cabe mencionar que estas instancias fueron construidas a partir de otras ya existentes en la literatura, multiplicando el número de vehículos por dos, y adaptando las demandas para guardar concordancia con dicha característica.

La totalidad de instancias empleadas abarcan desde los 16 hasta los 45 nodos con coordenadas distribuidas aleatoriamente, así como de 2 a 8 vehículos, con una capacidad de 35 a 3000 unidades; en las siguientes páginas de de esta sección se presentan 3 elementos de interés para cada instancia, los cuales son:

1. Representación gráfica de los nodos distribuidos en el plano, donde el punto azul indica la ubicación del depósito y los puntos rojos las coordenadas de los clientes.

2. Tabla de características relevantes de cada instancia, donde:

Dimensión = número total de nodos (depósito + clientes)

Capacidad = capacidad máxima de cada vehículo, teniendo en cuenta que esta es uniforme

Vehículos = flota empleada para obtener la solución óptima en el escenario determinístico

Valor óptimo = valor minimizado de la función objetivo

Nodo = identificador del número del nodo, desde 1 (depósito) hasta la dimensión

Demanda = cantidad demandada por el nodo

3. Trazado de rutas óptimo en el escenario determinístico; las líneas punteadas representan los arcos de retorno, es decir, el último recorrido de cada ruta para regresar al depósito, y las líneas continuas son los arcos restantes; el nodo cuadrado representa el depósito, y los nodos circulares son cada uno de los clientes, donde su numeración coincide con la indicada en la tabla de características.

### 13.2. P-n16-k8

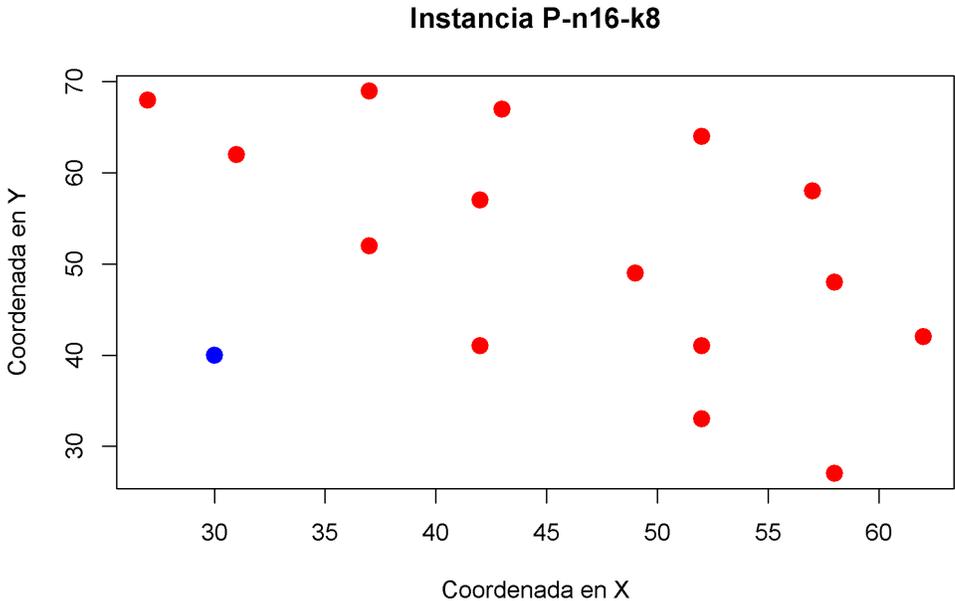


Figura 13.1: Ubicación de nodos de la instancia P-n16-k8

<b>Característica</b>	
Dimensión	16
Capacidad	35
Vehículos	8
Valor óptimo	450

<b>Nodo</b>	<b>Demanda</b>
1	0
2	19
3	30
4	16
5	23
6	11
7	31
8	15
9	28
10	8
11	8
12	7
13	14
14	6
15	19
16	11

Tabla 13.1: Características de la instancia P-n16-k8

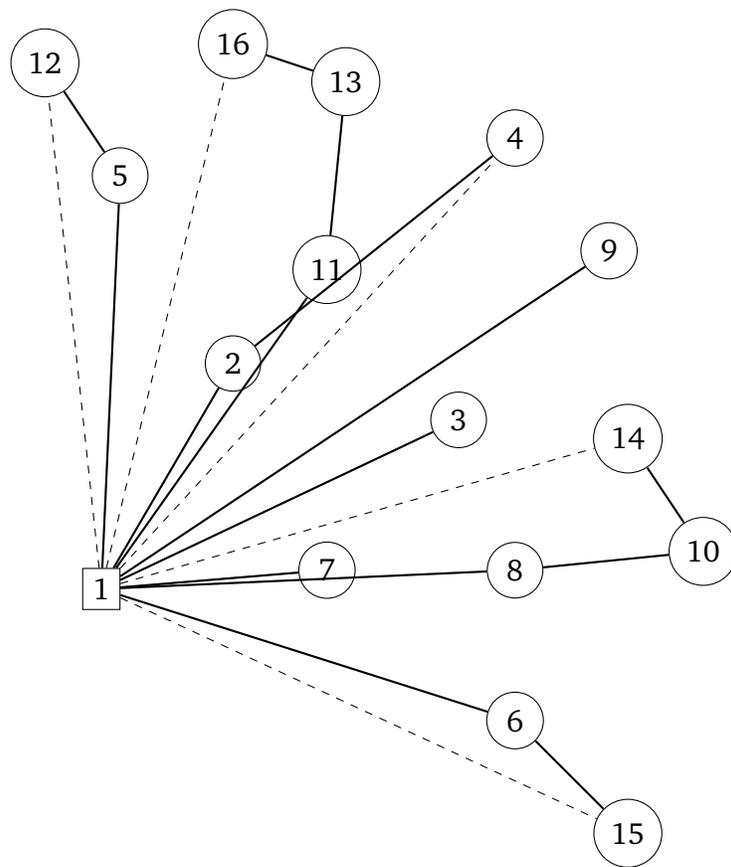


Figura 13.2: Trazado de rutas para la instancia P-n16-k8

### 13.3. P-n19-k2

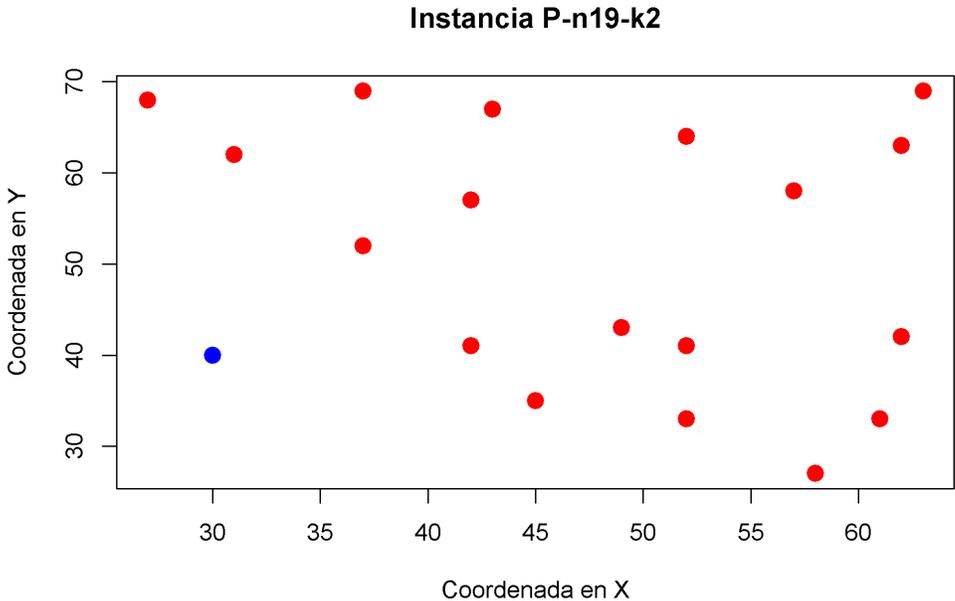


Figura 13.3: Ubicación de nodos de la instancia P-n19-k2

<b>Característica</b>	
Dimensión	19
Capacidad	160
Vehículos	2
Valor óptimo	212

<b>Nodo</b>	<b>Demanda</b>
1	0
2	19
3	30
4	16
5	23
6	11
7	31
8	15
9	28
10	14
11	8
12	7
13	14
14	19
15	11
16	26
17	17
18	6
19	15

Tabla 13.2: Características de la instancia P-n19-k2

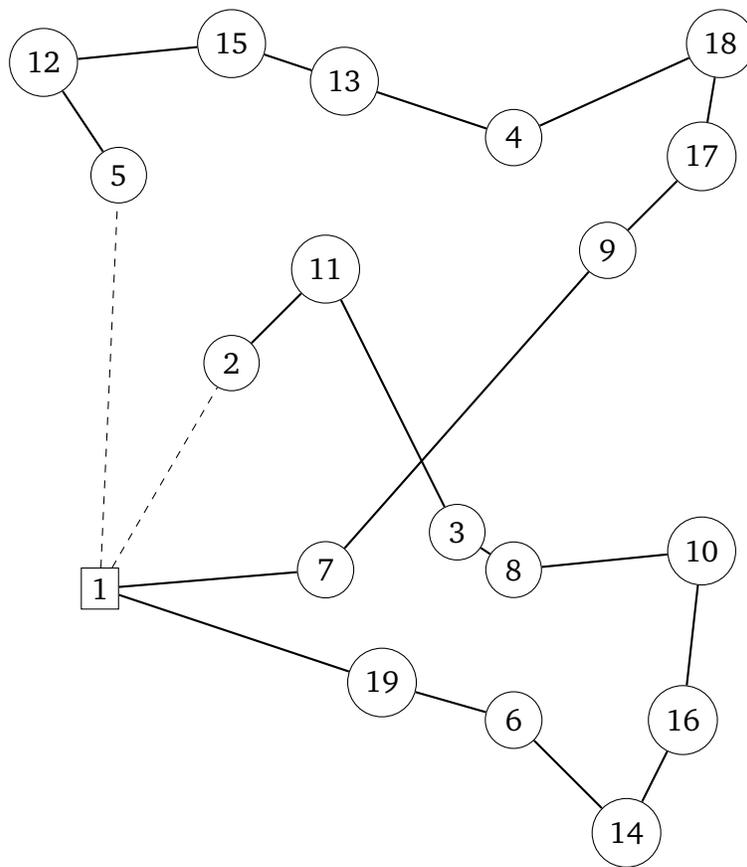


Figura 13.4: Trazado de rutas para la instancia P-n19-k2

### 13.4. P-n20-k2

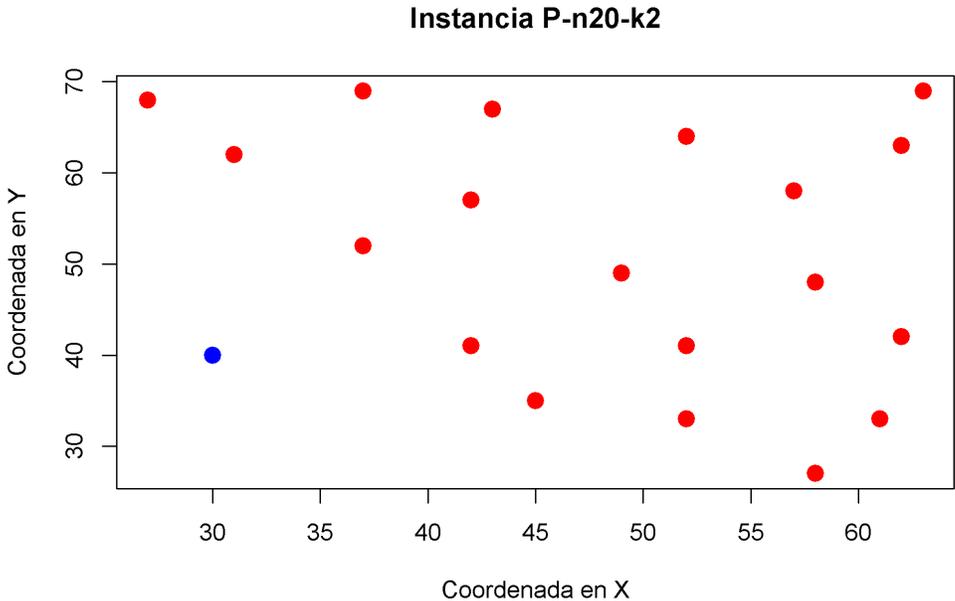


Figura 13.5: Ubicación de nodos de la instancia P-n20-k2

<b>Característica</b>	
Dimensión	20
Capacidad	160
Vehículos	2
Valor óptimo	216

<b>Nodo</b>	<b>Demanda</b>
1	0
2	19
3	30
4	16
5	23
6	11
7	31
8	15
9	28
10	8
11	8
12	7
13	14
14	6
15	19
16	11
17	26
18	17
19	6
20	15

Tabla 13.3: Características de la instancia P-n20-k2

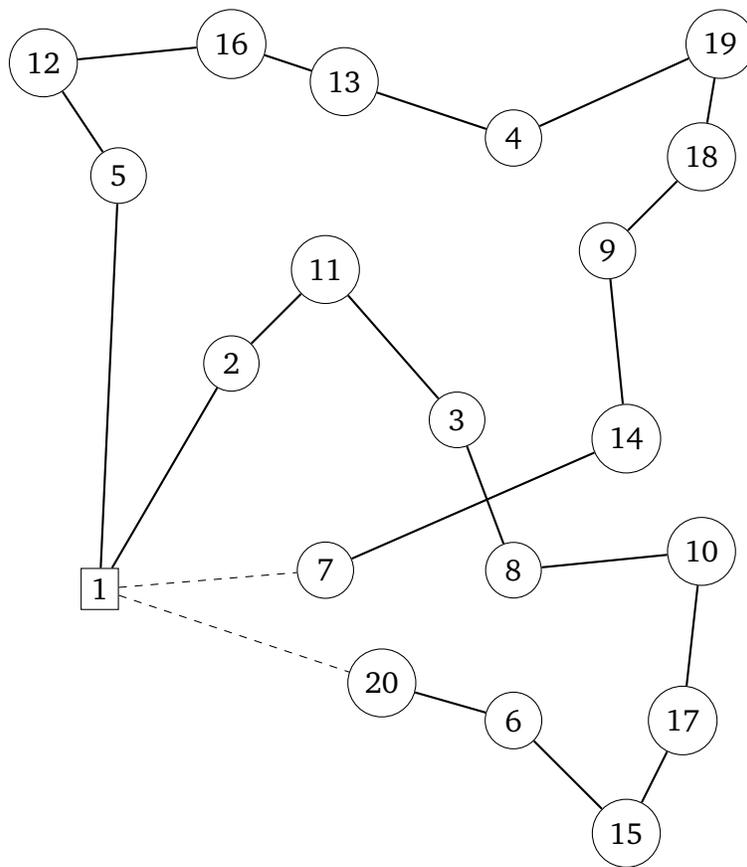


Figura 13.6: Trazado de rutas para la instancia P-n20-k2

### 13.5. P-n21-k2

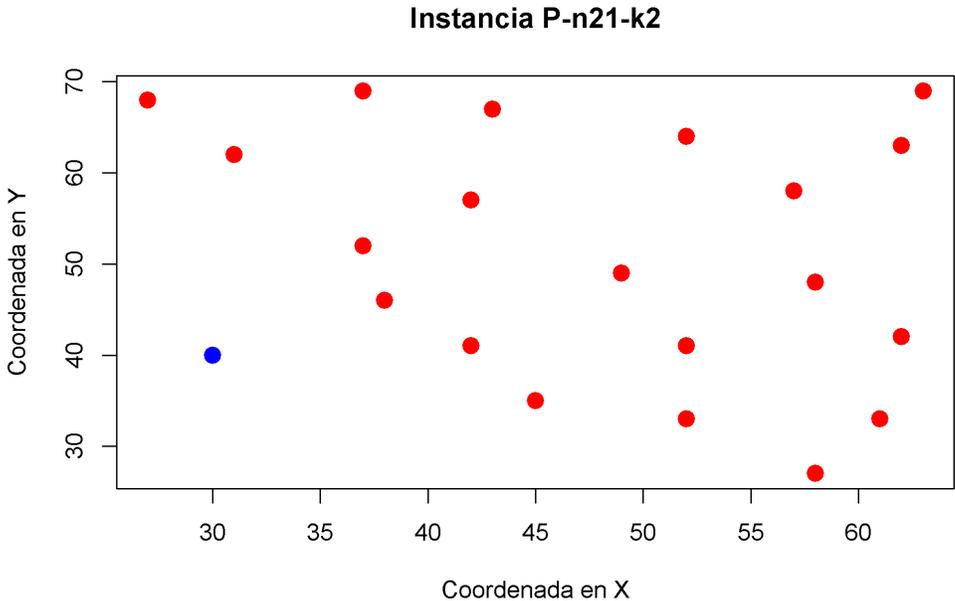


Figura 13.7: Ubicación de nodos de la instancia P-n21-k2

<b>Característica</b>	
Dimensión	21
Capacidad	160
Vehículos	2
Valor óptimo	211

<b>Nodo</b>	<b>Demanda</b>
1	0
2	7
3	30
4	16
5	23
6	11
7	19
8	15
9	28
10	8
11	8
12	7
13	14
14	6
15	19
16	11
17	12
18	26
19	17
20	6
21	15

Tabla 13.4: Características de la instancia P-n21-k2

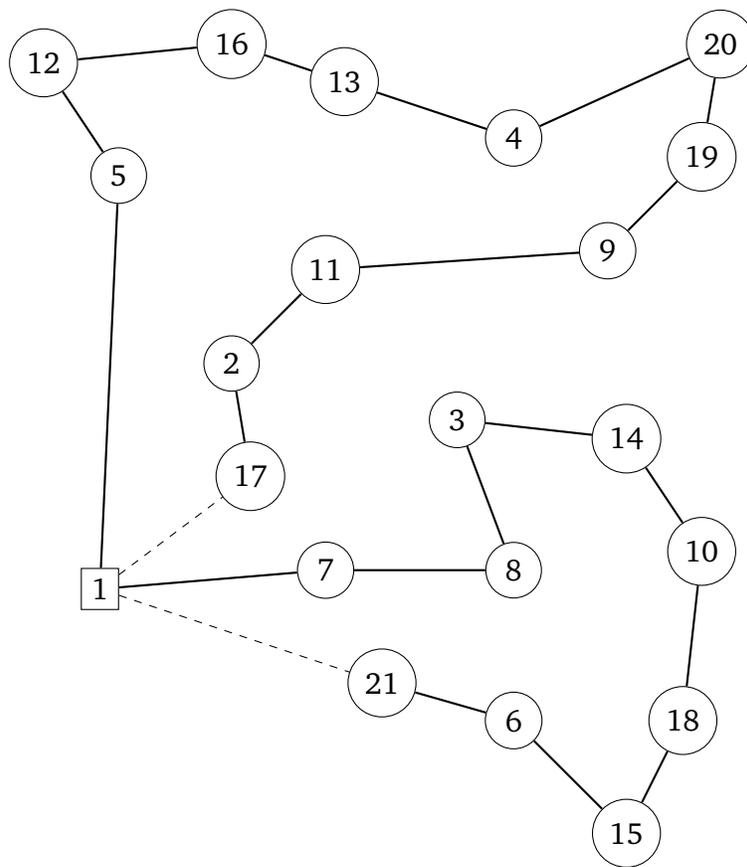


Figura 13.8: Trazado de rutas para la instancia P-n21-k2

### 13.6. P-n22-k2

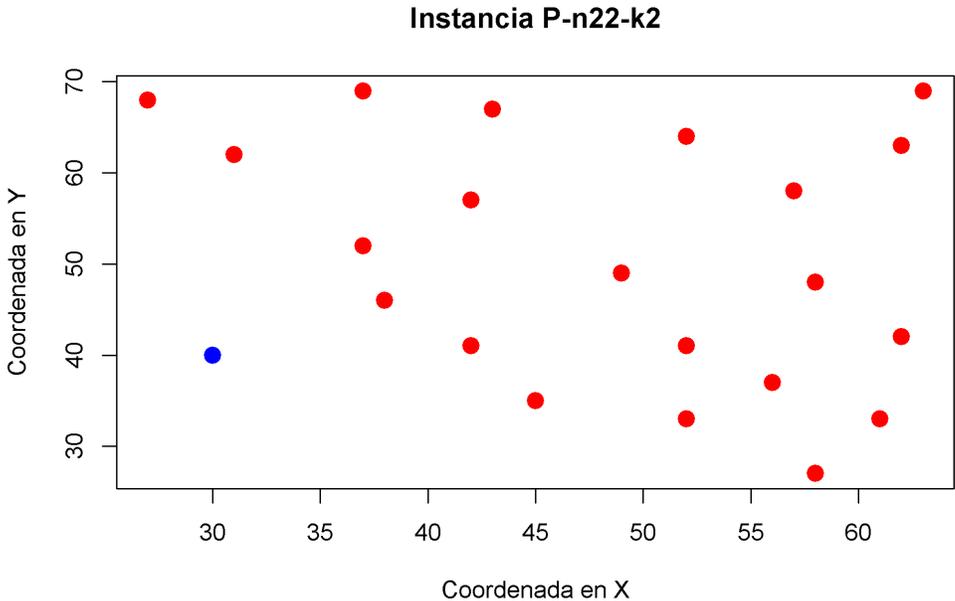


Figura 13.9: Ubicación de nodos de la instancia P-n22-k2

<b>Característica</b>	
Dimensión	22
Capacidad	160
Vehículos	2
Valor óptimo	216

<b>Nodo</b>	<b>Demanda</b>
1	0
2	7
3	30
4	16
5	23
6	11
7	19
8	15
9	28
10	8
11	8
12	7
13	14
14	6
15	19
16	11
17	12
18	26
19	17
20	6
21	15
22	10

Tabla 13.5: Características de la instancia P-n22-k2

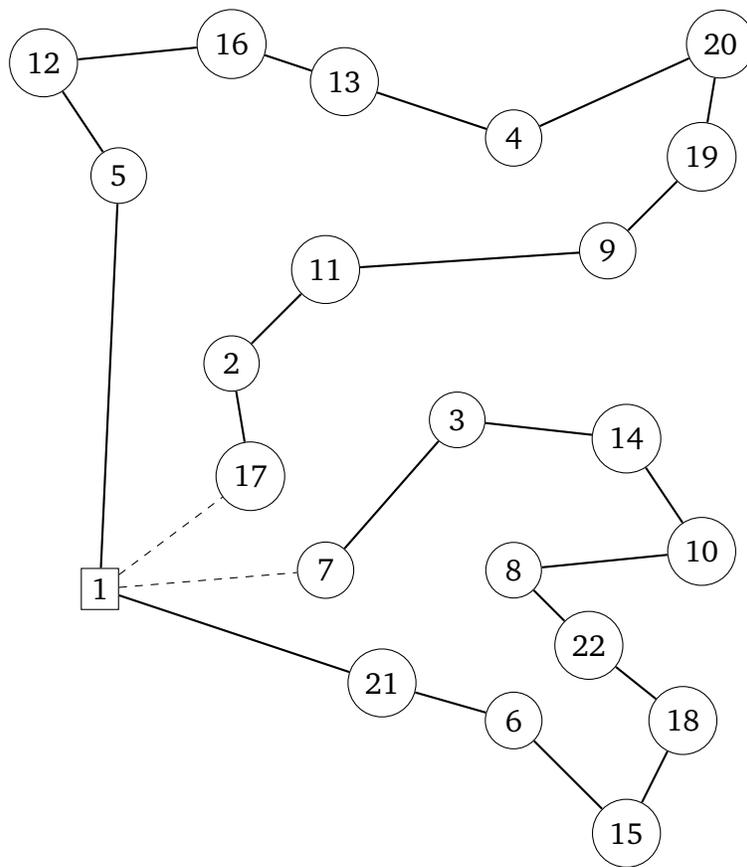


Figura 13.10: Trazado de rutas para la instancia P-n22-k2

### 13.7. P-n22-k8

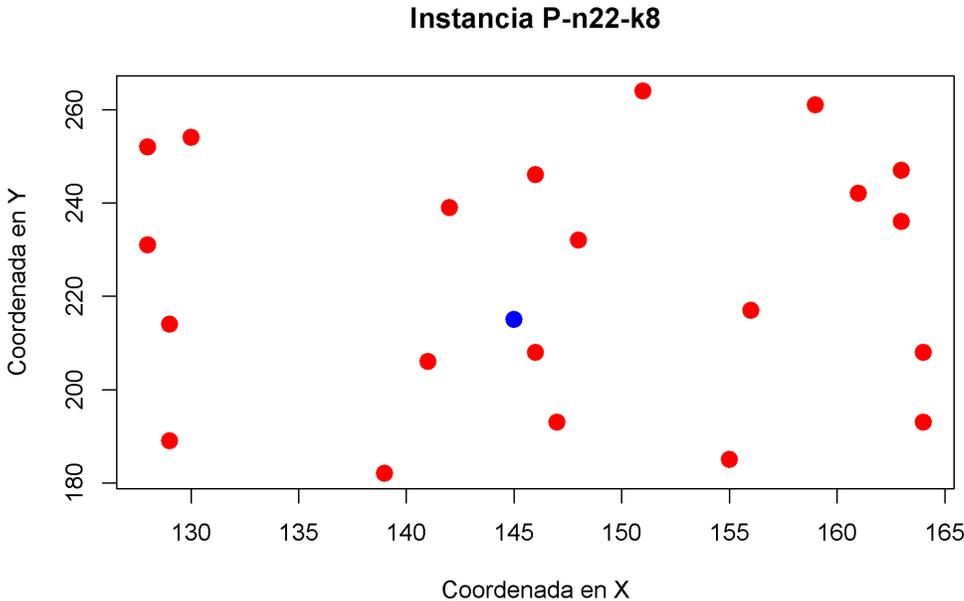


Figura 13.11: Ubicación de nodos de la instancia P-n22-k8

<b>Característica</b>	
Dimensión	22
Capacidad	3000
Vehículos	8
Valor óptimo	603

<b>Nodo</b>	<b>Demanda</b>
1	0
2	1100
3	700
4	800
5	1400
6	2100
7	400
8	800
9	100
10	500
11	600
12	1200
13	1300
14	1300
15	300
16	900
17	2100
18	1000
19	900
20	2500
21	1800
22	700

Tabla 13.6: Características de la instancia P-n22-k8

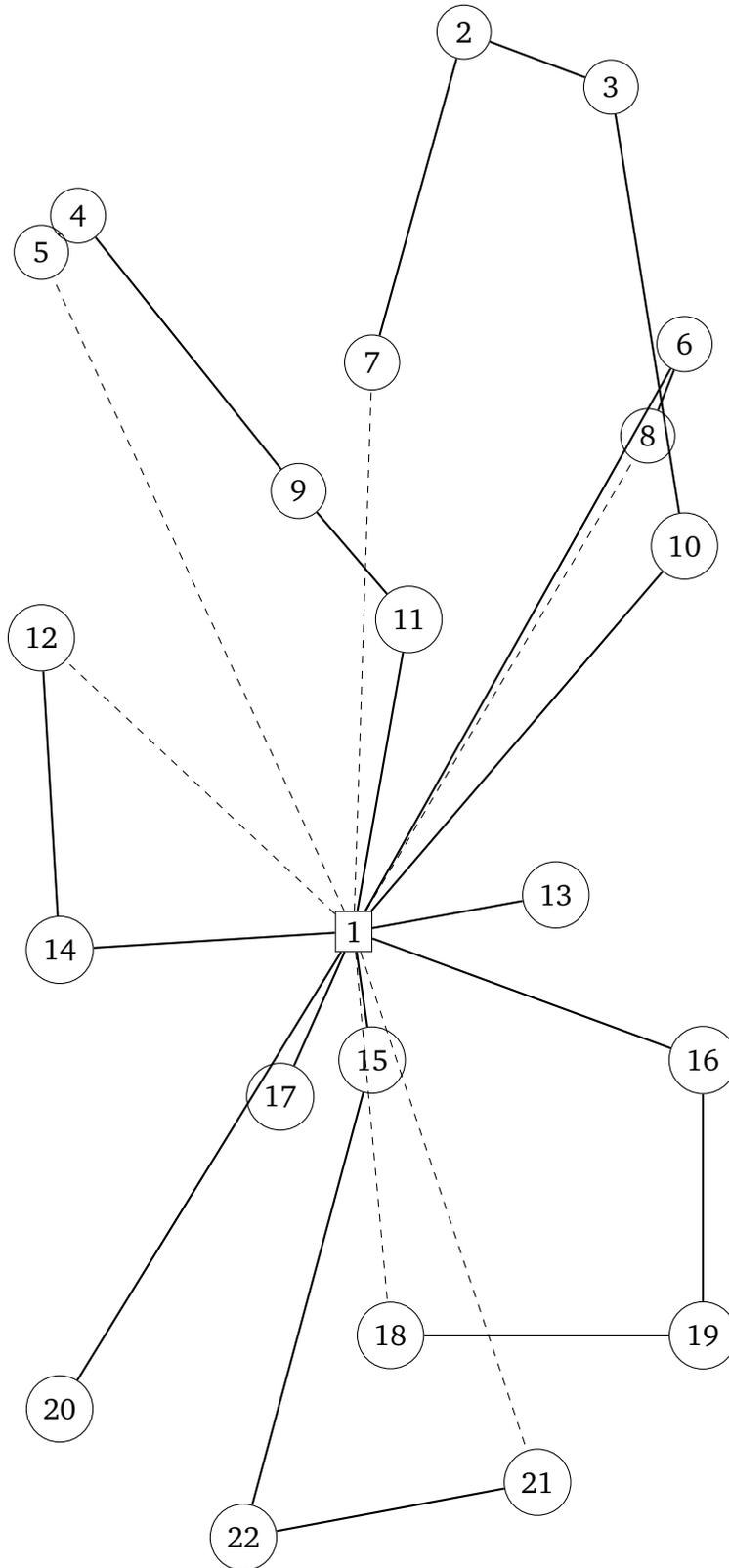


Figura 13.12: Trazado de rutas para la instancia P-n22-k8

### 13.8. P-n23-k8

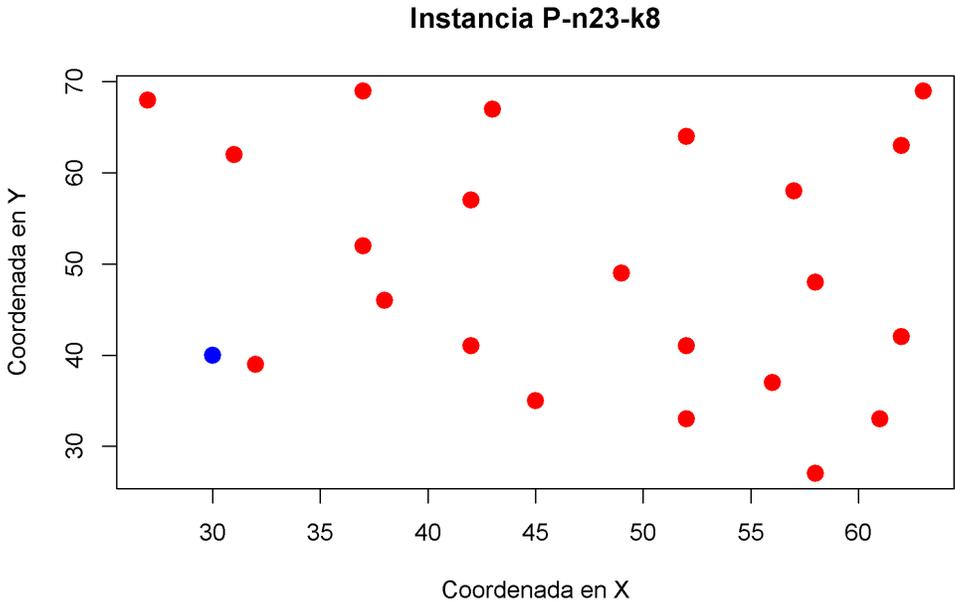


Figura 13.13: Ubicación de nodos de la instancia P-n23-k8

<b>Característica</b>	
Dimensión	23
Capacidad	40
Vehículos	8
Valor óptimo	529

<b>Nodo</b>	<b>Demanda</b>
1	0
2	7
3	30
4	16
5	23
6	11
7	19
8	15
9	28
10	8
11	8
12	7
13	14
14	6
15	19
16	11
17	12
18	26
19	17
20	6
21	15
22	5
23	10

Tabla 13.7: Características de la instancia P-n23-k8

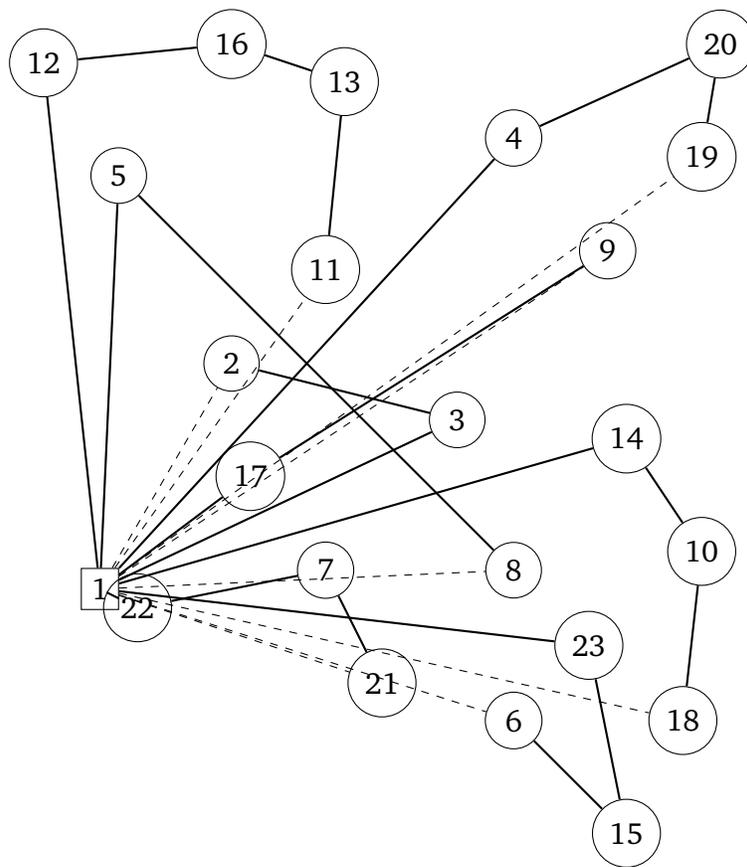


Figura 13.14: Trazado de rutas para la instancia P-n23-k8

### 13.9. P-n40-k5

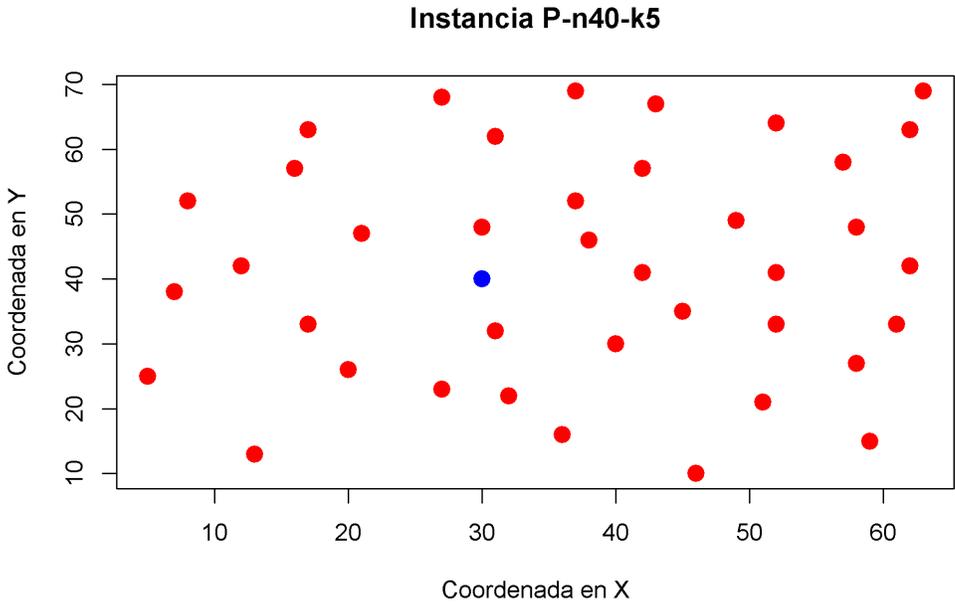


Figura 13.15: Ubicación de nodos de la instancia P-n40-k5

<b>Característica</b>			
Dimensión		40	
Capacidad		140	
Vehículos		5	
Valor óptimo		458	

<b>Nodo</b>	<b>Demanda</b>	<b>Nodo</b>	<b>Demanda</b>
1	0	21	28
2	7	22	8
3	30	23	8
4	16	24	16
5	9	25	10
6	21	26	28
7	15	27	7
8	19	28	15
9	23	29	14
10	11	30	6
11	5	31	19
12	19	32	11
13	29	33	12
14	23	34	23
15	21	35	26
16	10	36	17
17	15	37	6
18	3	38	9
19	41	39	15
20	9	40	14

Tabla 13.8: Características de la instancia P-n40-k5

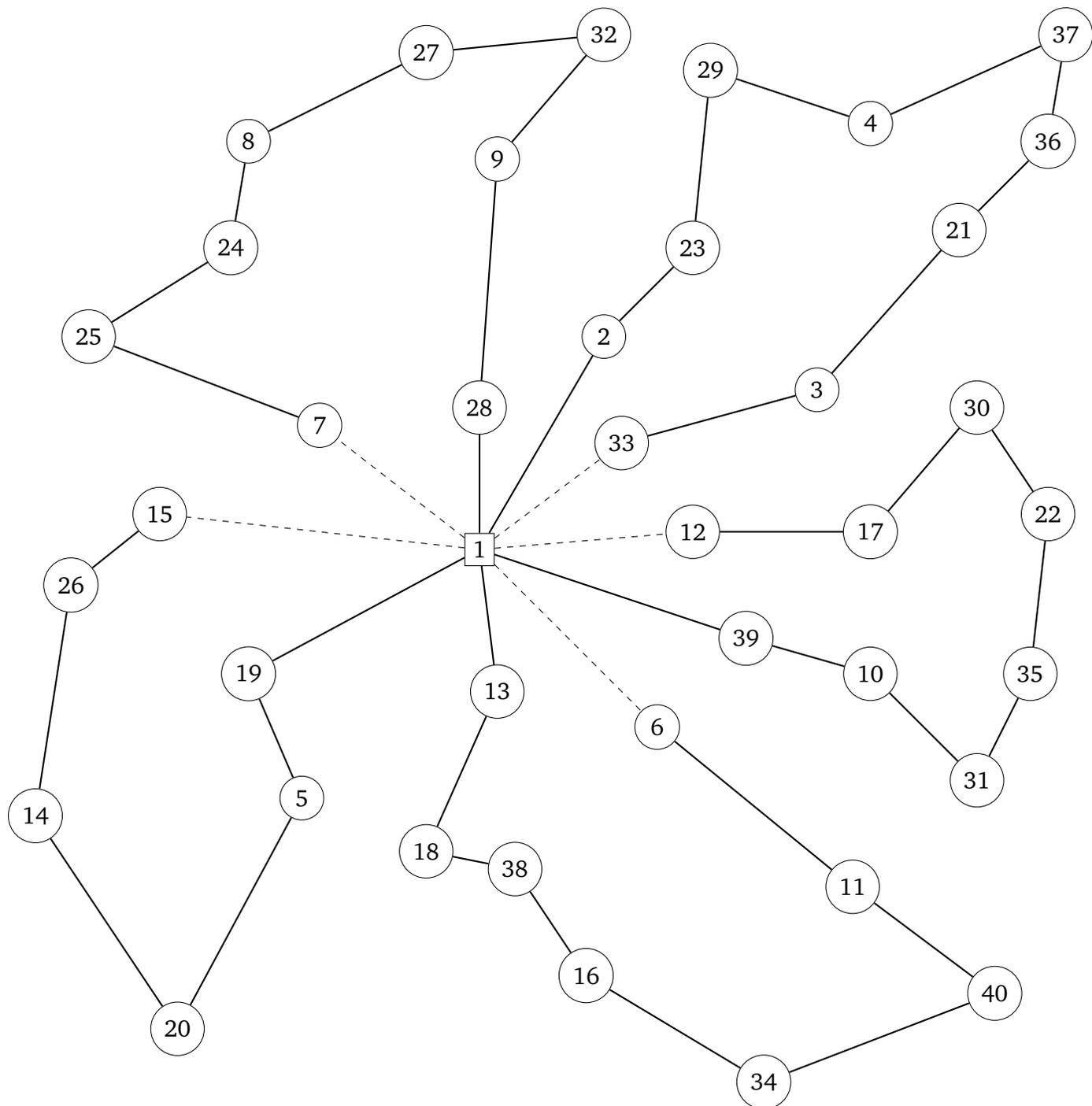


Figura 13.16: Trazado de rutas para la instancia P-n40-k5

### 13.10. P-n45-k5

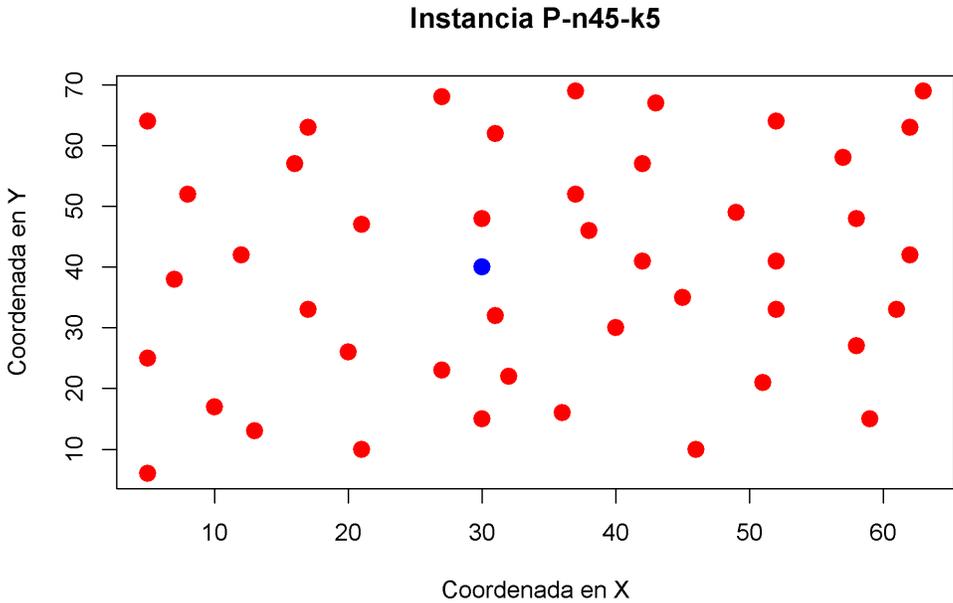


Figura 13.17: Ubicación de nodos de la instancia P-n45-k5

<b>Característica</b>	
Dimensión	45
Capacidad	150
Vehículos	5
Valor óptimo	510

<b>Nodo</b>	<b>Demanda</b>	<b>Nodo</b>	<b>Demanda</b>
1	0	24	16
2	7	25	10
3	30	26	28
4	16	27	7
5	9	28	15
6	21	29	14
7	15	30	6
8	19	31	19
9	23	32	11
10	11	33	12
11	5	34	23
12	19	35	26
13	29	36	17
14	23	37	6
15	21	38	9
16	10	39	15
17	15	40	14
18	3	41	7
19	41	42	27
20	9	43	13
21	28	44	11
22	8	45	16
23	8		

Tabla 13.9: Características de la instancia P-n45-k45

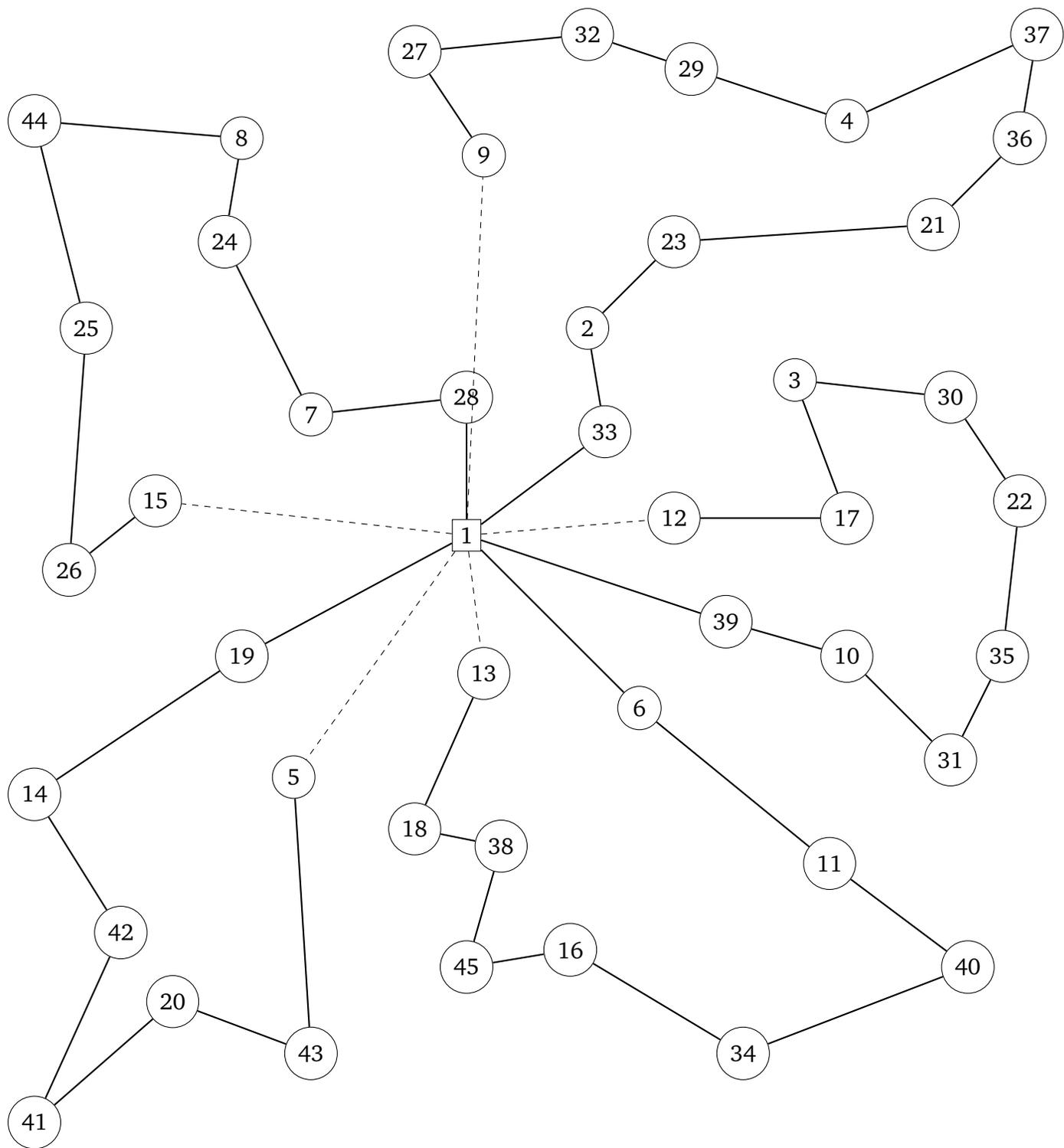


Figura 13.18: Trazado de rutas para la instancia P-n45-k5

# 14

## Resultados

En concordancia con lo descrito en la sección 13, y siguiendo los pasos de la sección 12, se presenta un resumen general de los resultados, así como los hallazgos de interés individuales de las 9 instancias corridas en 100 escenarios estocásticos.

Cabe mencionar que para diferenciar un escenario estocástico de otro, se hace referencia a estos siguiendo la siguiente estructura:

$$I - nN - kK - nN^* - dD^*$$

Donde:

$I$  = clave del conjunto de instancias

$N$  = número total de nodos

$K$  = número total de vehículos

$N^*$  = nodo a variar en el escenario estocástico

$D^*$  = demanda a variar en el escenario estocástico

## 14.1. Resultados Generales

La tabla 14.1 presenta una revisión general de las variables de interés de las 9 instancias trabajadas, donde cada valor se define o se calcula como:

1. Instancia: Es el nombre de la instancia en librerías, siguiendo la nomenclatura descrita en la primera parte del capítulo 14.
2. Valor determinístico: Es el valor de la función objetivo de los casos de prueba sin considerar escenarios estocásticos, como se presenta en el capítulo 13.
3. Valor mínimo: Es el mínimo valor que tomó la función objetivo para un escenario estocástico en particular de cada instancia.
4. Valor medio: Es el promedio de todos los valores de función objetivo resultantes de los escenarios estocásticos para cada instancia.
5. Valor máximo: Es el valor máximo que tomó la función objetivo para un escenario estocástico en particular de cada instancia.
6. Desviación: Es la desviación estándar de los valores de función objetivo resultantes de los escenarios estocásticos.
7. Absmigap: Es el promedio de los valores absolutos del GAP, es decir, de la brecha inexplorada del proceso, calculados individualmente como:

$$GAP = LimiteSuperior - LimiteInferior$$

Relmigap: Es el promedio de los valores relativos del GAP, es decir, de la brecha inexplorada del proceso, calculados individualmente como:

$$GAP = \frac{LimiteSuperior - LimiteInferior}{LimiteSuperior}$$

Instancia	VALORES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO							
	Determinístico	Mínimo	Media	Máximo	Desviación	Absmigap	Relmigap	Tiempo
P-n16-k8	450	421	449.26	473	6.55	0.0000000	0.0000000	6.68
P-n19-k2	212	195	210.26	229	7.90	0.0000000	0.0000000	5.05
p-n20-k2	216	204	214.97	237	4.55	0.0000000	0.0000000	4.35
P-n21-k2	211	211	211.00	211	0.00	0.0000000	0.0000000	3.43
P-n22-k2	216	210	217.00	224	1.95	0.0000000	0.0000000	4.52
P-n22-k8	603	590	590.00	590	0.00	0.0000000	0.0000000	34.60
P-n23-k8	529	508	530.54	555	7.89	0.2811585	0.0005146	1502.70
P-n40-k5	458	450	458.00	461	1.26	0.0000000	0.0000000	565.00
P-n45-k5	510	507	510.73	517	1.97	8.1547486	0.0161194	7334.38

Tabla 14.1: Resultados generales

## 14.2. P-n16-k8

En esta primera instancia ocurrió un evento interesante, ya que en uno de los 100 escenarios estocásticos, el valor de demanda generado por medio de la distribución de probabilidad Poisson (45 unidades), superó el valor de la capacidad del vehículo (35 unidades); el modelo empleado en este trabajo no puede procesar la información en estas situaciones, ya que sería infactible realizar la entrega del producto para este nodo, por lo cual se consideraron dos posibilidades:

1. Restringir en el código generador de aleatorios descrito en la sección 16.2, para que el valor máximo de la demanda generada fuera la capacidad del vehículo por cada instancia.
2. Agregar un nodo  $n'$  en las mismas coordenadas  $(x, y)$  del nodo cuya demanda superar la capacidad del vehículo, y asignar las demandas a cada nodo así:

$$D_n = Q$$

$$D_{n'} = D^* - Q$$

Esto es, asignar al nodo original  $n$  un valor de demanda igual a la capacidad del vehículo, y al nodo duplicado  $n'$ , un valor de demanda igual a la diferencia entre la demanda generada en el escenario estocástico y la capacidad del vehículo.

Tras analizar ambos escenarios, y considerando la baja probabilidad de ocurrencia de este evento, se decide optar por el segundo enfoque, el cual solo ocurrió en una ocasión en las 900 corridas del modelo, específicamente en el escenario P-n16-k8-n9-d45, cuyo trazado de rutas se presenta en la figura 14.6, y por razones evidentes se presentó el mayor valor de la función objetivo ( $z=473$ ).

Esto también se puede comparar con la figura 14.7, que presenta las combinaciones n4-d6, n9-d17 y n9-d18, tres escenarios que arrojaron el menor valor de función objetivo ( $z=421$ ), y con la figura 14.8, el segundo escenario con mayor valor de función objetivo ( $z=463$ ), y que a diferencia del primero, mantiene el número de 16 nodos.

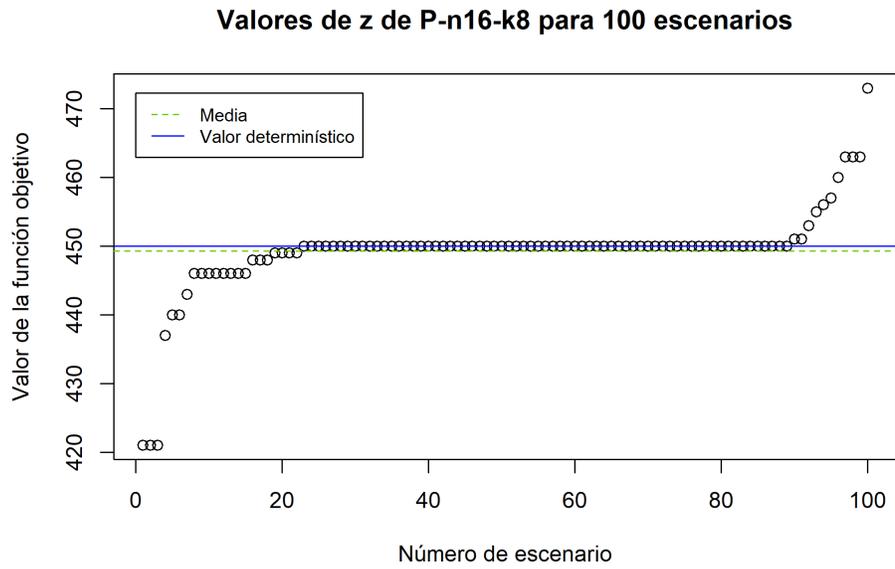


Figura 14.1: Valores de la función objetivo en la instancia P-n16-k8 para 100 escenarios estocásticos

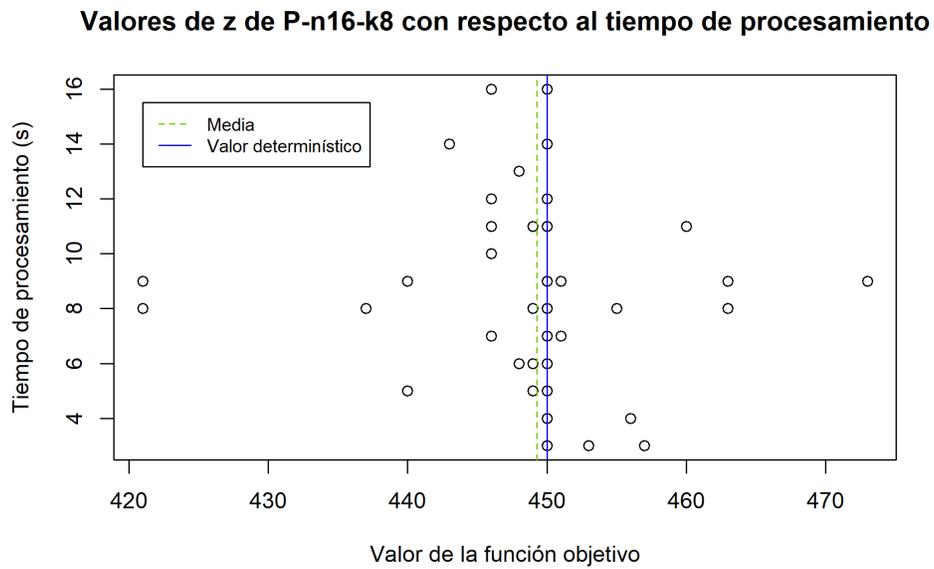


Figura 14.2: Valores de la función objetivo en la instancia P-n16-k8 con respecto al tiempo de procesamiento

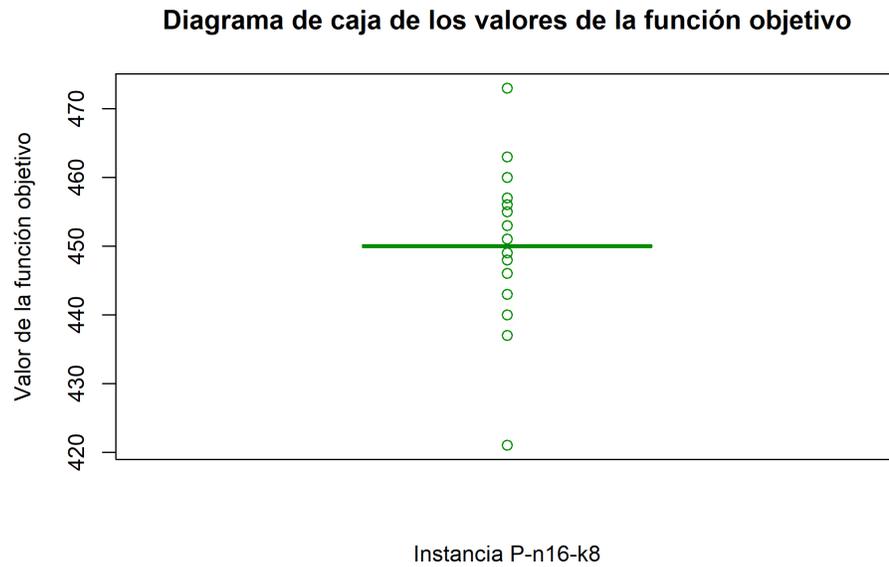


Figura 14.3: Diagrama de caja de los valores de la función objetivo en la instancia P-n16-k8

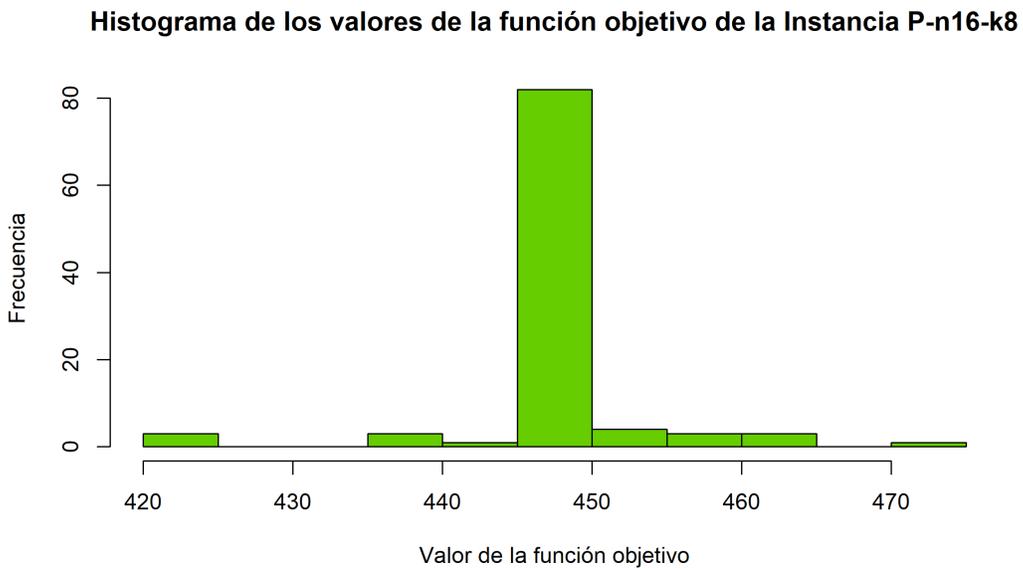


Figura 14.4: Histograma de los valores de la función objetivo de la instancia P-n16-k8 para 100 escenarios estocásticos

Diagrama de caja del tiempo de procesamiento

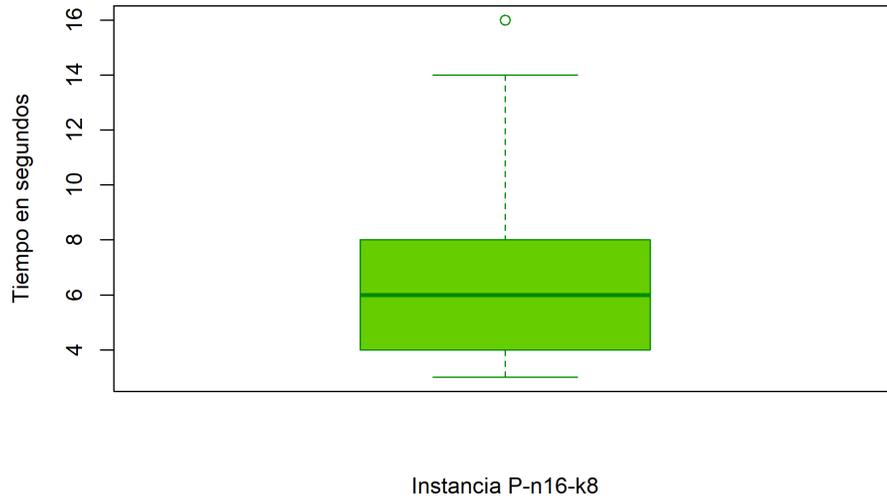


Figura 14.5: Diagrama de caja del tiempo de procesamiento de la instancia P-n16-k8

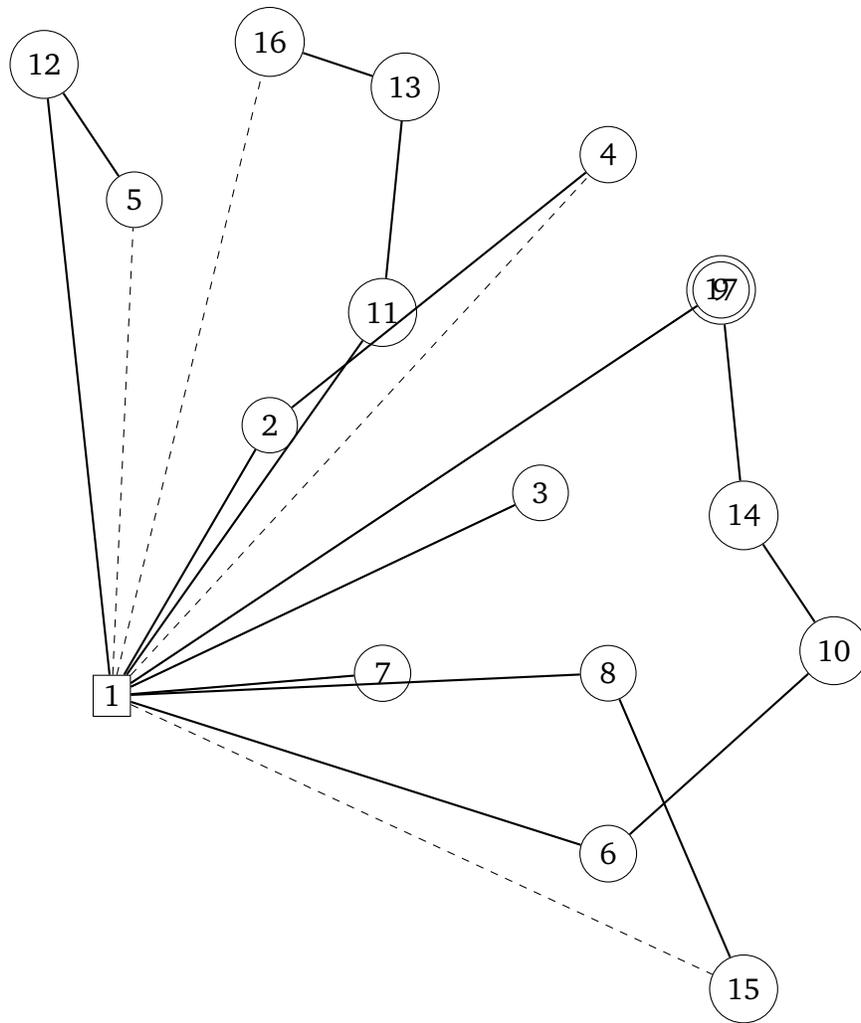


Figura 14.6: Trazado de rutas para P-n16-k8-n9-d45

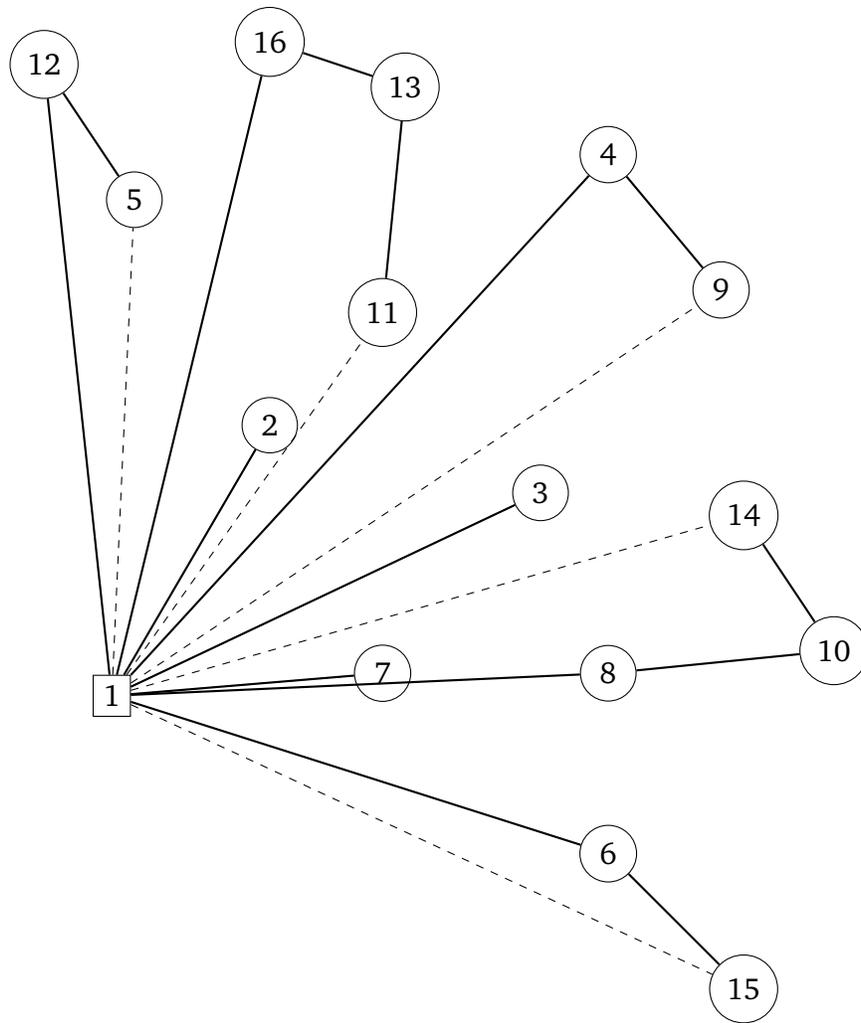


Figura 14.7: Trazado de rutas para P-n16-k8-n4-d6, P-n16-k8-n9-d17 y P-n16-k8-n9-d18

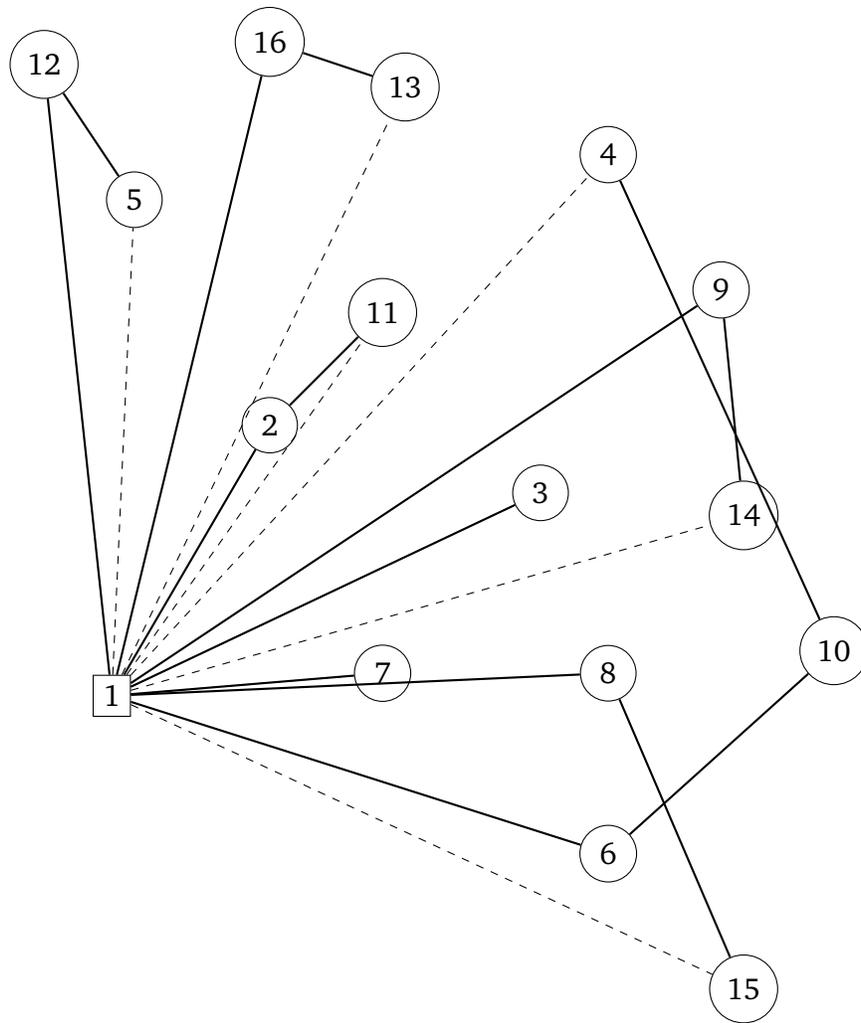


Figura 14.8: Trazado de rutas para P-n16-k8-n16-d16

### 14.3. P-n19-k2

En esta instancia se presenta la mayor variación de datos de las 9 instancias trabajadas; puede observarse en el diagrama de caja de la figura 14.11 los valores extremos que distan bastante de la media, y son la principal causa de esta desviación ( $\sigma=7.90$ ).

El gráfico 14.14 presenta uno de los escenarios con menor valor de la función objetivo, que se repitió en 18 ocasiones ( $z=195$ ), y el gráfico 14.15 presenta el mayor valor de la función objetivo ( $z=229$ ), que ocurrió en dos ocasiones.

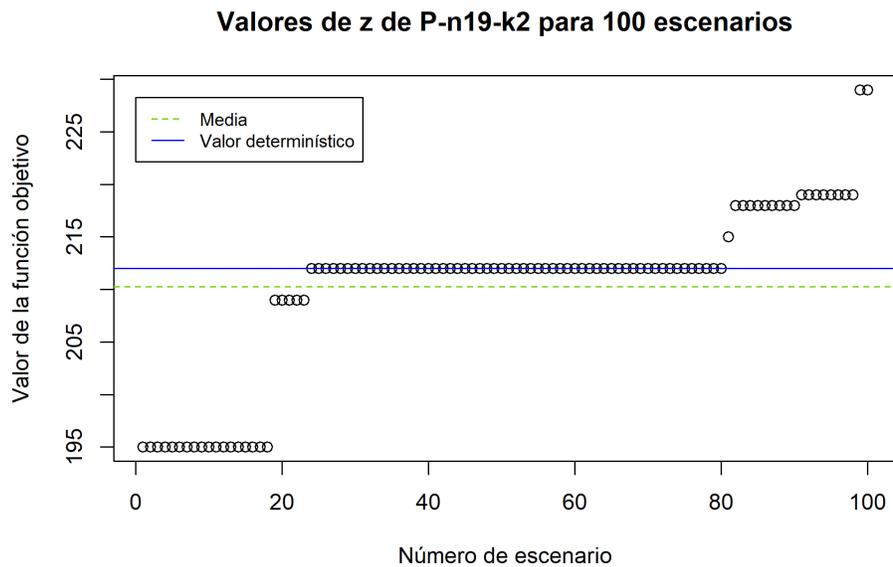


Figura 14.9: Valores de la función objetivo en la instancia P-n19-k2 para 100 escenarios estocásticos

**Valores de z de P-n19-k2 con respecto al tiempo de procesamiento**

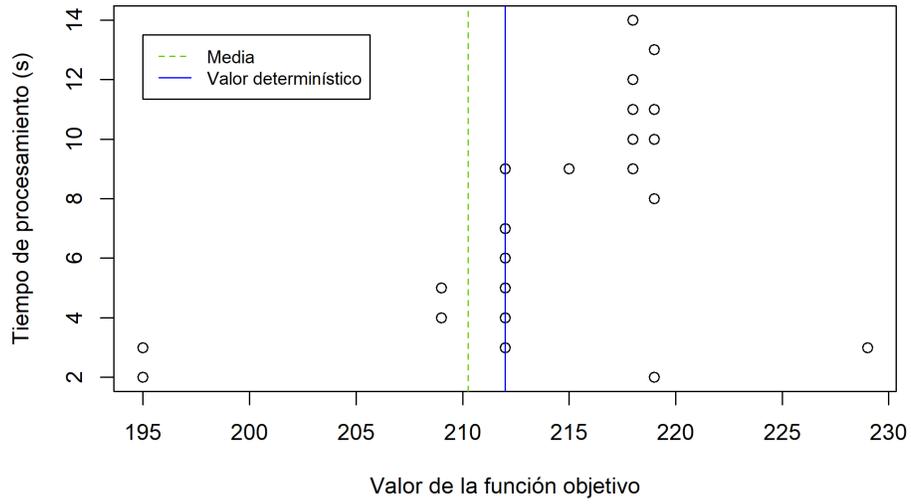


Figura 14.10: Valores de la función objetivo en la instancia P-n19-k2 con respecto al tiempo de procesamiento

**Diagrama de caja de los valores de la función objetivo**

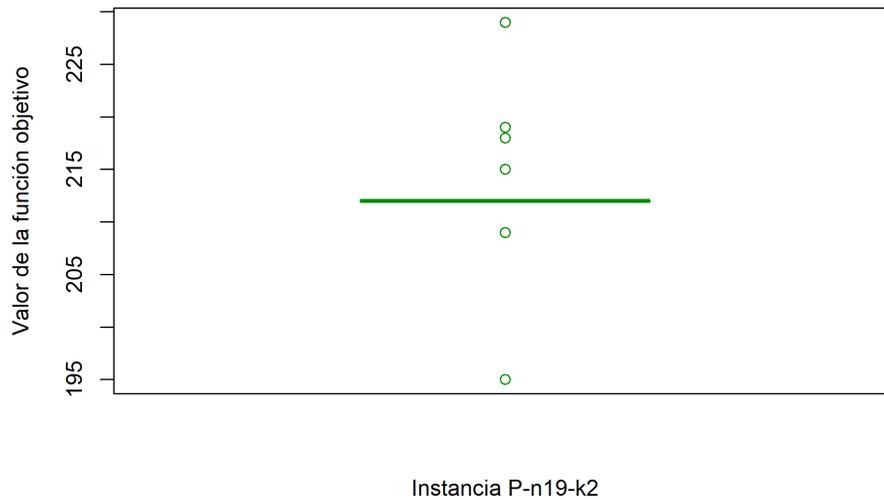


Figura 14.11: Diagrama de caja de los valores de la función objetivo en la instancia P-n19-k2

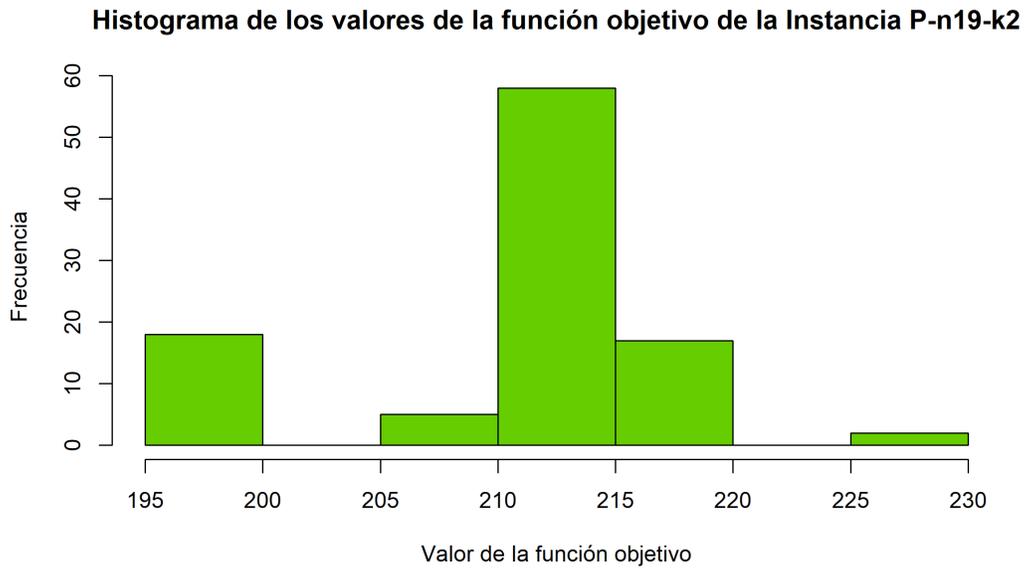


Figura 14.12: Histograma de los valores de la función objetivo de la instancia P-n19-k2 para 100 escenarios estocásticos

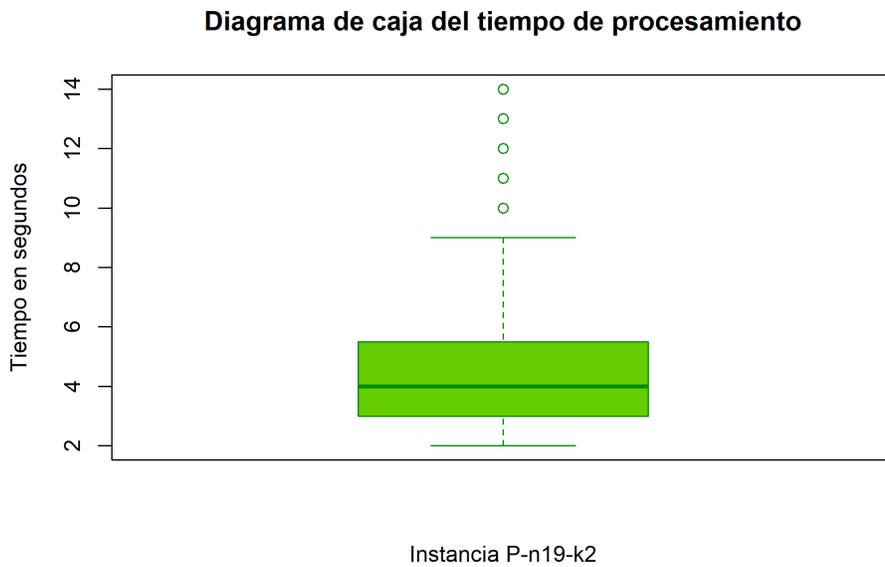


Figura 14.13: Diagrama de caja del tiempo de procesamiento de la instancia P-n19-k2

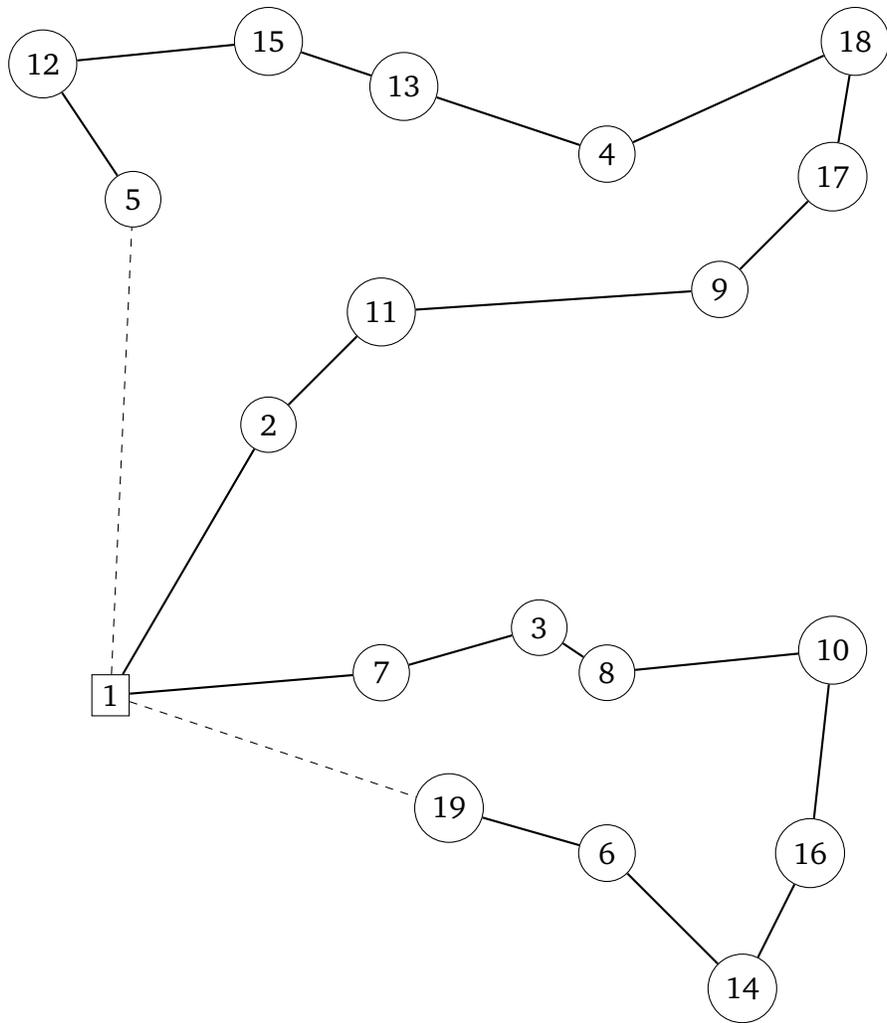


Figura 14.14: Trazado de rutas para P-n19-k2-n3-d28

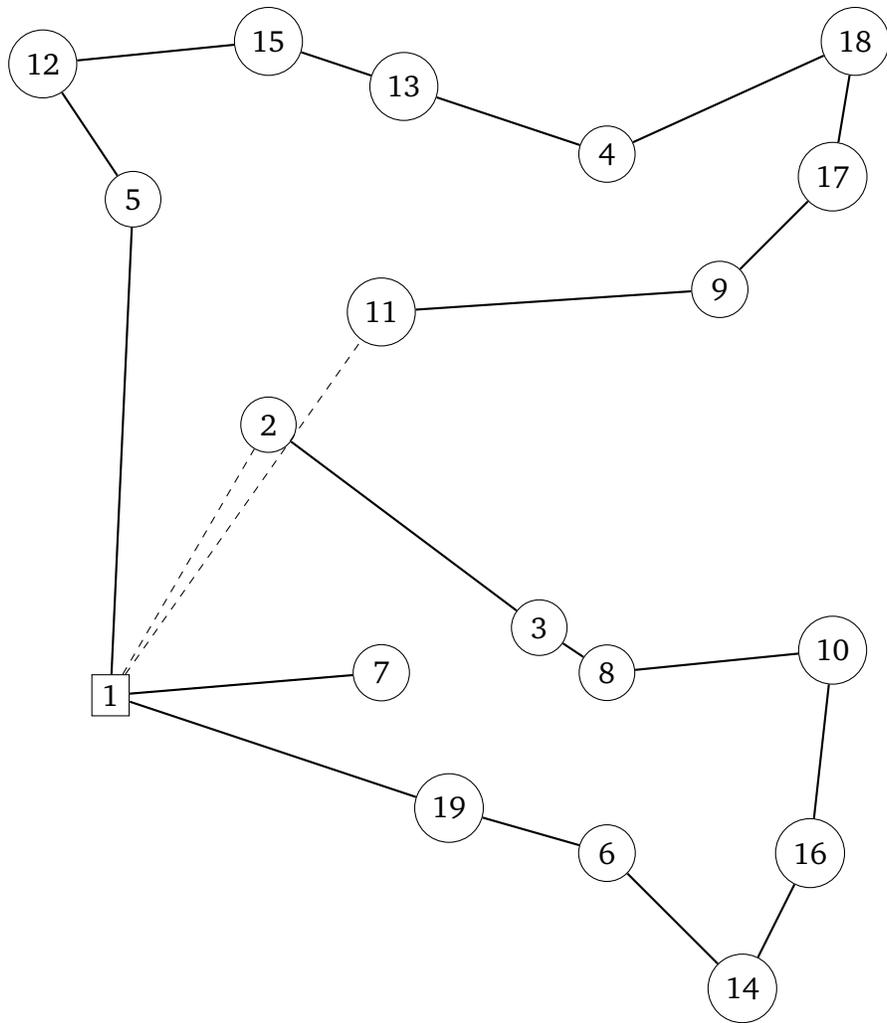


Figura 14.15: Trazado de rutas para P-n19-k2-n17-d29

## 14.4. P-n20-k2

En esta instancia, la generación de demandas aleatorias arrojó un valor de 0 para el nodo 14; a partir de ello se evaluaron los siguientes enfoques:

1. Restringir el código generador de aleatorios descrito en la sección 16.2, para que el valor mínimo de la demanda generada fuera 1, de esta forma para todos los cliente existiría una demanda a satisfacer y se evitaría el desplazamiento a un nodo que no se requería visitar.
2. Eliminar manualmente los datos asociados al nodo con demanda 0 en los parámetros del modelo para que no fuera visitado, en cada ocasión que esto ocurriera.
3. Reestructurar el modelo para que al identificar un nodo con demanda = 0, decidiera eliminarlo de los nodo a visitar.
4. Hacer nuevas generaciones de aleatorios para este nodo, hasta encontrar un valor de demanda distinto a 0.

Teniendo en cuenta que en este trabajo se empleó el enfoque Wait-and-see definido en la sección 9.1.6, se optó por aplicar la solución número 2, ya que la demanda de todos los clientes es siempre conocida antes de rutear; la opción número 3 también genera bastante interés, y se propondrá como un trabajo futuro para el mejoramiento del modelo.

El resultado obtenido puede observarse en la figura 14.21 que obtuvo el menor valor de función objetivo al tener un nodo menos al cual visitar ( $z=204$ ), y puede compararse con la figura 14.22, que presenta el trazado con mayor valor de función objetivo ( $z=221$ ) y mismo número de vehículos ( $k=2$ ).

También, en la figura 14.23 se presenta un tercer escenario en el cual se requirió emplear un tercer vehículo para satisfacer óptimamente la demanda de todos los clientes ( $z=237$ ,  $k=3$ ); es importante mencionar que esto no implica que los recorridos fueran infactibles con dos

vehículos, ya que puede existir la posibilidad de lograrlo pero recorriendo distancias más largas, sacrificando por tanto el valor de la función objetivo.

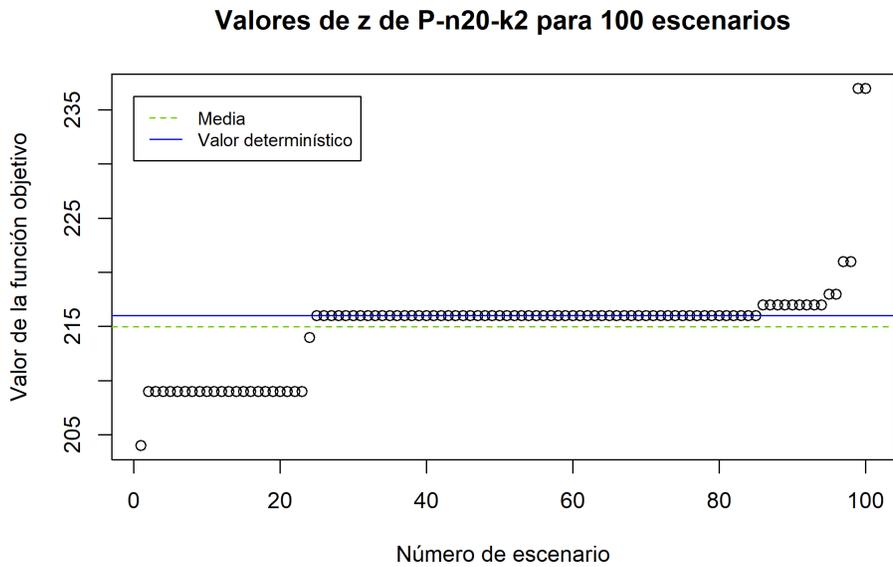


Figura 14.16: Valores de la función objetivo en la instancia P-n20-k2 para 100 escenarios estocásticos

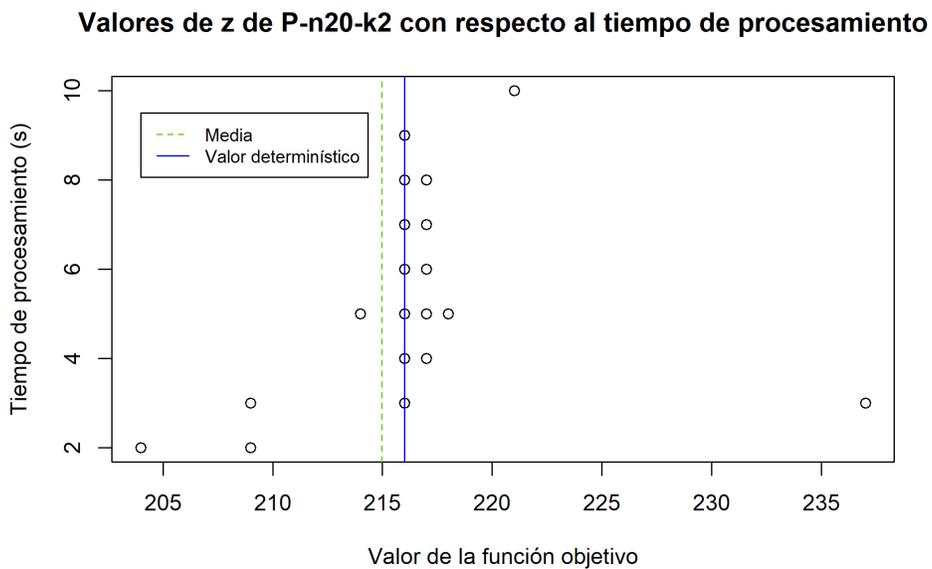


Figura 14.17: Valores de la función objetivo en la instancia P-n20-k2 con respecto al tiempo de procesamiento

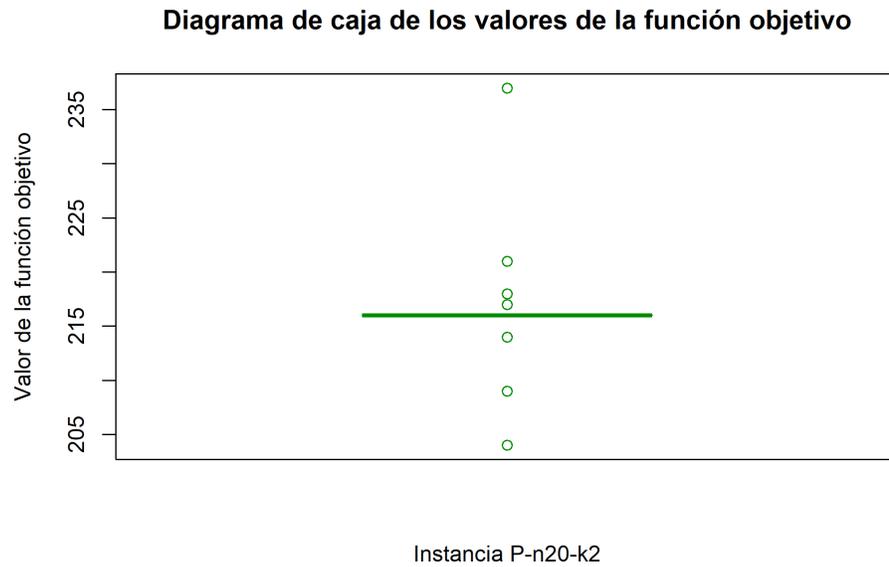


Figura 14.18: Diagrama de caja de los valores de la función objetivo en la instancia P-n20-k2

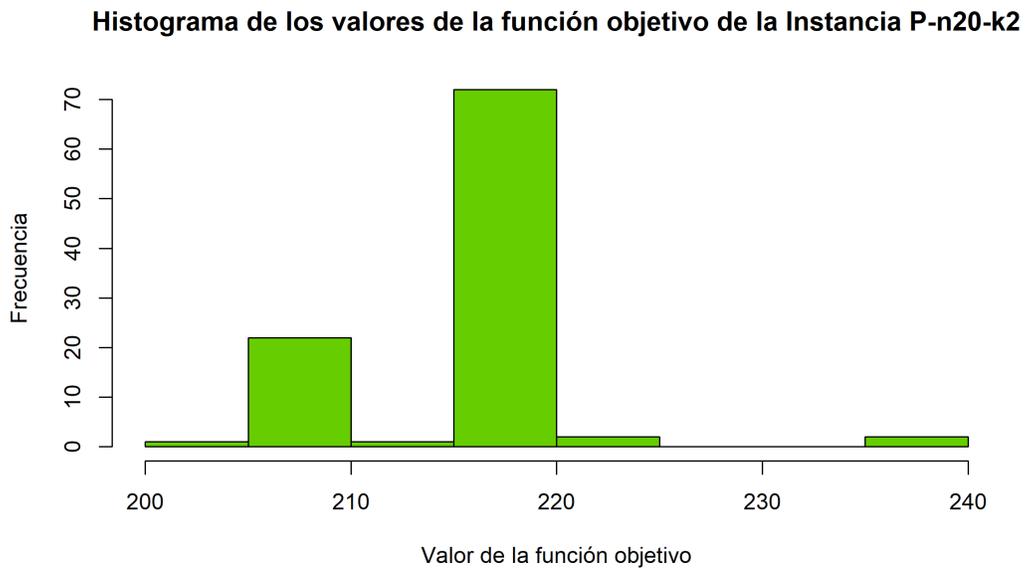


Figura 14.19: Histograma de los valores de la función objetivo de la instancia P-n20-k2 para 100 escenarios estocásticos

Diagrama de caja del tiempo de procesamiento

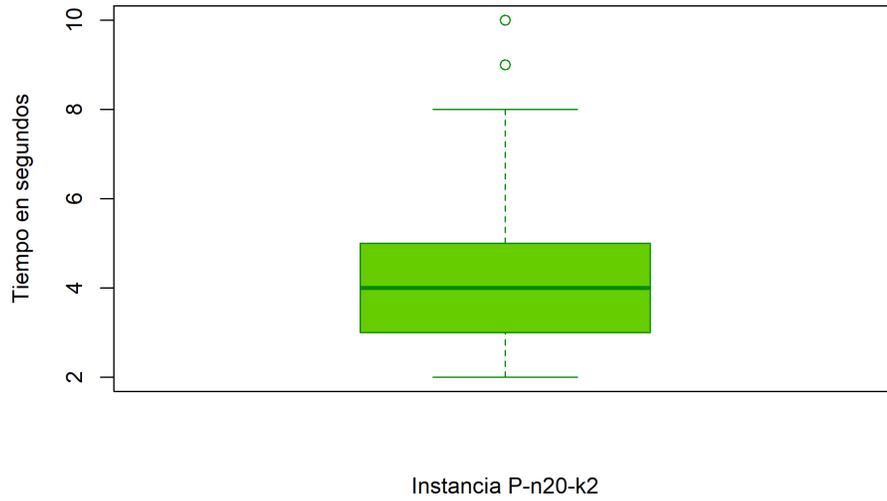


Figura 14.20: Diagrama de caja del tiempo de procesamiento de la instancia P-n20-k2

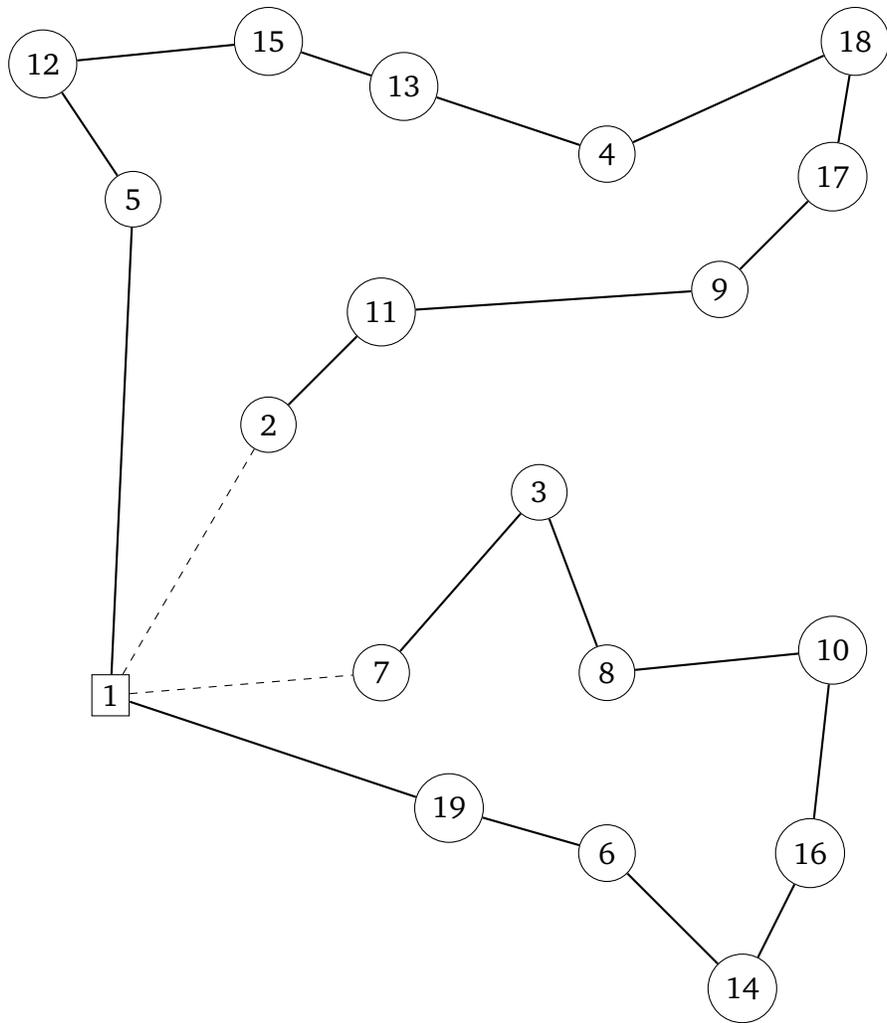


Figura 14.21: Trazado de rutas para P-n20-k2-n14-d0

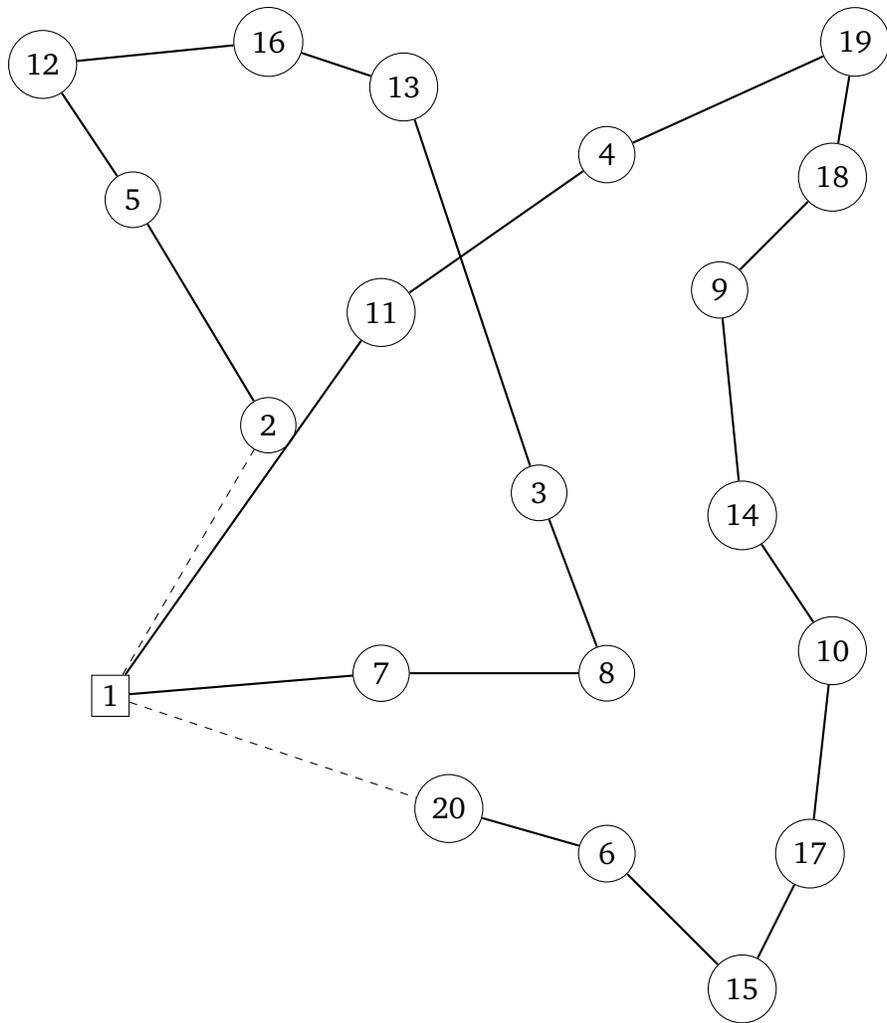


Figura 14.22: Trazado de rutas para P-n20-k2-n8-d25

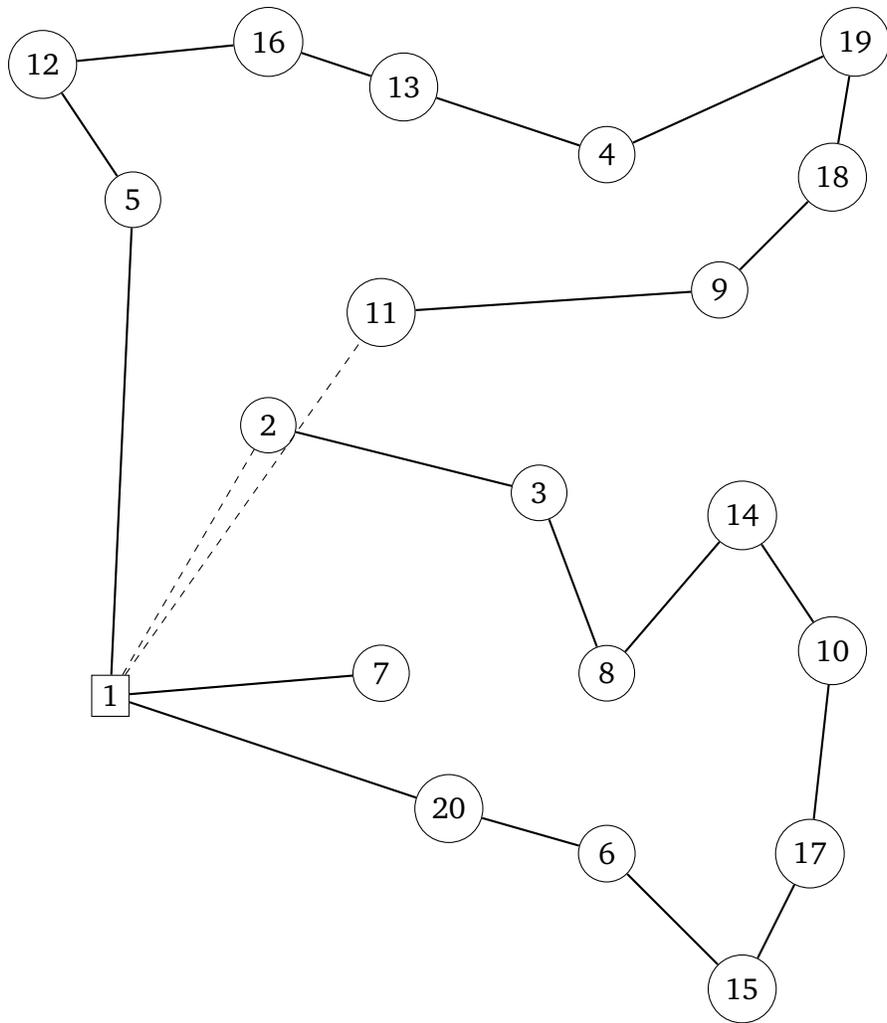


Figura 14.23: Trazado de rutas para P-n20-k2-n9-d45

## 14.5. P-n21-k2

Esta instancia presentó el menor valor promedio de tiempo de procesamiento ( $t=3.43$ ), y una muy baja variabilidad en segundos, como se visualiza en el diagrama de caja del gráfico 14.28; de igual manera, como se observa en las figuras 14.24, 14.25, 14.26 y 14.27, hubo nula variabilidad en los valores de la función objetivo.

Se graficaron algunos escenarios para verificar si habían soluciones con diferentes trazados de ruta y mismo valor de función objetivo, pero todos ellos arrojaron el mismo resultado, presentado en el gráfico 14.29.

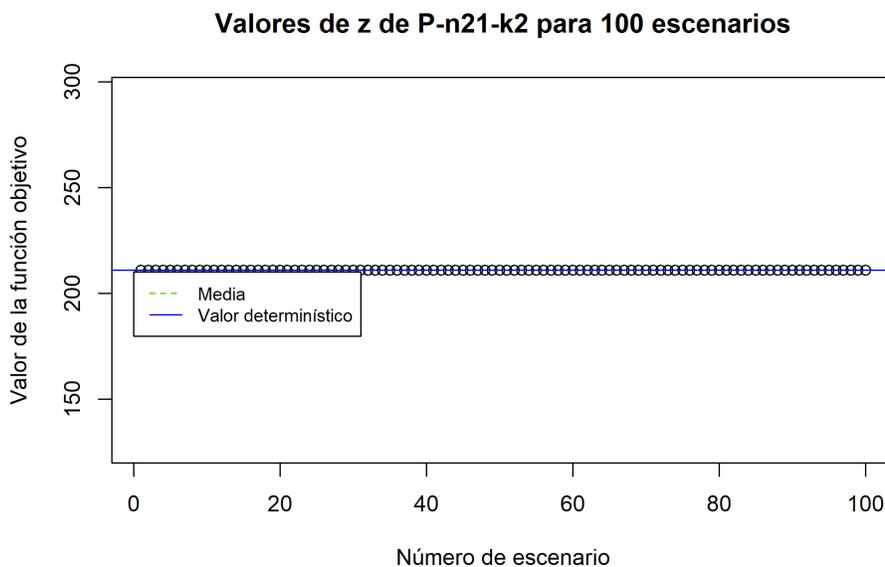


Figura 14.24: Valores de la función objetivo en la instancia P-n21-k2 para 100 escenarios estocásticos

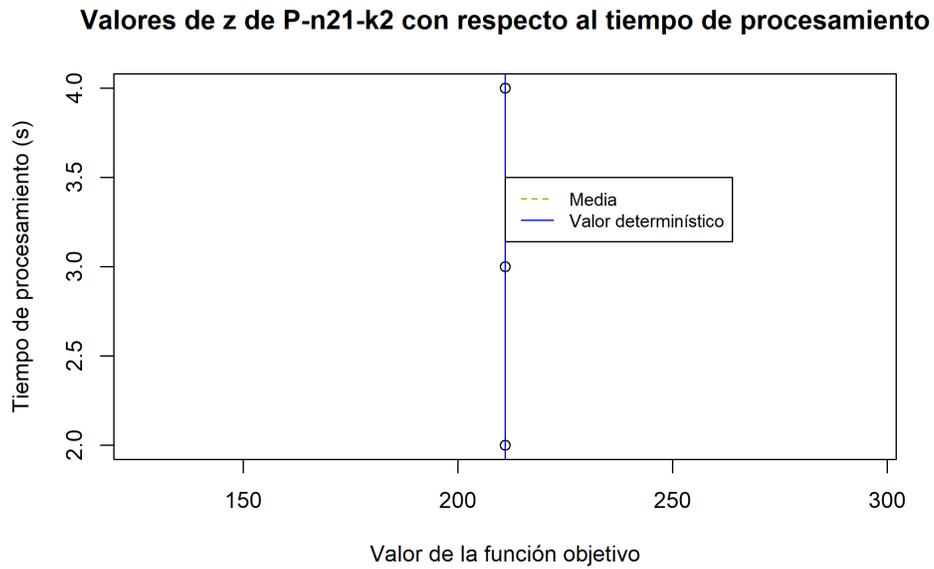


Figura 14.25: Valores de la función objetivo en la instancia P-n21-k2 con respecto al tiempo de procesamiento

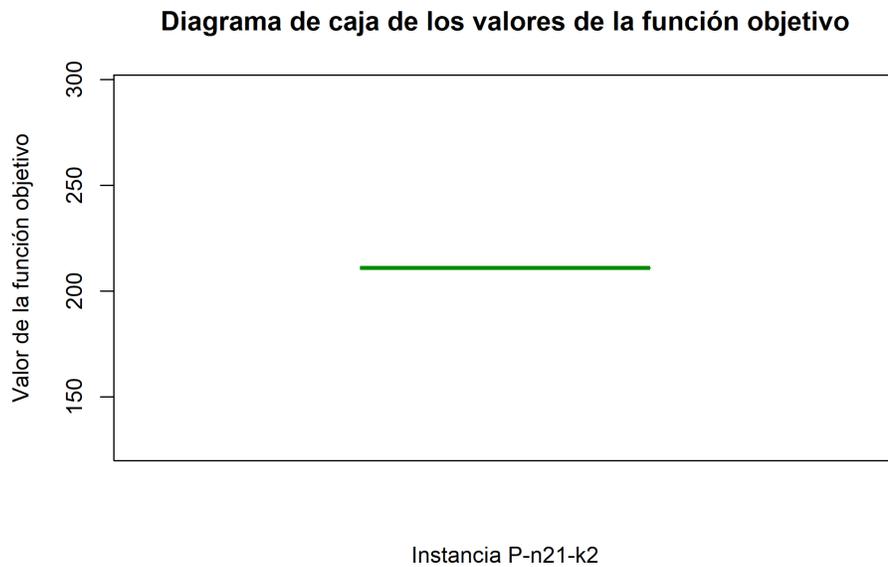


Figura 14.26: Diagrama de caja de los valores de la función objetivo en la instancia P-n21-k2

**Histograma de los valores de la función objetivo de la Instancia P-n21-k2**

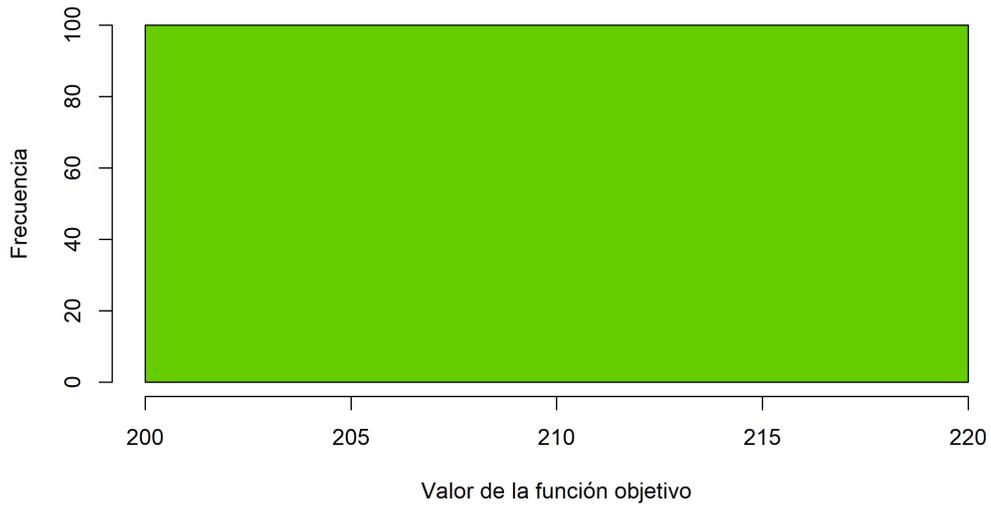


Figura 14.27: Histograma de los valores de la función objetivo de la instancia P-n21-k2 para 100 escenarios estocásticos

**Diagrama de caja del tiempo de procesamiento**

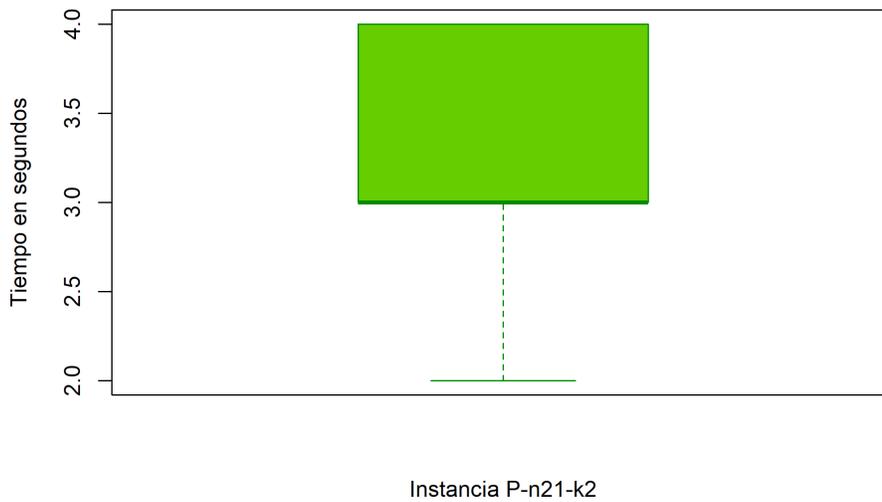


Figura 14.28: Diagrama de caja del tiempo de procesamiento de la instancia P-n21-k2

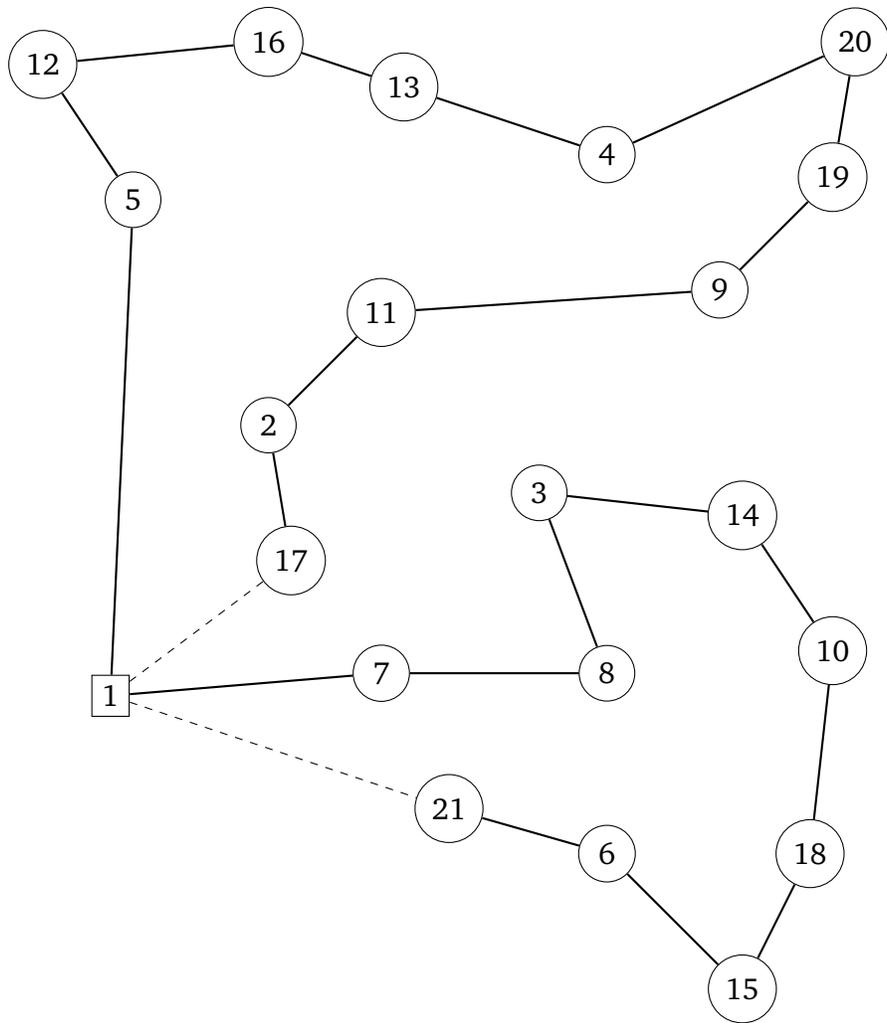


Figura 14.29: Trazado de rutas para P-n22-k2 en todos los escenarios estocásticos

# 14.6. P-n22-k2

En esta instancia también ocurrió lo descrito en la sección 14.4, puesto que en la generación de demandas aleatorias, la demanda del nodo 14 fue igual a 0; el resultado obtenido, siguiendo el mismo enfoque de suprimir el nodo, se presenta en la figura 14.35; esto ocasionó que el escenario tuviera el menor valor de función objetivo ( $z=210$ ), que dista en 6 unidades del siguiente escenario con menor valor de  $z$  (216), presentado en la figura 14.36; la figura 14.37 presenta el escenario con mayor valor de función objetivo ( $z=224$ ).

Otro hallazgo de interés se observa en el histograma de la figura 14.33, ya que se evidencia que la instancia solo tuvo 4 valores posibles de función objetivo, y dos de estos fueron valores extremos que solo ocurrieron una única vez.

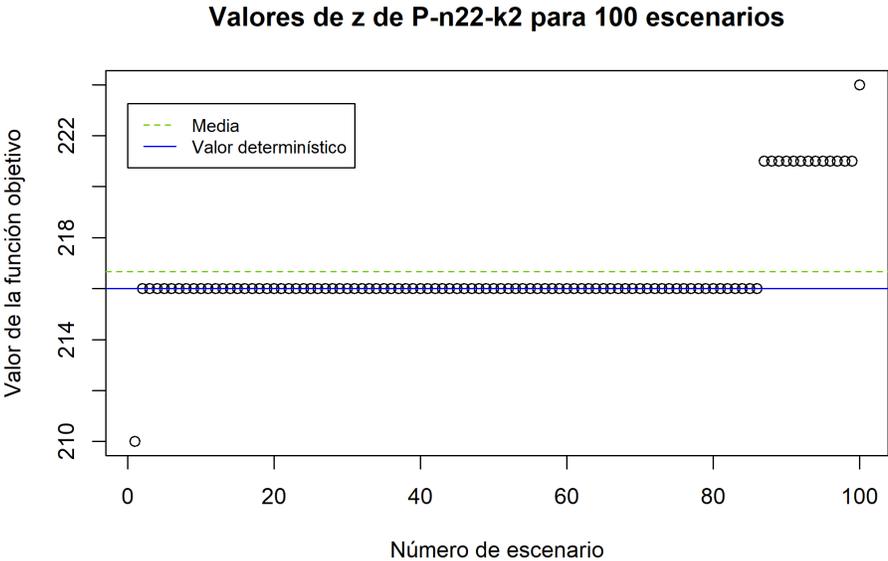


Figura 14.30: Valores de la función objetivo en la instancia P-n22-k2 para 100 escenarios estocásticos

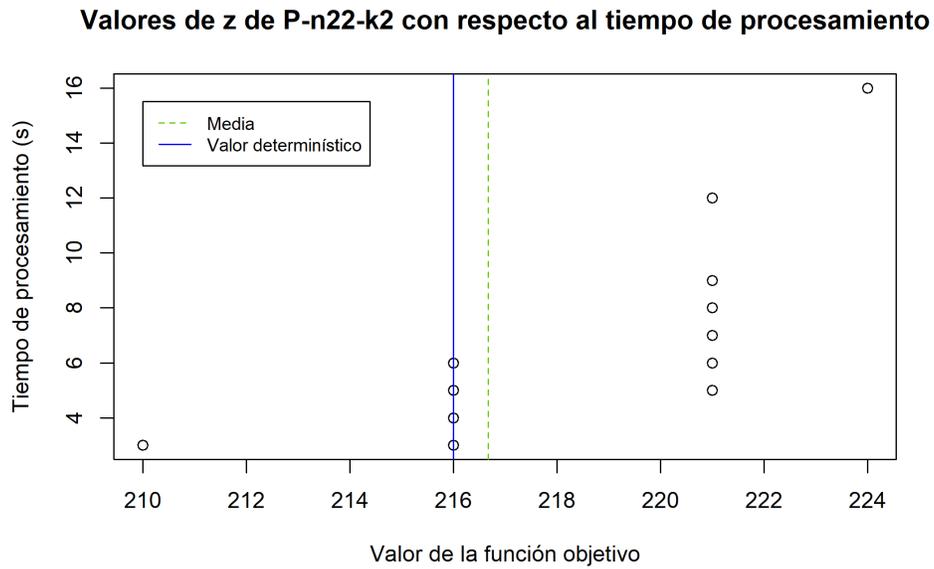


Figura 14.31: Valores de la función objetivo en la instancia P-n22-k2 con respecto al tiempo de procesamiento

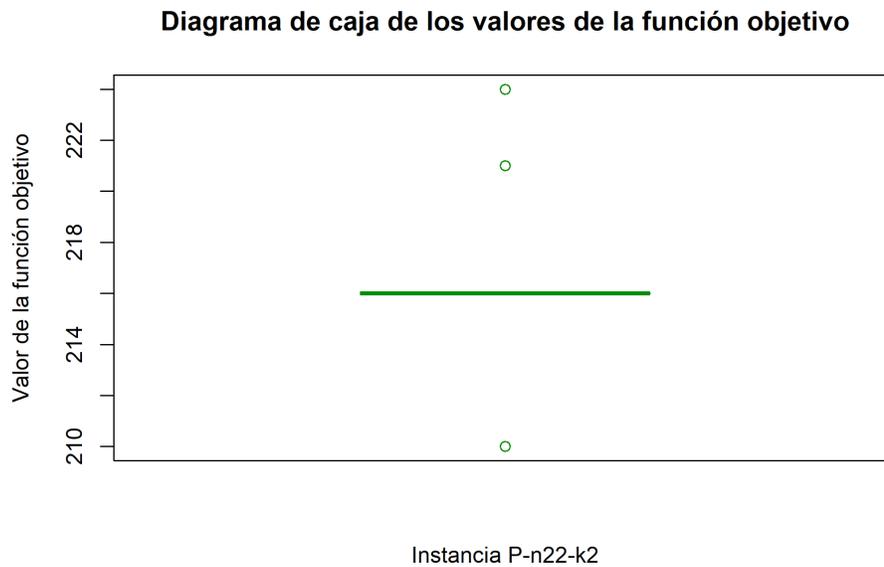


Figura 14.32: Diagrama de caja de los valores de la función objetivo en la instancia P-n22-k2

**Histograma de los valores de la función objetivo de la Instancia P-n22-k2**

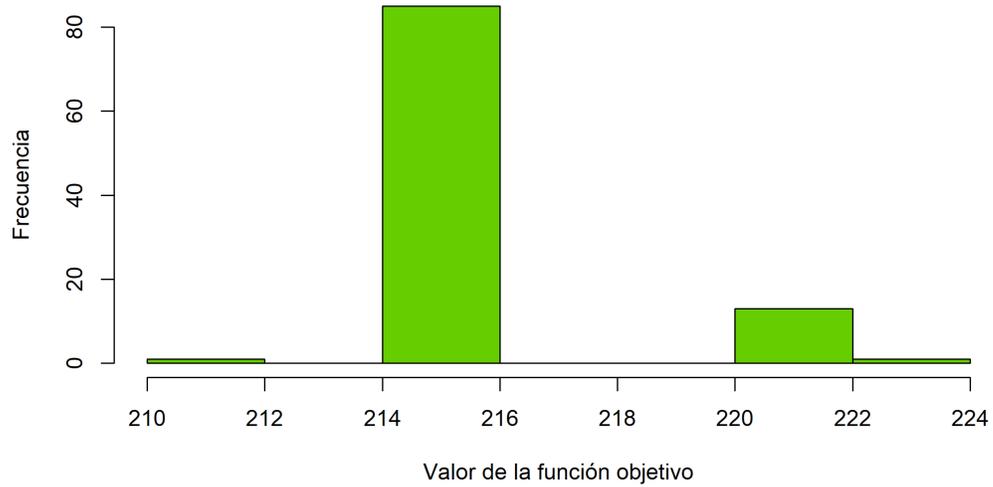


Figura 14.33: Histograma de los valores de la función objetivo de la instancia P-n22-k2 para 100 escenarios estocásticos

**Diagrama de caja del tiempo de procesamiento**

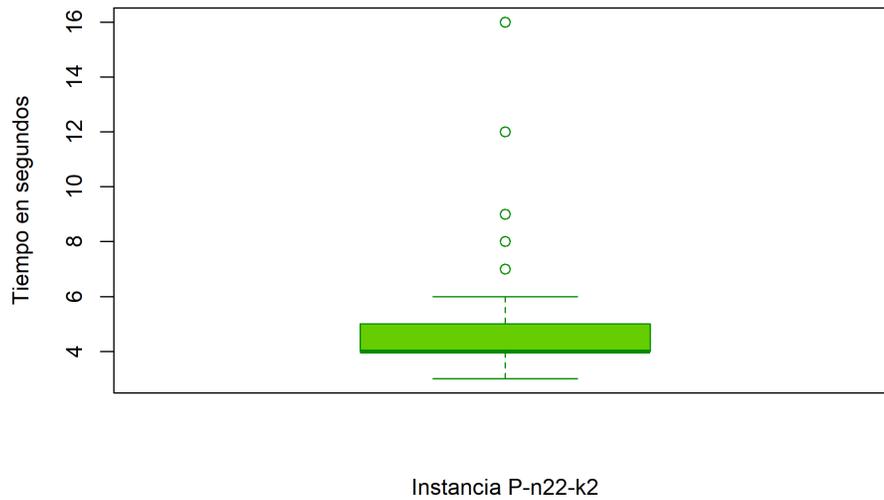


Figura 14.34: Diagrama de caja del tiempo de procesamiento de la instancia P-n22-k2



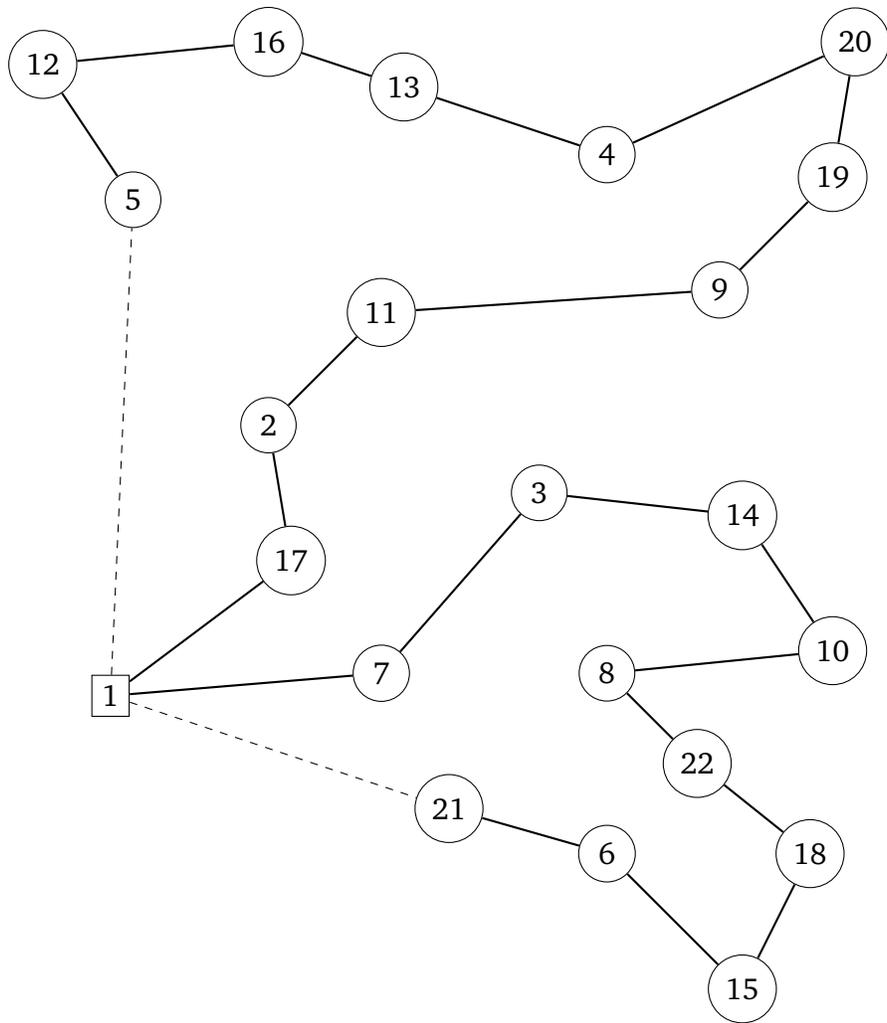


Figura 14.36: Trazado de rutas para P-n22-k2-n21-d16

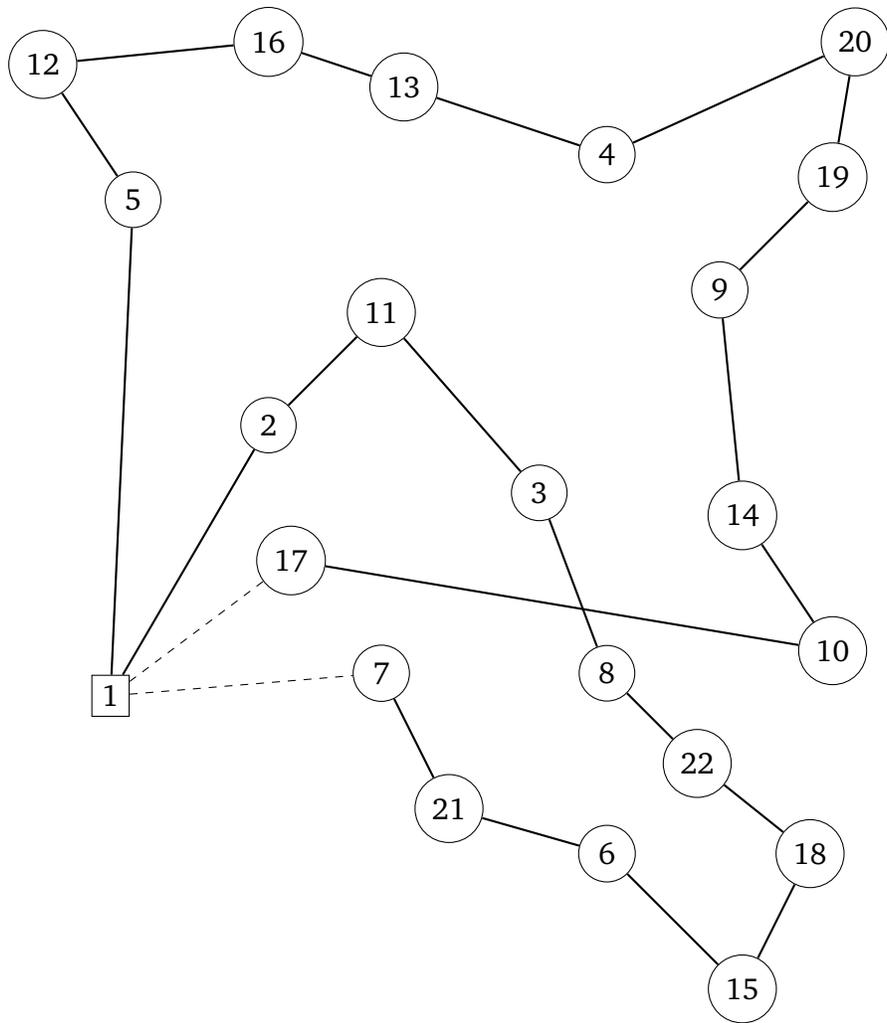


Figura 14.37: Trazado de rutas para P-n22-k2-n19-d29

## 14.7. P-n22-k8

En la literatura, la instancia determinística P-n22-k8 tiene un valor de función objetivo de 603, el cual se halla teniendo 8 vehículos; sin embargo, al hacer las corridas con el modelo propuesto en este trabajo, se obtiene un valor de 590, contando con 9 vehículos; esto se debe a que el modelo empleado no restringe el número de vehículos a un valor dado, sino que encuentra el número óptimo de vehículos por sí mismo; es interesante analizar que, un mayor número de rutas a cubrir no necesariamente implica un mayor costo, esto siempre y cuando se tengan escenarios hipotéticos en los que el coste de despacho de un nuevo vehículo sea indiferente.

Además de esta salvedad, se puede apreciar en las figuras 14.38, 14.40 y 14.41 que el valor de la función objetivo fue invariable en la totalidad de escenarios; a pesar de esto, sí se presenta una variación en los tiempos de procesamiento, como se evidencia en el diagrama de caja 14.42, por lo cual se decide graficar las instancias con los valores extremos de  $t$ , con el fin de validar si corresponden a trazados de rutas diferentes para un mismo valor de  $z$ , sin embargo, se observa en la figura 14.43 ( $t = 15s$ ) y en la figura 14.44 ( $t = 59s$ ), que los recorridos son idénticos.

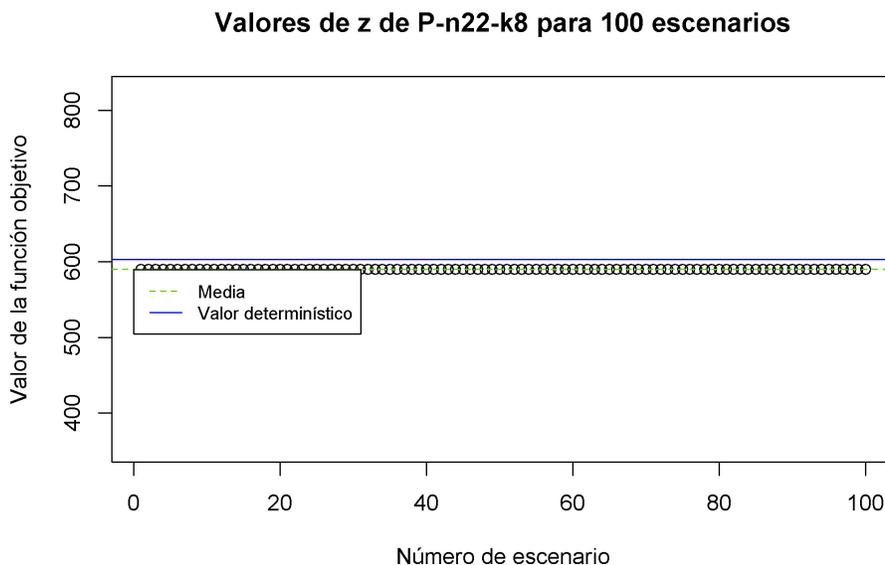


Figura 14.38: Valores de la función objetivo en la instancia P-n22-k8 para 100 escenarios estocásticos

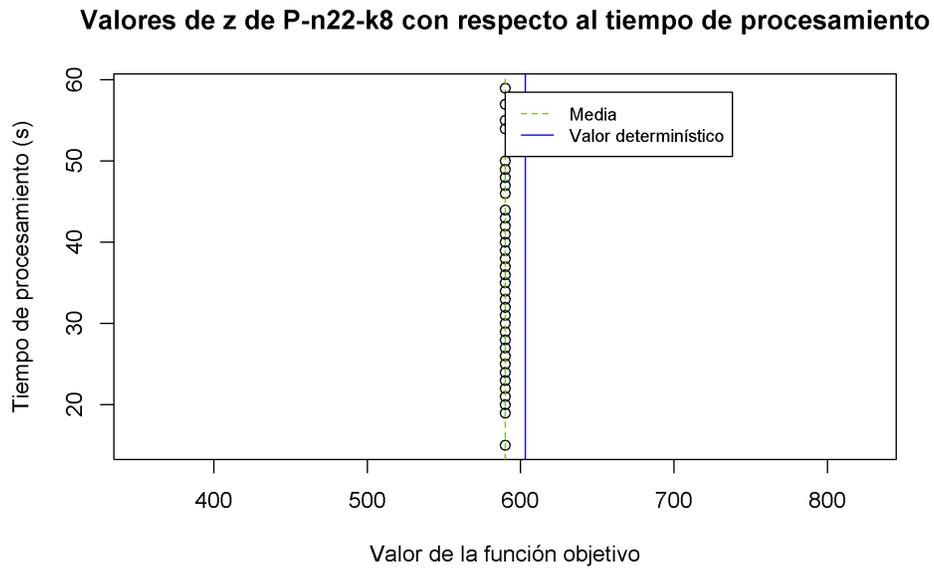


Figura 14.39: Valores de la función objetivo en la instancia P-n22-k8 con respecto al tiempo de procesamiento

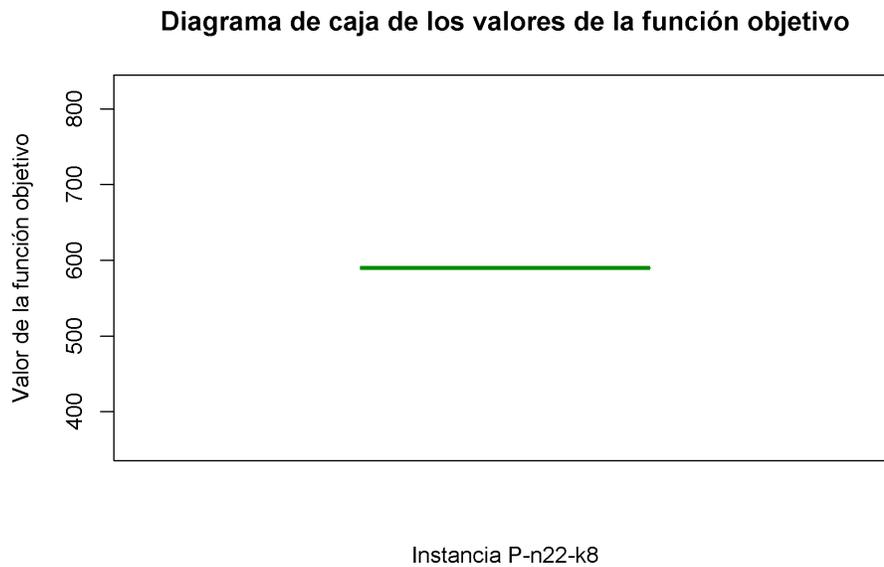


Figura 14.40: Diagrama de caja de los valores de la función objetivo en la instancia P-n22-k8

**Histograma de los valores de la función objetivo de la Instancia P-n22-k8**

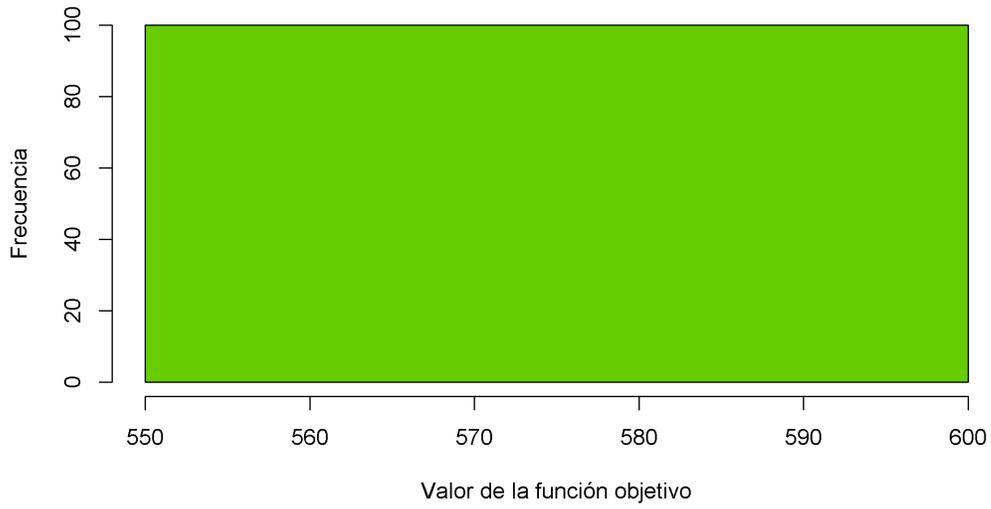


Figura 14.41: Histograma de los valores de la función objetivo de la instancia P-n22-k8 para 100 escenarios estocásticos

**Diagrama de caja del tiempo de procesamiento**

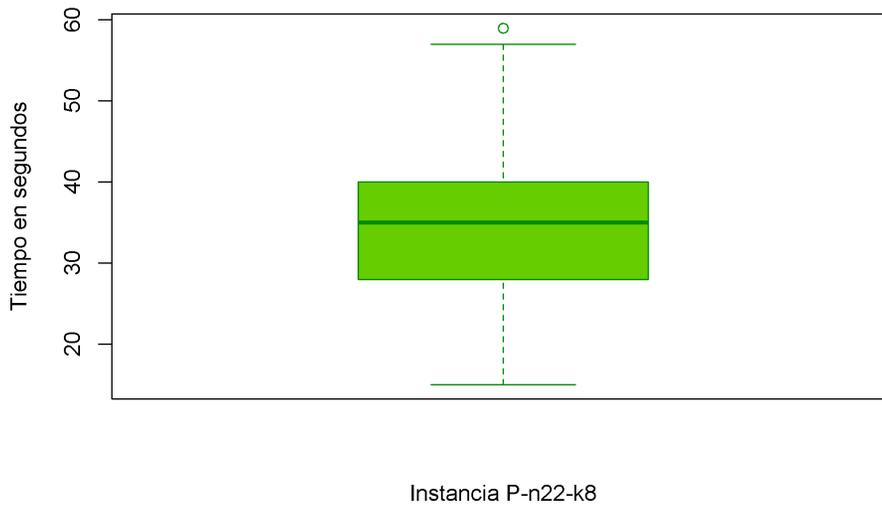


Figura 14.42: Diagrama de caja del tiempo de procesamiento de la instancia P-n22-k8

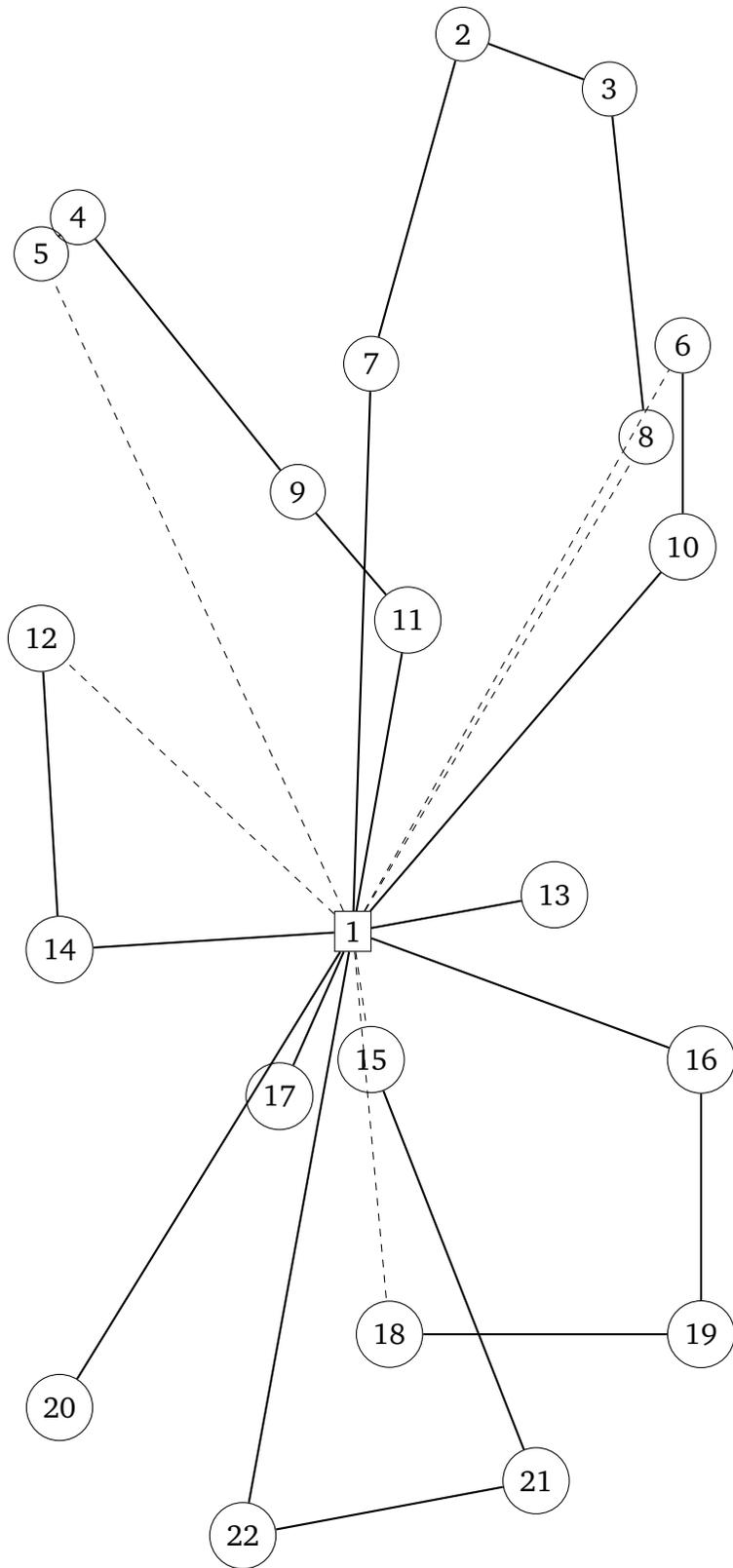


Figura 14.43: Trazado de rutas para P-n22-k8-n6-d2204

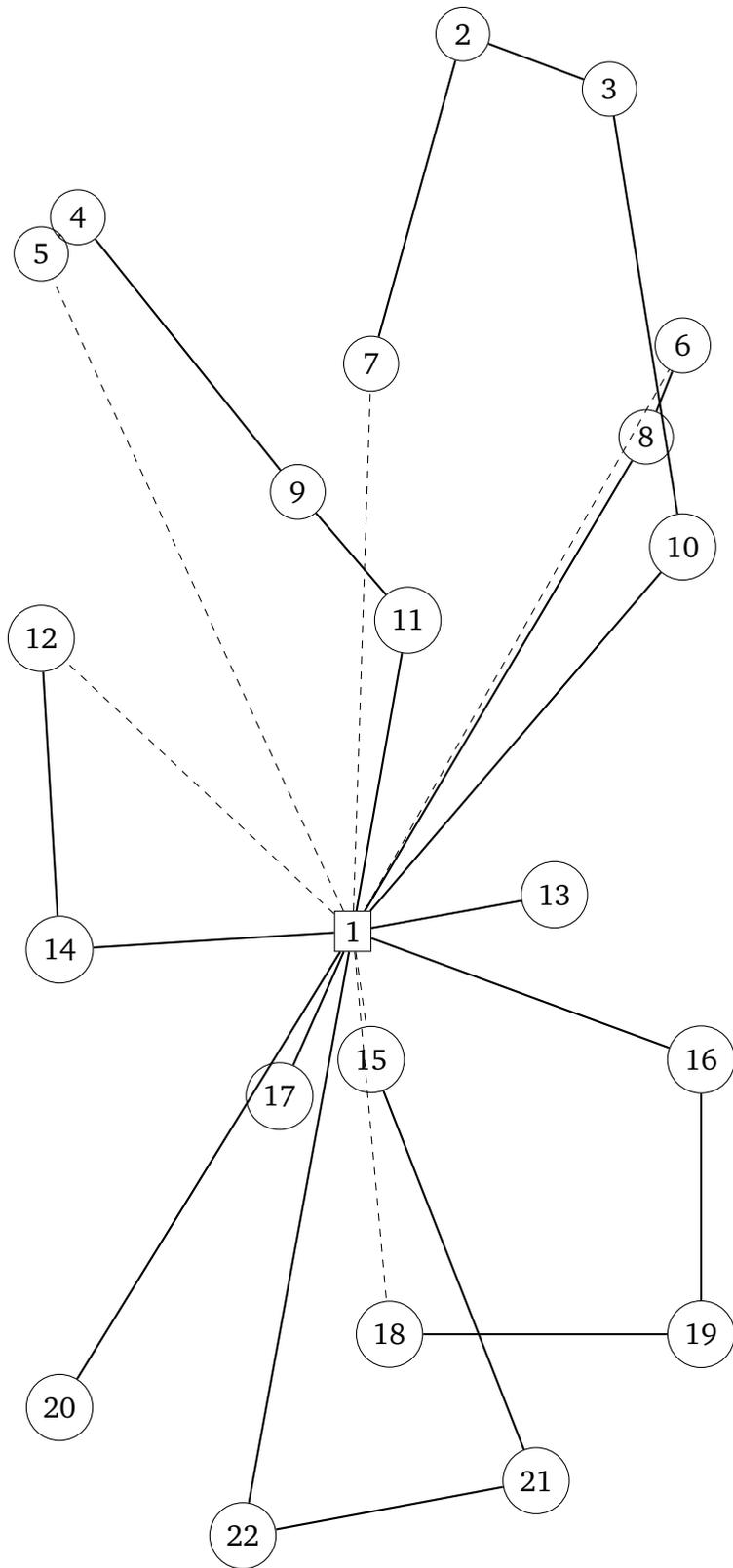


Figura 14.44: Trazado de rutas para P-n22-k8-n9-d92

## 14.8. P-n23-k8

La instancia P-n23-k8 tuvo el segundo tiempo de procesamiento más alto de las 9 instancias trabajadas, y la segunda mayor variabilidad en los valores de la función objetivo, incluso, en algunas corridas se superó el tiempo de colapso del modelo definido en 7000 s; en la figura 14.51 puede observarse el trazado con el menor valor de la función y a su vez el menor tiempo de procesamiento.

Nótese que la instancia P-n22-k8 tuvo un tiempo de procesamiento considerablemente más bajo, teniendo un vehículo adicional y un nodo menos, por lo cual se intuye que el número de vehículos y de nodos no es el causante de esta situación, sin embargo, al comparar visualmente el trazado entre ambas instancias, en P-n22-k8 el depósito se encuentra en el centro con respecto a los nodos demandantes, mientras que en la instancia P-n23-k8 el depósito se encuentra en un extremo, de lo cual se podría inferir que entre más alejado esté el depósito de los clientes, mayor será el tiempo requerido para hallar el trazado óptimo de rutas.

Otro hallazgo interesante se da en al comparar los escenarios P-n23-k8-n18-d27 de la figura 14.53 ( $z=541$ ,  $t=7952$ ) y P-n23-k8-n18-d34 de la figura 14.52 ( $z=551$ ,  $t=235$ ), en donde se varía la demanda del mismo nodo (18); se cumple la condición esperada de que a mayor demanda en un mismo nodo aumente el valor de la función objetivo, sin embargo, esto no ocurre con el tiempo de procesamiento, y hay una diferencia de más de 7700 segundos entre ambos escenarios.

Adicionalmente, fue la primera instancia en presentar GAP, que corresponde a la brecha inexplorada del proceso en el algoritmo de solución Branch & Bound del CPLEX; se puede observar en el gráfico 14.50 que esto ocurrió en 4 de los escenarios, puesto que el tiempo de procesamiento fue mayor al tiempo de colapso del modelo definido en 7000 s.

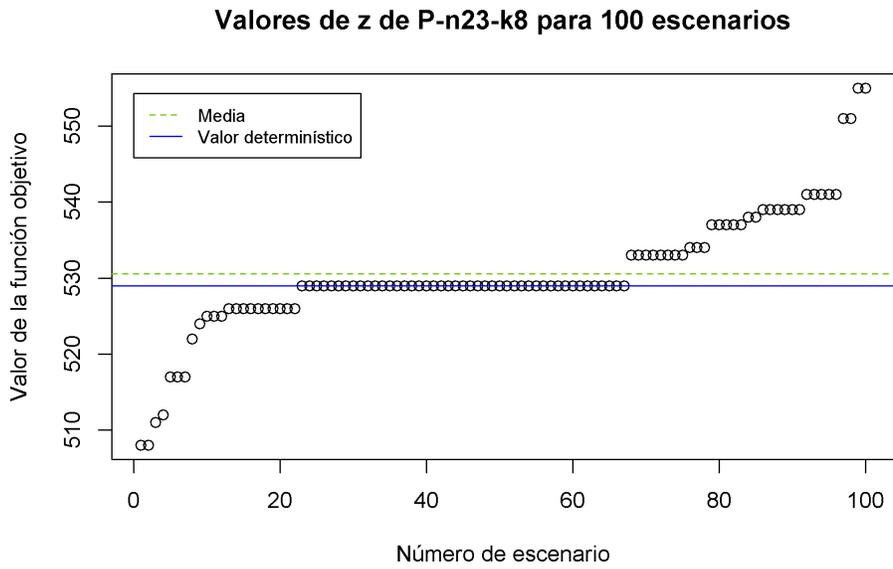


Figura 14.45: Valores de la función objetivo en la instancia P-n23-k8 para 100 escenarios estocásticos

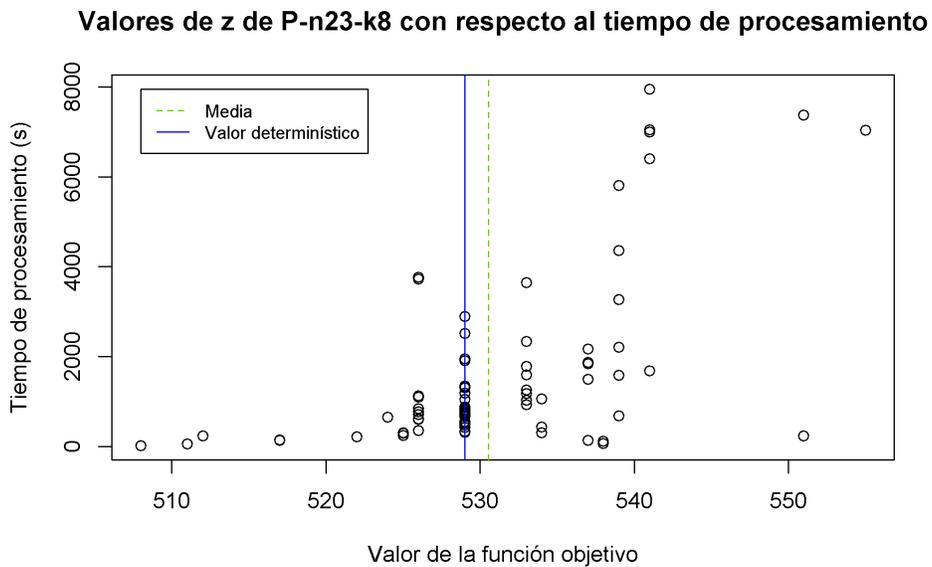


Figura 14.46: Valores de la función objetivo en la instancia P-n23-k8 con respecto al tiempo de procesamiento

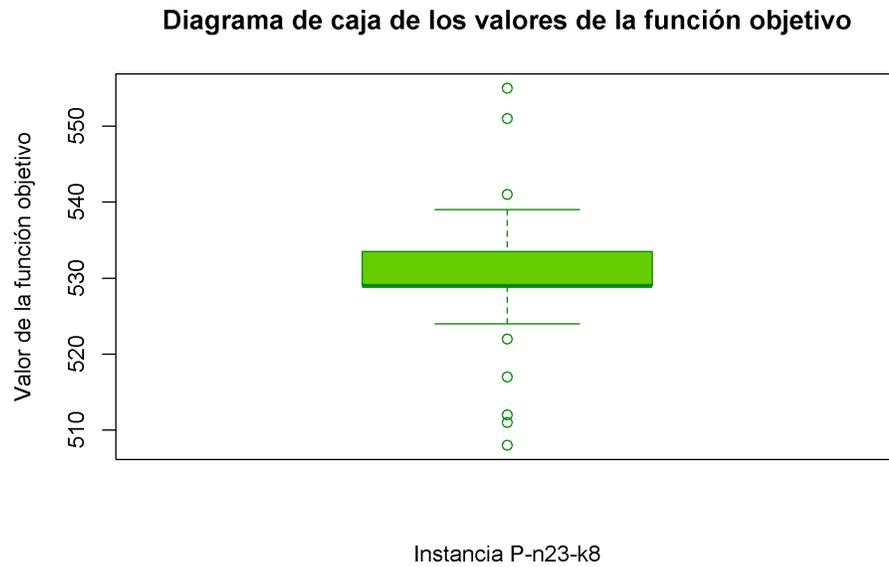


Figura 14.47: Diagrama de caja de los valores de la función objetivo en la instancia P-n23-k8

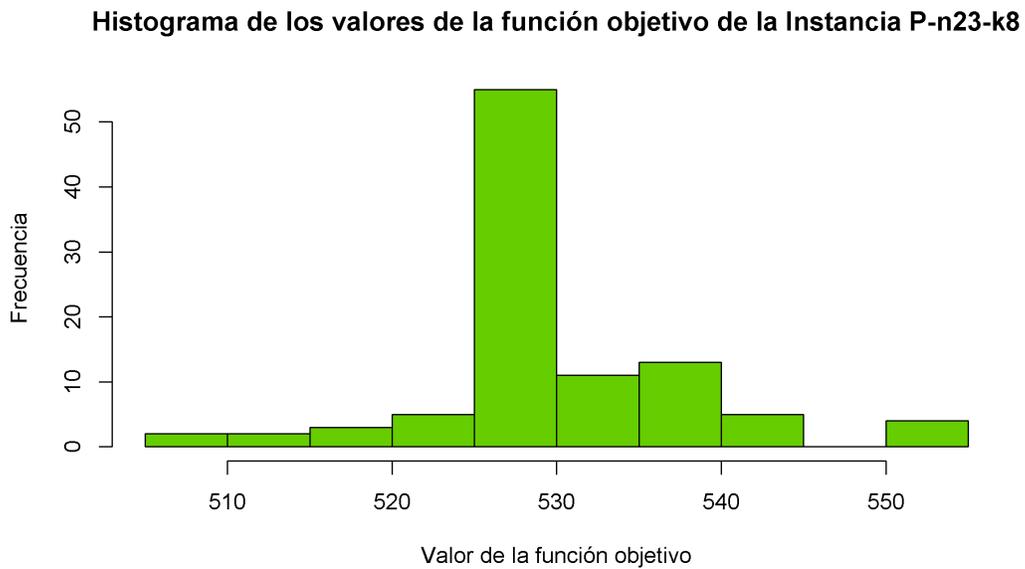


Figura 14.48: Histograma de los valores de la función objetivo de la instancia P-n23-k8 para 100 escenarios estocásticos

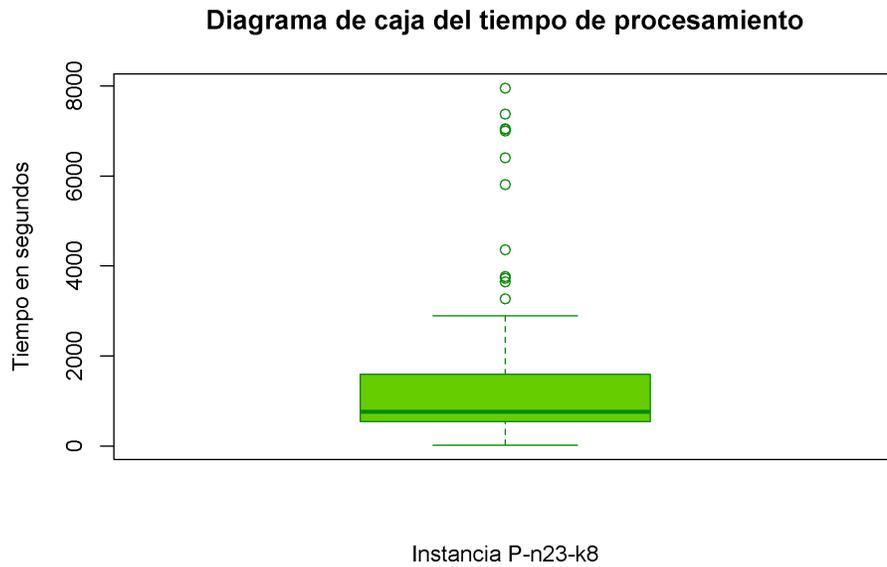


Figura 14.49: Diagrama de caja del tiempo de procesamiento de la instancia P-n23-k8

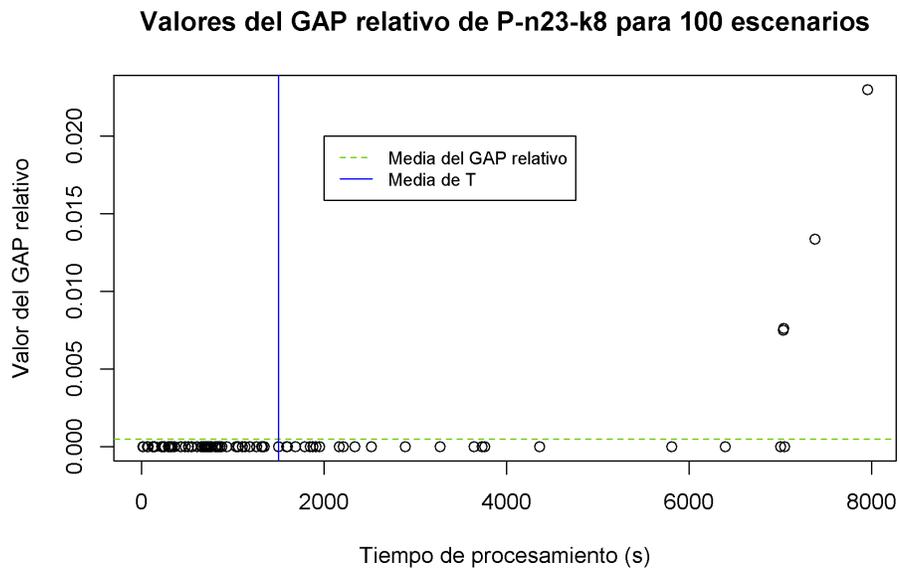


Figura 14.50: Diagrama de dispersión del tiempo de procesamiento con respecto al GAP relativo para P-n23-k8



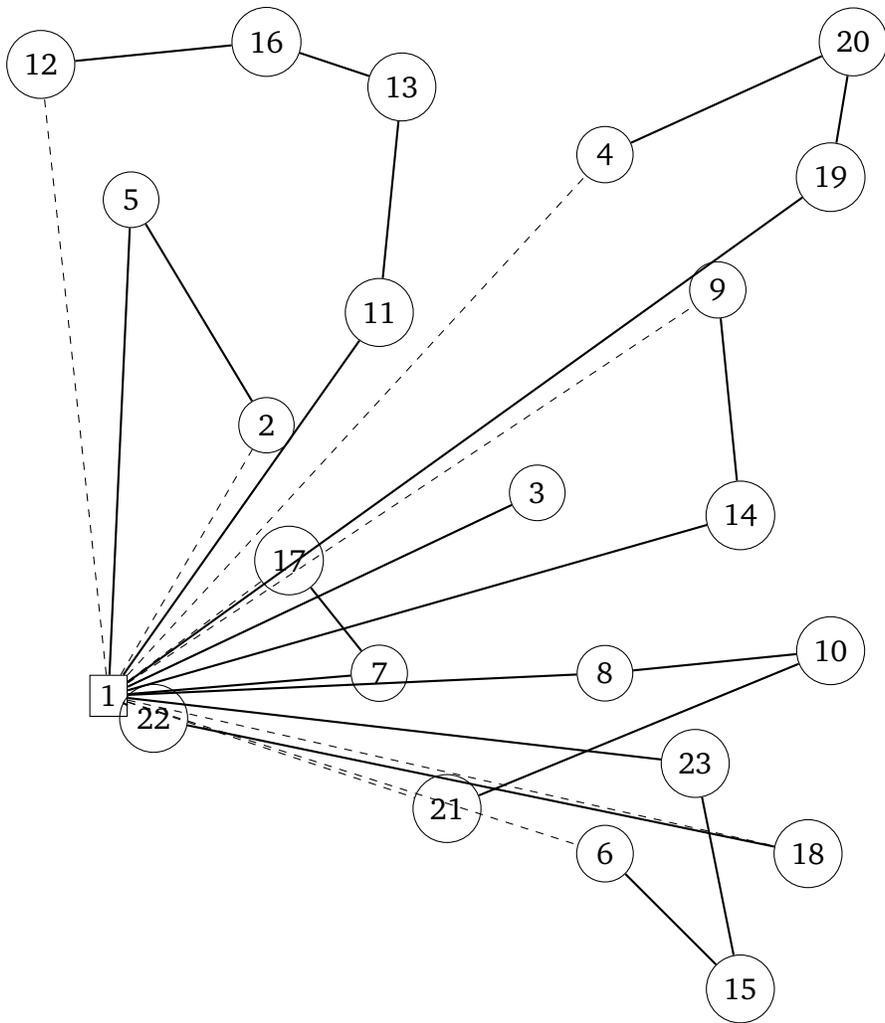


Figura 14.52: Trazado de rutas para P-n23-k8-n18-d34



## 14.9. P-n40-k5

A pesar de contar con 17 nodos más que la instancia anterior, hay una reducción importante en el tiempo promedio de procesamiento para esta instancia (casi 1000 segundos de diferencia), de lo cual se continúa afirmando que el número de nodos no es el único factor que afecta el tiempo de procesamiento del modelo; además de esto, y junto con la instancia P-n21-k2, es la única para la cual el valor de función objetivo promedio es exactamente igual al valor determinístico.

Un resultado importante se dio al variar la demanda del nodo 7: la figura 14.59 presenta el trazado cuando la demanda fue igual a 17, mientras que en la figura 14.60 la demanda fue de 13; nótese que ambos recorridos son exactamente idénticos, por tanto el valor de la función ojetivo tampoco varía, y es la menor del modelo ( $z=450$ ), sin embargo, el tiempo de procesamiento sí presentó una diferencia sustancial, como puede observarse en el costado izquierdo del gráfico 14.55, ya que hay una variación de más de 3000 segundos entre estas instancias; asimismo, se observa una variación general del valor de  $t$  en el diagrama de caja del gráfico 14.58.

Tal como se pudo visualizar anteriormente, un mayor valor de la demanda de un nodo en específico, tiende a generar un mayor valor de la función objetivo, por tanto, se infiere que el modelo debe incurrir en un mayor esfuerzo computacional para recalcular los trazados factibles, y asegurar a su vez la optimalidad.

Finalmente, los gráficos 14.61 ( $z=461$ ,  $t=613$ ) y 14.62 ( $z=461$ ,  $t=1466$ ) muestran una relación idéntica, siendo estos los escenarios con mayor valor de función objetivo.

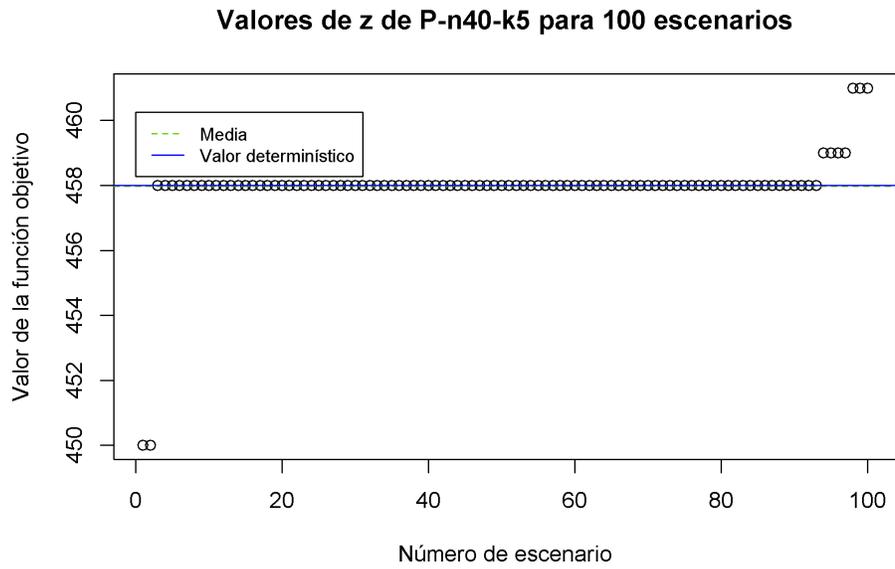


Figura 14.54: Valores de la función objetivo en la instancia P-n40-k5 para 100 escenarios estocásticos

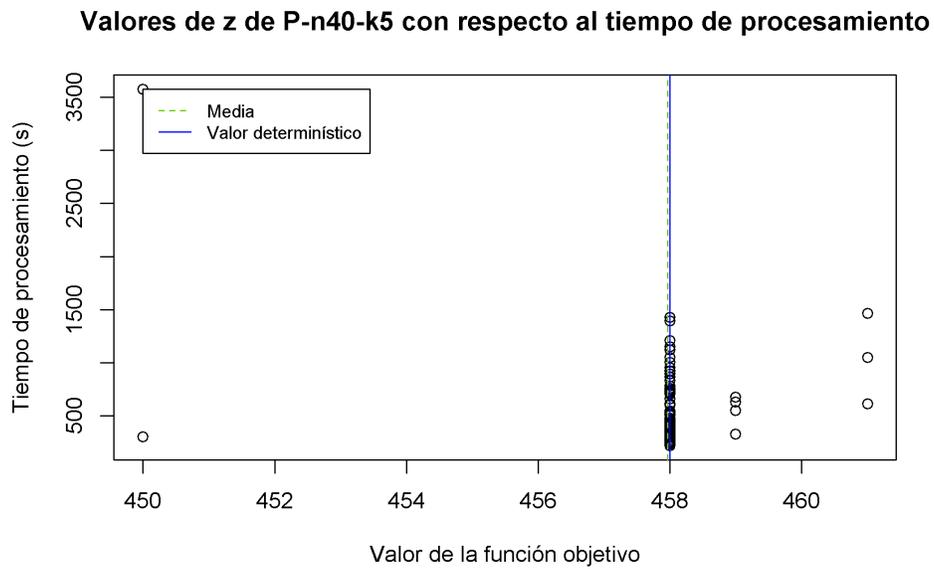


Figura 14.55: Valores de la función objetivo en la instancia P-n40-k5 con respecto al tiempo de procesamiento

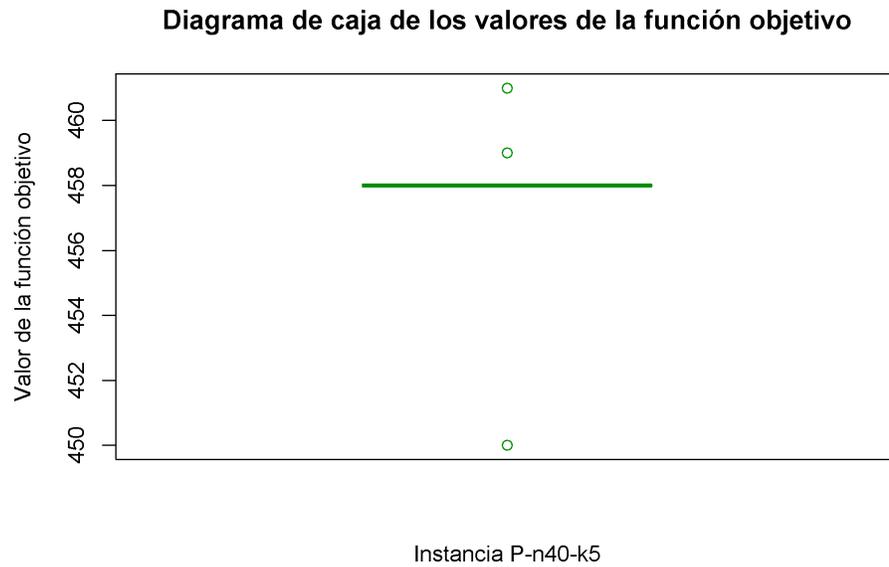


Figura 14.56: Diagrama de caja de los valores de la función objetivo en la instancia P-n40-k5

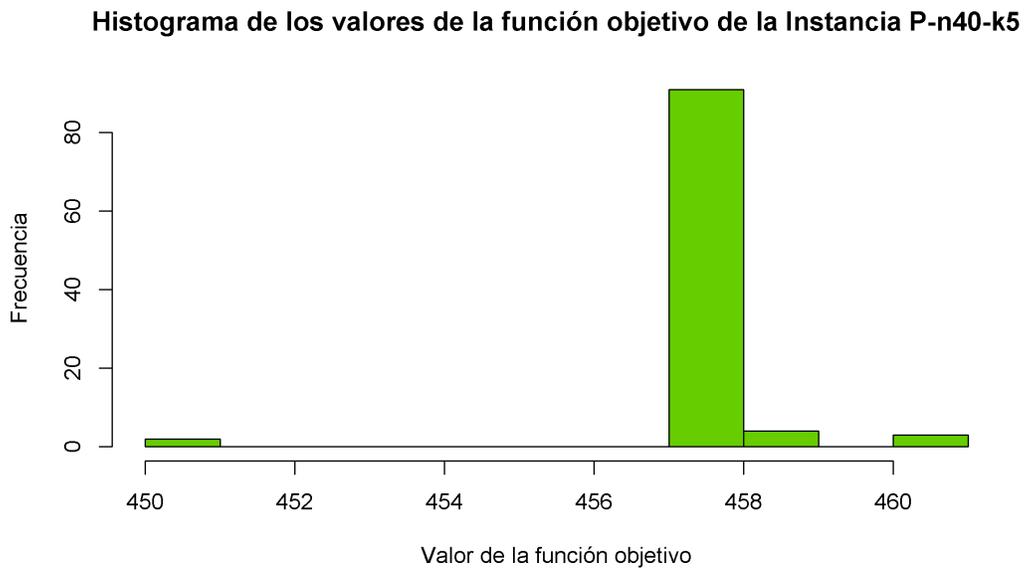


Figura 14.57: Histograma de los valores de la función objetivo de la instancia P-n40-k5 para 100 escenarios estocásticos

Diagrama de caja del tiempo de procesamiento

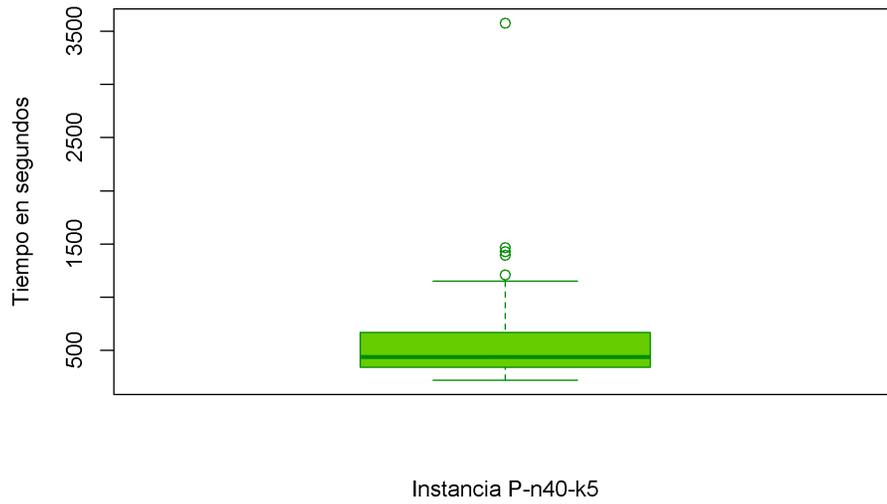


Figura 14.58: Diagrama de caja del tiempo de procesamiento de la instancia P-n40-k5

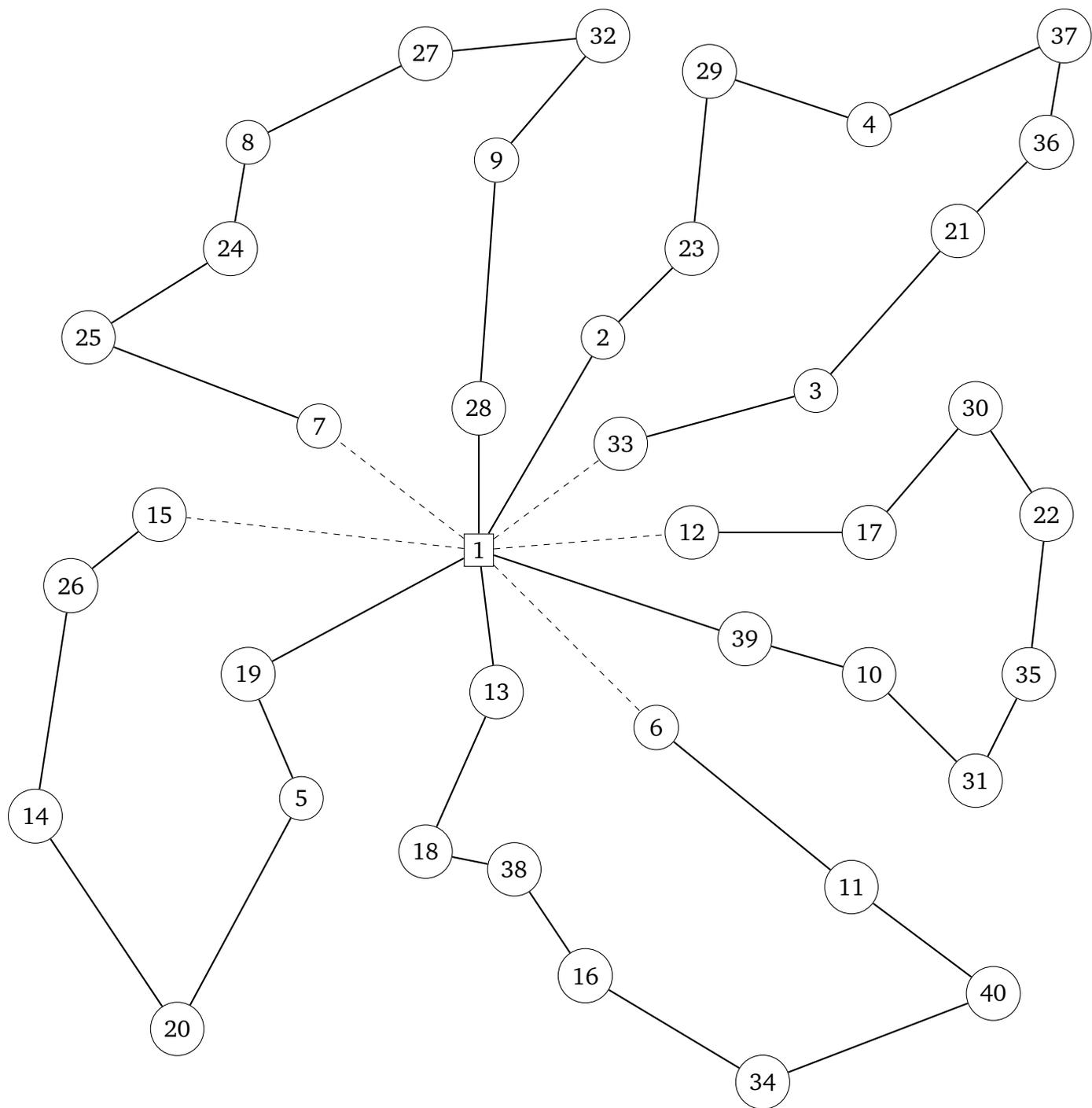


Figura 14.59: Trazado de rutas para P-n40-k5-n7-d17

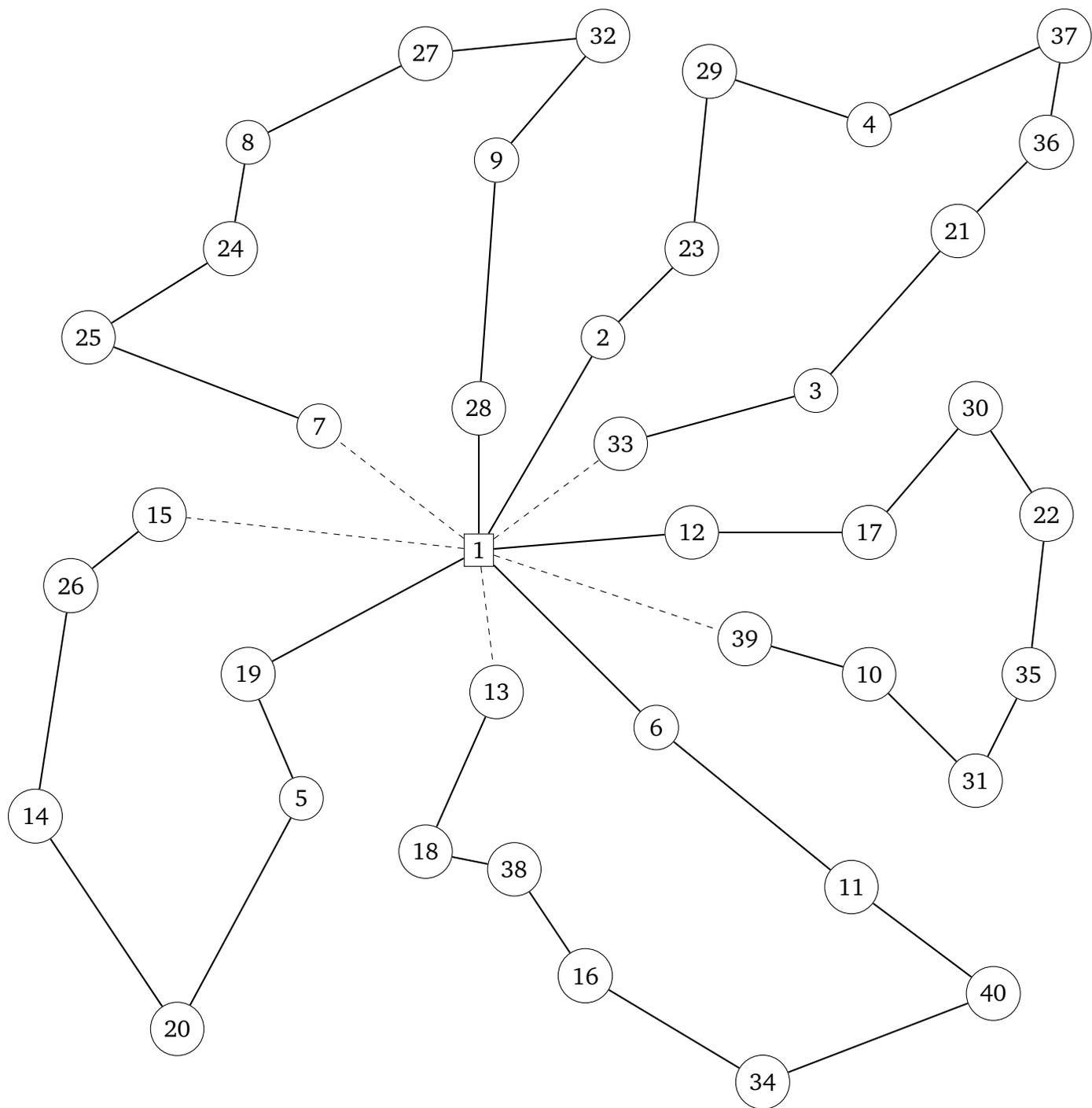


Figura 14.60: Trazado de rutas para P-n40-k5-n7-d13

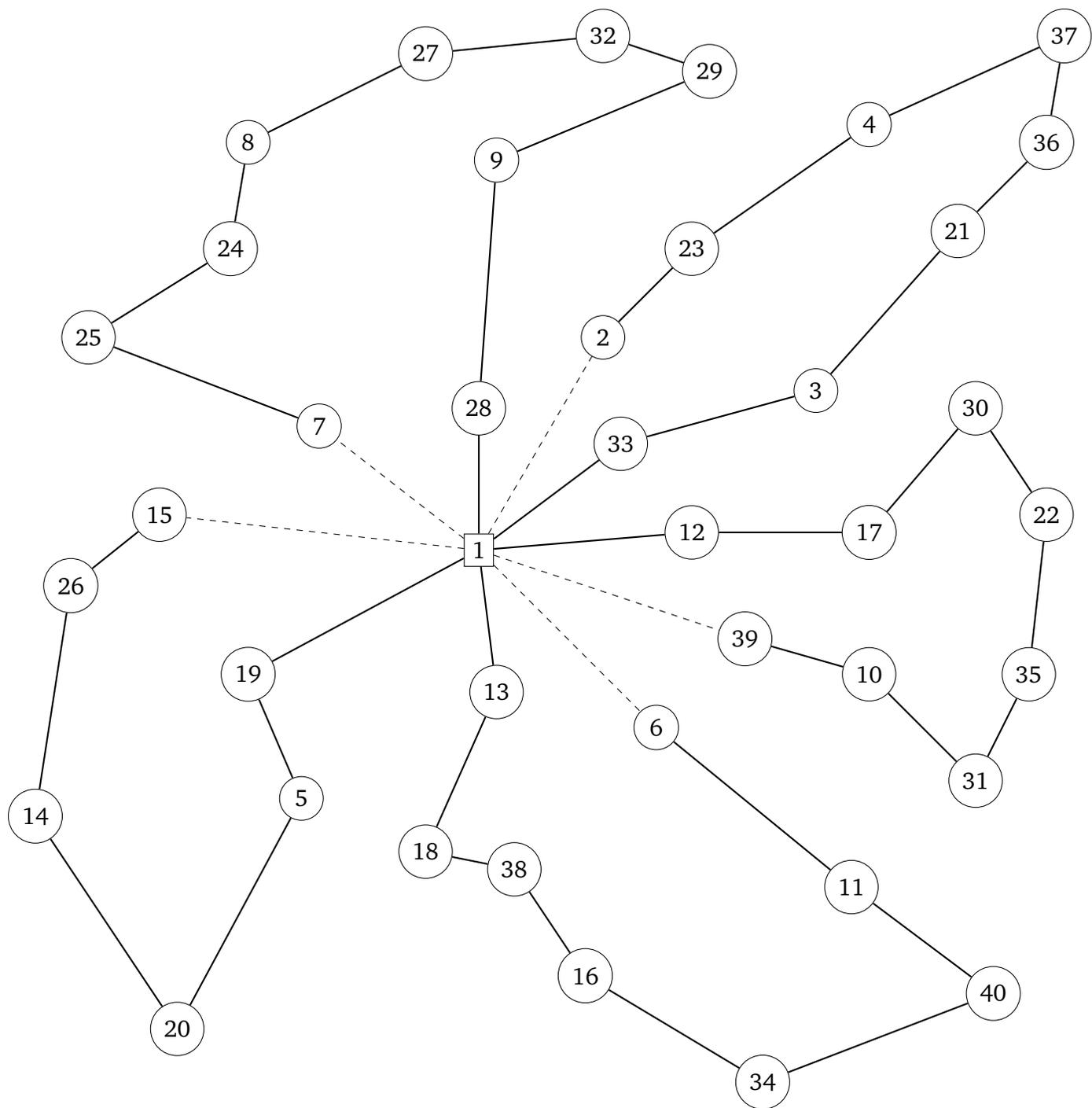


Figura 14.61: Trazado de rutas para P-n40-k5-n4-d20



## 14.10. P-n45-k5

En esta última instancia analizada, se obtuvo también GAP, en una mayor proporción que en la instancia P-n23-k8; puede observarse en el gráfico 14.68 que solamente 4 de las corridas no superaron el tiempo de colapso del modelo, y por tanto no presentaron GAP; cabe resaltar que al no haber explorado la totalidad del espacio de solución, no se puede garantizar que se haya alcanzado el óptimo global en cada corrida, sin embargo, sí son soluciones factibles y por tanto cumplen con la totalidad de restricciones del modelo.

También es interesante analizar que existe una relación directamente proporcional entre el tiempo de procesamiento del modelo y el valor del GAP, ya que el algoritmo Branch & Bound se detiene al alcanzar el tiempo de colapso de 7000s, y por tanto queda un área de solución sin explorar; para esta instancia, el coeficiente de correlación fue de 0.62, por tanto ambas variables están moderadamente correlacionadas.

La imagen 14.10 presenta el escenario con menor valor de función objetivo y a su vez menor tiempo de procesamiento ( $z=507$ ,  $t=4938$ ); por otra parte, las figuras 14.10 y 14.10 muestran, respectivamente, los escenarios con mayor y segundo mayor valor de función objetivo ( $z=517$ ,  $z=516$ ); nótese que solamente hay una unidad de diferencia entre ambas funciones, pero una gran cantidad de arcos varían entre un trazado y otro.

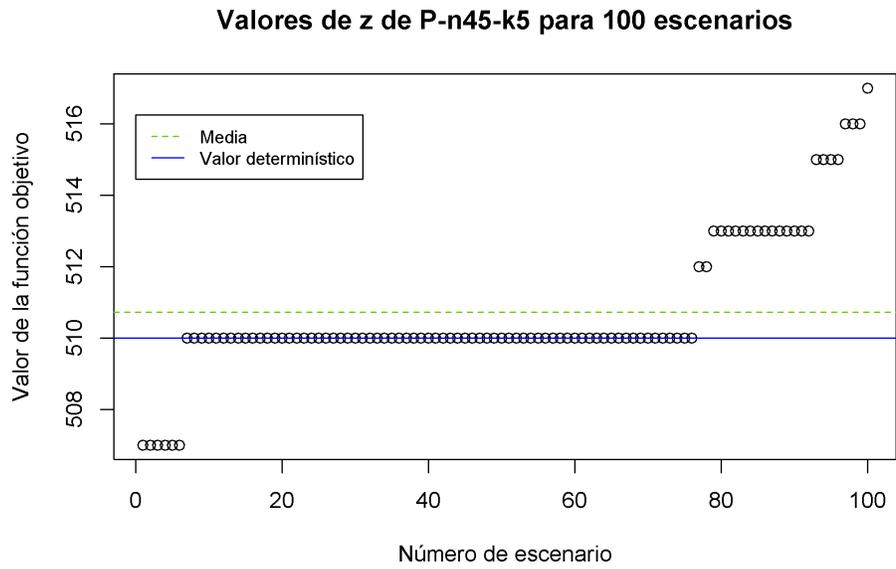


Figura 14.63: Valores de la función objetivo en la instancia P-n45-k5 para 100 escenarios estocásticos

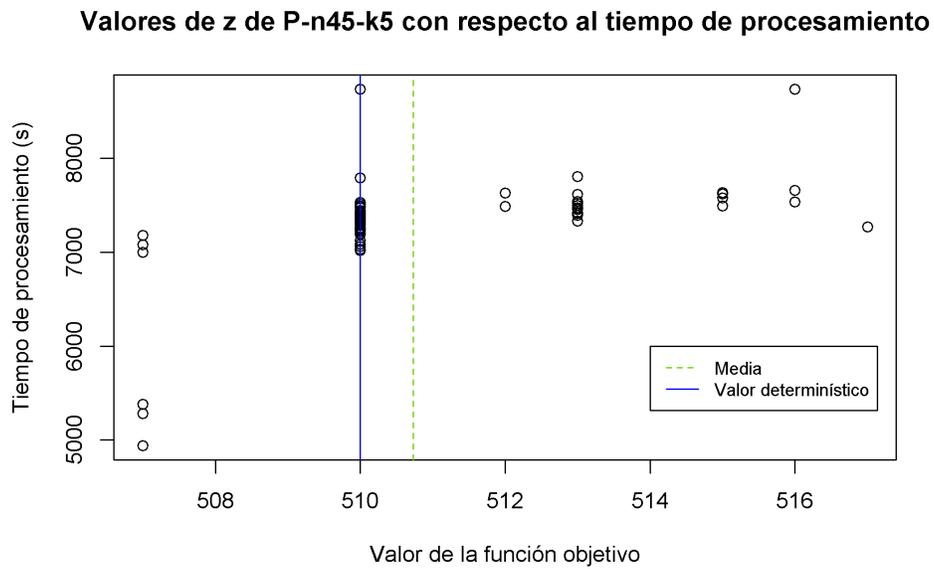


Figura 14.64: Valores de la función objetivo en la instancia P-n45-k5 con respecto al tiempo de procesamiento

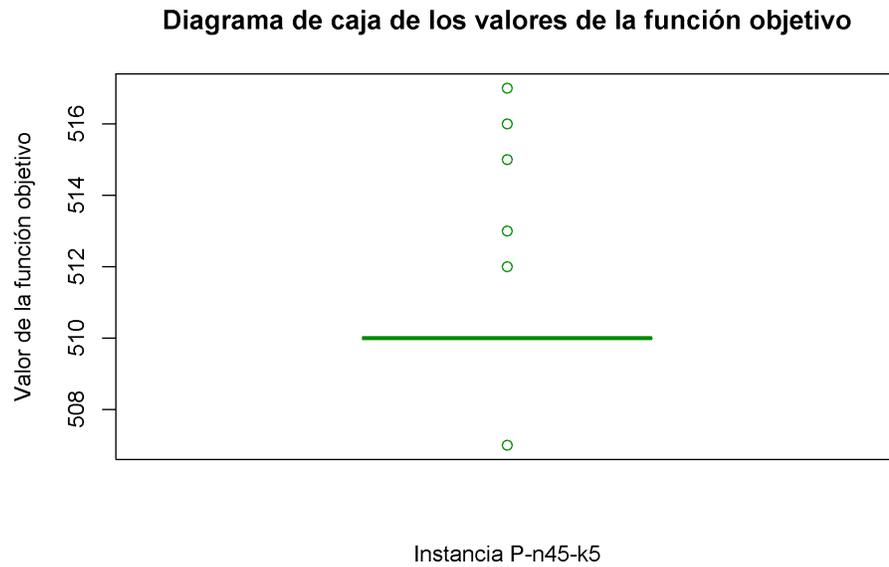


Figura 14.65: Diagrama de caja de los valores de la función objetivo en la instancia P-n45-k5

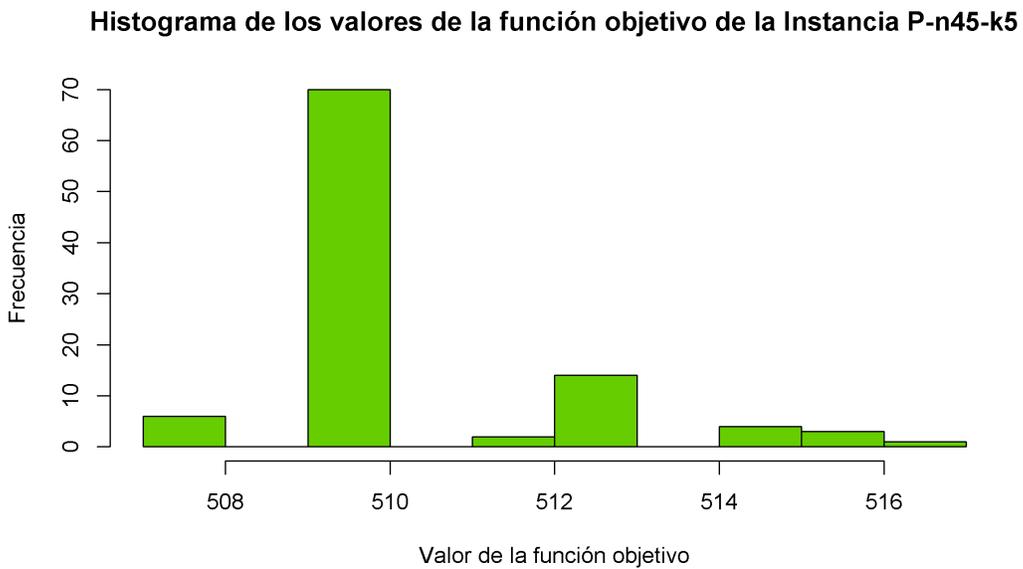


Figura 14.66: Histograma de los valores de la función objetivo de la instancia P-n45-k5 para 100 escenarios estocásticos

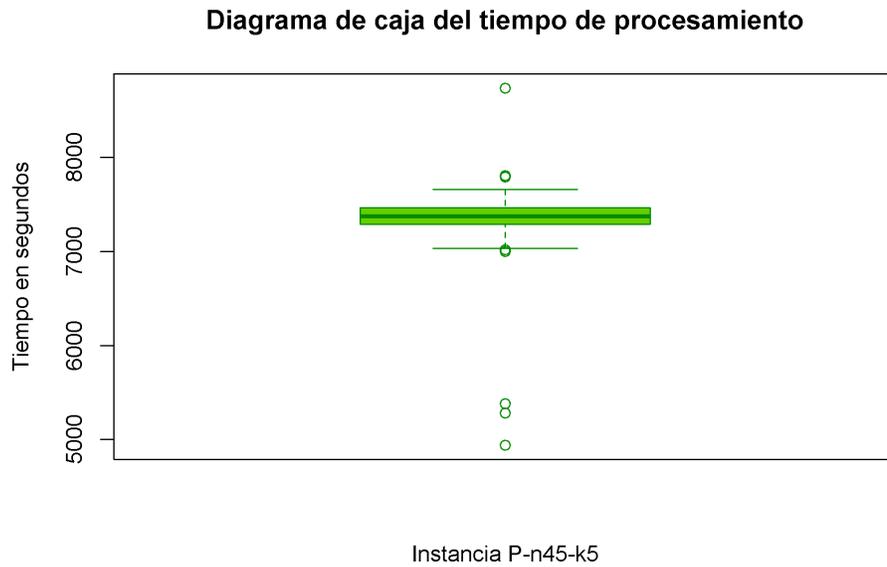


Figura 14.67: Diagrama de caja del tiempo de procesamiento de la instancia P-n45-k5

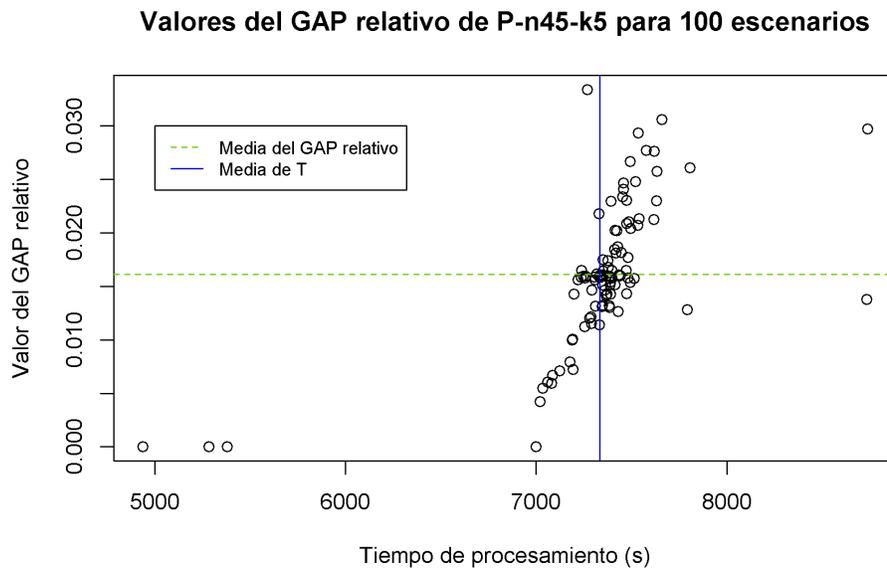


Figura 14.68: Diagrama de dispersión del tiempo de procesamiento con respecto al GAP relativo para P-n45-k5

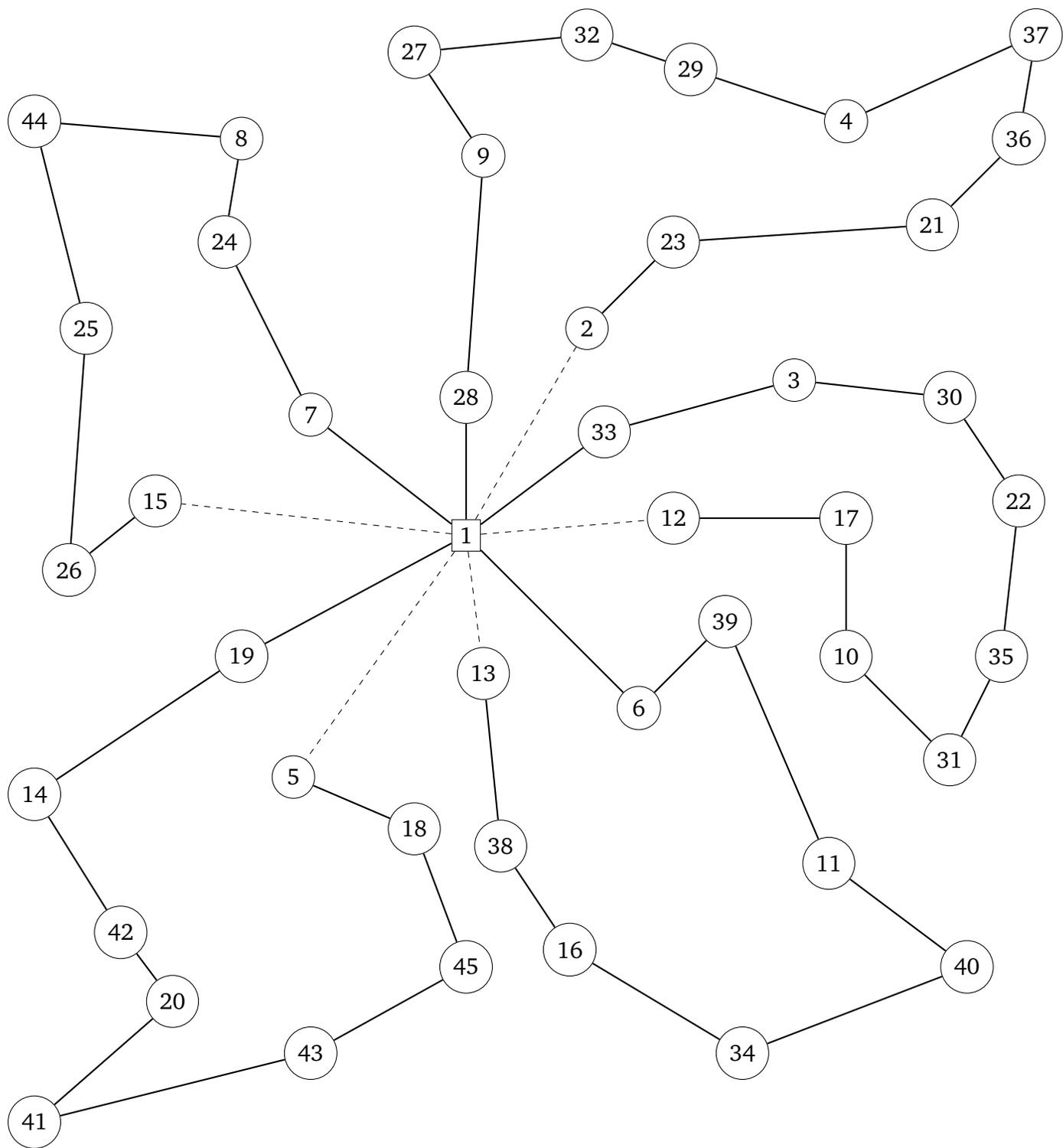


Figura 14.69: Trazado de rutas para P-n45-k5-n36-d13

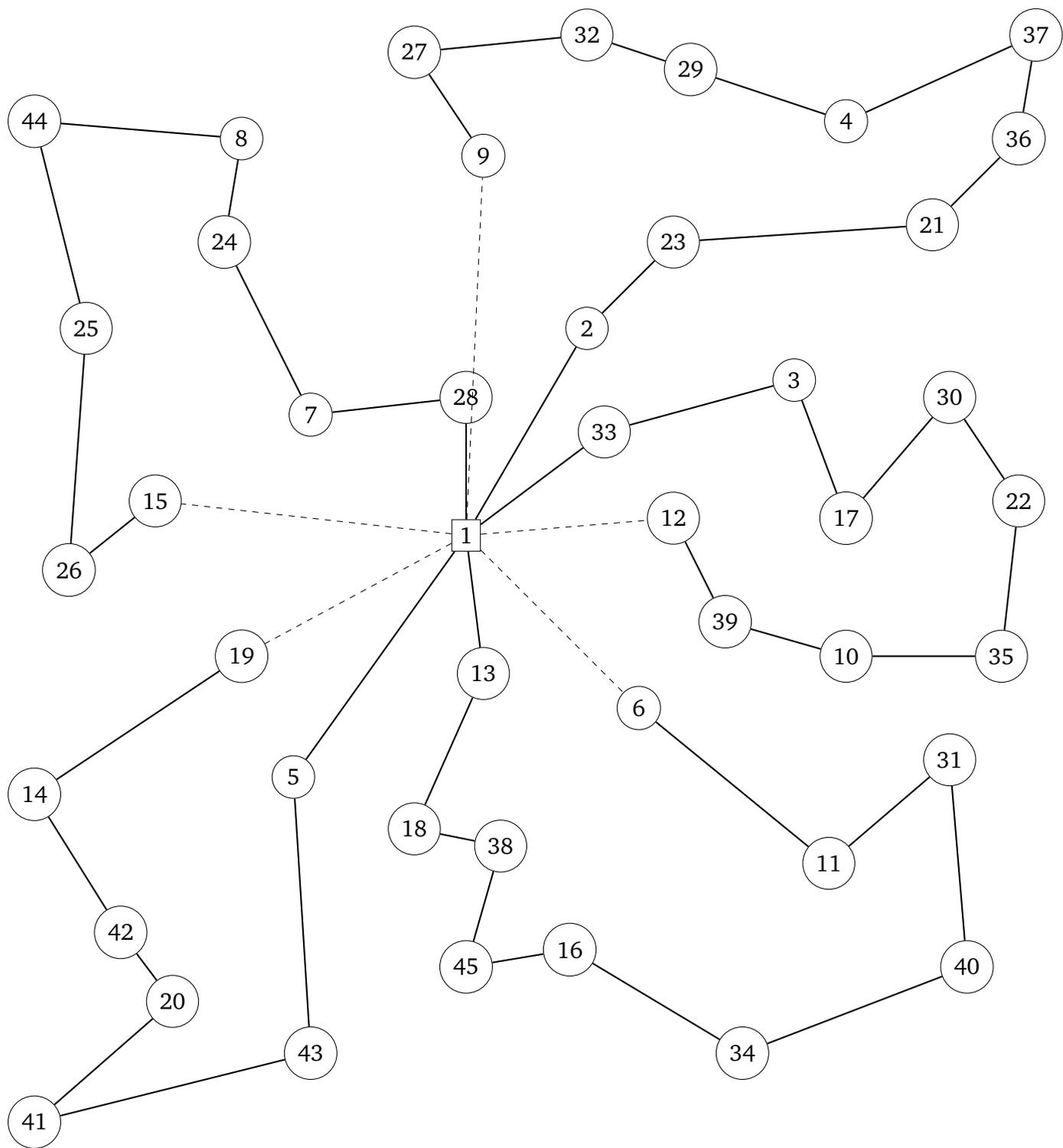


Figura 14.70: Trazado de rutas para P-n45-k5-n17-d21

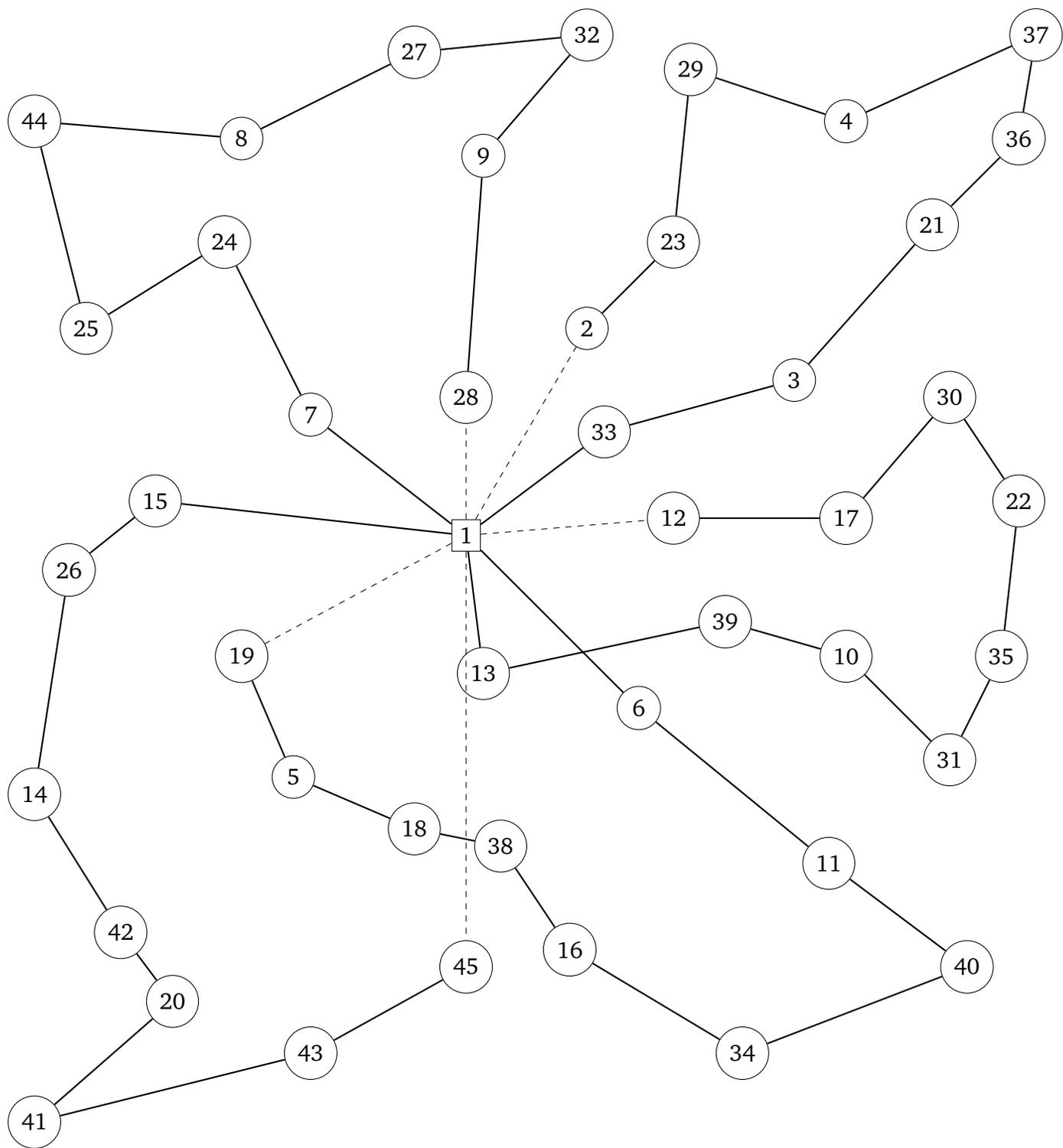


Figura 14.71: Trazado de rutas para P-n45-k5-n29-d19

# 15

## Conclusiones y trabajos futuros

### 15.1. Conclusiones

- Fue posible emplear un modelo flexible y exacto para dar solución a 9 instancias del CVRPSD, garantizando la optimalidad en 7 de estas, mientras que en las 2 restantes se obtuvieron soluciones factibles, bastante cercanas al óptimo global de la instancia.
- Se observó que en modelos de la literatura, los métodos de solución óptimos empleados en el CVRPSD son poco empleados, y en ninguno de estos se utilizó un modelo flexible para desarrollarlos.
- La topología de la red no se ve necesariamente impactada por las variaciones en la demanda de los clientes, por esto en algunos escenarios la variación de la demanda no tuvo ningún efecto en los recorridos de los vehículos.
- Se identificó que el número de nodos no es el único factor que afecta el tiempo de solución, sino también: la capacidad de procesamiento del equipo y la distribución de los clientes en el plano con respecto al depósito.

## 15.2. Trabajos futuros

- Agregar vehículos subcontractados a la flota, modelando así un Problema de Ruteo de Vehículos con Demanda Estocástica, Considerando Flota Propia y Subcontratada (VRPPCSD).
- Correr en el mismo equipo empleado para la elaboración de este proyecto, otro modelo de otro autor, y así poder comparar de manera precisa los tiempos de procesamiento, puesto que esta es una variable que va ligada al hardware empleado.
- Replicar el modelo en un software que permita realizar todas las etapas desde un mismo espacio: realizar las corridas, tabular los datos y generar los gráficos, con el fin de no usar múltiples herramientas (AMPL, Microsoft Excel y R); esto podría lograrse en diferentes programas, tales como Python, MATLAB, o el mismo R.
- Variar la demanda de más de un nodo, e inclusive, la demanda de todos ellos, para verificar cómo afecta una mayor aleatoriedad al procesamiento del modelo.

# 16

## Anexos

### 16.1. Código graficador de nodos

```
library(plyr)
```

```
Instancia<-"P-n19-k2" #Nombre de la instancia en librerias
```

```
Nombre<-paste("Instancia",Instancia)
```

```
x<-c(30,37,49,52,31,52,42,52,57,62,42,27,43,58,37,61,62,63,45) #Coordenada en x de  
cada nodo
```

```
y<-c(40,52,43,64,62,33,41,41,58,42,57,68,67,27,69,33,63,69,35) #Coordenada en y de  
cada nodo
```

```
png(paste("Instancia ",Instancia,".png",sep=""), width = 18, height = 12,units="cm",res =  
300) #Generador de imagen
```

```
plot(x,y,col = "red", cex=1.5, pch=19, main= Nombre, xlab= "Coordenada en X", ylab= "  
Coordenada en Y") #Graficador general
```

```
points(x[1],y[1],col = "blue", cex=1.5, pch=19) #Ubicacion del deposito
```

```
dev.off()
```

## 16.2. Código generador de aleatorios

```
library(readxl)
Instancia<-"P-n50-k7" #Nombre de instancia en librerias.
Archivo<-paste("Ruta",Instancia,".xlsx",sep="") #Permite facilitar la definicion del directorio
de trabajo segun cada instancia.
Nodos=50 #Numero de nodos de instancia en librerias.
Datos=read_excel(Archivo,1,col_names = TRUE) #Recorre un archivo en Excel con los
nodos y demandas de cada cliente.

x<-data.frame(nrow=100, ncol=5) #Define un data frame con 100 filas y 5 columnas.

setwd(paste("Ruta",Instancia,sep="")) #Define el directorio de trabajo.

for (i in 1:100) #Ciclo que recorre los 100 clientes y genera un numero aleatorio con
distribucion uniforme discreta con valor minimo de 2 y valor maximo igual al numero
total de nodos, que permite identificar el nodo cuya demanda se variara y
posteriormente varia la demanda del nodo elegido siguiendo una distribucion Poisson
con lambda igual a la demanda deterministica de ese cliente.

{
Aleatorio<-round(runif(1,min=2,max=Nodos),0)
Valor<-as.numeric((Datos[Aleatorio,3]))
x[i,1]=Aleatorio
x[i,2]=rpois(1,Valor)
x[1,1]=1
x[1,2]=0
x[i,3]=0
x[i,4]=0
```

```

x[i,5]=0
x[i,6]=i
Nombre_Archivo_2=paste(Instancia,"-n",x[i,1],"-d",x[i,2],".txt",sep="")
write.table(NULL,file = Nombre_Archivo_2, sep = "",row.names = FALSE, col.names =
  FALSE)

}

```

#Definicion de los titulos de las columnas y funciones de concatenacion para trabajar con los aleatorios generados en Excel.

```

colnames(x) <- c("Nodo", "Demanda", "Instancia", "FO", "T", "Escenario")
Nombre_Archivo = paste("Aleatorio_", Instancia, ".csv", sep = "")
write.table(x, file = Nombre_Archivo, sep = ",", row.names = FALSE, col.names = TRUE)
cat("=CONCATENAR(", "\", Instancia, "-n", "\", ", "A2", "\", "-d", B2)", sep = "")
cat("=CONCATENAR(", "\", gsub("-", "", Instancia), "n", "\", ", "A2", "\", "d", B2)", sep = "")

```

### 16.3. Código graficador de resultados

```

library(plyr)
library(readxl)
Instancia <- "P-n23-k8" #Nombre de la instancia en librerias
Valor_Deterministico <- 529 #Valor de z en librerias

Archivo <- paste("Ruta", Instancia, "/Aleatorio_", Instancia, ".xlsx", sep = "")
Datos = read_excel(Archivo, 1, col_names = TRUE) #Realiza la lectura del excel con los
  resultados de los escenarios.
Datos_Ordenados <- arrange(Datos, FO) #Ordena los datos

Nombre <- paste("Instancia", Instancia)

#Grafica el diagrama de caja de la funcion objetivo.

```

```

setwd(paste("Ruta",Instancia,"/Graficos",sep=""))#Define la ruta del directorio de trabajo
png(paste("Diagrama de caja de FO de ",Instancia,".png",sep=""), width = 18, height = 12,
    units="cm",res =300)
boxplot(Datos_Ordenados$FO,main="Diagrama de caja de los valores de la funcion objetivo"
    ,ylab="Valor de la funcion objetivo",col=colors()[50],border=colors()[258],xlab=
    Nombre)
dev.off()

```

#Grafica el diagrama de caja del tiempo de procesamiento.

```

png(paste("Diagrama de caja de T de ",Instancia,".png",sep=""), width = 18, height = 12,
    units="cm",res =300)
boxplot(Datos_Ordenados$T,main="Diagrama de caja del tiempo de procesamiento",ylab="
    Tiempo en segundos",varwidth = F,col=colors()[50],border=colors()[258],xlab=
    Nombre)
dev.off()

```

#Grafica el histograma de los valores de la funcion objetivo.

```

png(paste("Histograma de ",Instancia,".png",sep=""), width = 20, height = 12,units="cm",res
    =300)
hist(Datos_Ordenados$FO,xlab="Valor de la funcion objetivo",ylab="Frecuencia",main=
    paste("Histograma de los valores de la funcion objetivo de la",Nombre),col=colors()
    [50])
dev.off()

```

#Grafica la relacion entre los valores de la funcion objetivo y el tiempo de procesamiento.

```

png(paste("Valores de ",Instancia," vs T", ".png",sep=""), width = 18, height = 12,units="cm",
    res =300)
plot(Datos_Ordenados$FO,Datos_Ordenados$T,xlab="Valor de la funcion objetivo",ylab="
    Tiempo de procesamiento (s)",main=paste("Valores de z de",Instancia,"con respecto al
    tiempo de procesamiento"))
abline(v=mean(Datos_Ordenados$FO), lty=2, col=colors()[50])
abline(v=Valor_Deterministico, lty=1, col="blue")

```

```

legend(min(Datos_Ordenados$FO), max(Datos_Ordenados$T-0.5), legend=c("Media", "
  Valor deterministico"),
  col=c(colors()[50], "blue"), lty=2:1, cex=0.8)
dev.off()

```

#Grafica todos los valores de la funcion objetivo.

```

png(paste("Valores de ",Instancia,".png",sep=""), width = 18, height = 12,units="cm",res =
  300)
plot(Datos_Ordenados$FO,xlab="Numero de escenario",ylab="Valor de la funcion objetivo",
  main=paste("Valores de z de",Instancia,"para 100 escenarios"))
abline(h=mean(Datos_Ordenados$FO), lty=2, col=colors()[50])
abline(h=Valor_Deterministico, lty=1, col="blue")
legend(0, max(Datos_Ordenados$FO-0.75), legend=c("Media", "Valor deterministico"),
  col=c(colors()[50], "blue"), lty=2:1, cex=0.8)
dev.off()

```

## 16.4. Código graficador de trazado de rutas

```

\begin{tikzpicture}[scale=0.25]
\node[draw,rectangle] (1) at (30,40) {1};
\node[draw,circle] (2) at (37,52) {2};
\node[draw,circle] (3) at (49,49) {3};
\node[draw,circle] (4) at (52,64) {4};
\node[draw,circle] (5) at (31,62) {5};
\node[draw,circle] (6) at (52,33) {6};
\node[draw,circle] (7) at (42,41) {7};
\node[draw,circle] (8) at (52,41) {8};
\node[draw,circle] (9) at (57,58) {9};
\node[draw,circle] (10) at (62,42) {10};
\node[draw,circle] (11) at (42,57) {11};
\node[draw,circle] (12) at (27,68) {12};

```

```

\node[draw,circle] (13) at (43,67) {13};
\node[draw,circle] (14) at (58,48) {14};
\node[draw,circle] (15) at (58,27) {15};
\node[draw,circle] (16) at (37,69) {16};
\draw [thick] (1) -- (2);
\draw [thick] (1) -- (3);
\draw [thick] (1) -- (5);
\draw [thick] (1) -- (6);
\draw [thick] (1) -- (7);
\draw [thick] (1) -- (8);
\draw [thick] (1) -- (9);
\draw [thick] (1) -- (11);
\draw [thick] (2) -- (4);
\draw [thick] (5) -- (12);
\draw [thick] (6) -- (15);
\draw [thick] (8) -- (10);
\draw [thick] (10) -- (14);
\draw [thick] (11) -- (13);
\draw [thick] (13) -- (16);
\draw [dashed] (1) -- (3);
\draw [dashed] (1) -- (4);
\draw [dashed] (1) -- (7);
\draw [dashed] (1) -- (9);
\draw [dashed] (1) -- (12);
\draw [dashed] (1) -- (14);
\draw [dashed] (1) -- (15);
\draw [dashed] (1) -- (16);
\end{tikzpicture}

```

# Bibliografía

- Augerat, P. (2004). *Approche polyédrale du problème de tournées de véhicules*. Grenoble. [13.1](#)
- Badii, M. H. and Castillo, J. (2009). Distribuciones probabilísticas de uso común. *Daena: International journal of good conscience*, 4(1):149–178. [9.1.10](#)
- Birge, J. R. and Louveaux, F. (2010). *Introduction to Stochastic Programming*. London, segunda edición. [9.1.5](#)
- Dantzing, G. B., Fulkerson, D. R., and Johnson, S. M. (1954). Solution of a Large-Scale Traveling-Salesman Problem. *Operations Research Society of America*, 2:393–410. [2](#), [9.1.1](#)
- Departamento Nacional de Planeación (2018). *Encuesta Nacional Logística - 2018*. Bogotá. [7](#)
- Eksioglu, B., Volkan, A., and Reisman, A. (2009). The vehicle routing problem : A taxonomic review. *Computers & Industrial Engineering*, 57(4):1472–1483. [5](#)
- Espinosa Téllez, E. G., Sánchez Rodríguez, O., and Bernal, J. O. (2016). Problema del agente viajero. *Ingeciencia*, 1(2):57–65. [2](#)
- Gardner, M. (1983). *Sixth book of mathematical diversions from Scientific American*. University of Chicago, Chicago. [9.2.3](#)
- Gómez Aparicio, J. M. (2013). *Gestión logística y comercial*. McGraw-Hill, Madrid, primera edición. [3](#)
- Gonçalves Dosantos, J. C. (2016). *Problemas de rutas de vehículos estocásticos*. PhD thesis, Universidad de Santiago de Compostela. [9.1.6](#)
- Khan, S., Khan, F., and Zhang, B. (2012). Reverse e-logistics for SMEs in Pakistan. *Advances in Intelligent and Soft Computing*, 115 AISC(VOL. 2):229–237. [3](#)

- Laporté, G. and Louveaux, F. V. (1993). The integer L-shaped method for stochastic integer programs with complete recourse. *Operations Research Letters*, 13(3):133–142. [9.1.9](#)
- Laporté, G., Louveaux, F. V., and Van Hamme, L. (2002). An Integer L-Shaped Algorithm for the Capacitated Vehicle Problem with Stochastic Demands. *Operations Research*, 50(3):415–423. [9.1.9](#), [9.1.9](#), [9.1.10](#)
- Louveaux, F. V. and Salazar-González, J.-J. (2018). Exact Approach for the Vehicle Routing Problem with Stochastic Demands and Preventive Returns. *Transportation Science*, 52(6):1463–1478. [9.1.5](#), [9.1.9](#)
- Menger, K. (1930). Kolloquium 5.II.1930. In *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums 2*, pgs 11–12. Springer, Leipzig. [2](#)
- Miller, C. E., Tucker, A. W., and Zemlin, R. A. (1960). Integer Programming Formulation of Traveling Salesman Problems. *ACM*, 7(4):326–329. [9.1.1](#)
- Muñoz, F., Llinás, H., Bravo, L., and Arroyo, I. (2014). Distribuciones Poisson y Gamma: Una Discreta y Continua Relación. *Prospectiva*, 12(1):99–107. [9.1.10](#)
- Oyola, J., Arntzen, H., and Woodruff, D. L. (2018). The stochastic vehicle routing problem, a literature review, part I: models. *EURO Journal on Transportation and Logistics*, 7(3):193–221. [9.1.10](#)
- Real Academia de la Lengua Española (2014). *Diccionario de la Lengua Española*. Espasa, Madrid, 23 edición. [11](#)
- Reingold, E., Nievergelt, J., and Deo, N. (1977). *Combinatorial Algorithms: Theory and Practice*. Prentice-Hall, New Jersey. [9.2.4](#)
- Ruz, J. J. (2018). Modelos lineales de optimización con variables continuas. In *Introducción a la programación matemática*. Universidad Complutense de Madrid, Madrid. [9.2.6](#), [9.2.7](#)
- Sáez R., E. (2003). Formulación de modelos de programación lineal. In *Fundamentos de Investigación de Operaciones*, pgs 1–14. Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso. [9.2.2](#)
- Sampieri Hernández, R., Fernández Collado, C., and Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill, México D.F, sexta edición. [10.1](#)
- Stockdale, M. L. (2011). *El problema del viajante: un algoritmo heurístico y una aplicación*. Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires. [9.1.1](#)

- Supply Chain Visions (2010). *Supply chain and logistics terms and glossary*. IWLA, Washington. [9.2.1](#)
- Tillman, F. A. (1969). The Multiple Terminal Delivery Problem with Probabilistic Demands. *Transportation Science*, 3(3):192–204. [2](#)
- Toro Ocampo, E. M. (2016). *Solución del problema de localización y ruteo usando un modelo matemático flexible y considerando efectos ambientales*. PhD thesis, Universidad Tecnológica de Pereira. [9.1.2](#)
- Toro Ocampo, E. M., Franco-Baquero, J. F., and Gallego-Rendón, R. A. (2016). Modelo matemático para resolver el problema de localización y ruteo con restricciones de capacidad considerando flota propia y subcontratada. *Ingeniería, Investigación y Tecnología*, 17(3):357–369. [7](#), [9.1.3](#), [9.1.4](#), [9.4](#)
- Uchoa, E., Xavier, I., Pecin, D., Pessoa, A., Poggi, A., Subramanian, A., Vidal, T., and Oliveira, D. (2014). CVRPLIB. [10.2](#), [1](#)
- Venables, W. N. and Smith, D. M. (2020). *An Introduction to R*. 4.0.3 edición. [10.2](#)
- Vidal, T., Crainic, T. G., Gendreau, M., and Prins, C. (2013). Heuristics for multi-attribute vehicle routing problems: A survey and synthesis. *European Journal of Operational Research*, 231(1):1–21. [9.1.2](#)
- White, F. P., Ball, W. W. R., and Coxeter, H. S. M. (1905). Mathematical Recreations and Essays. *The Mathematical Gazette*, 23(256):422. [2](#)